研究快报

跨共振的周期-积分边值问题

宋 新[1,2], 杨 雪[1]
(1. 吉林大学 数学学院, 长春 130012; 2. 空军航空大学 数学研究室, 长春 130022)

摘要: 研究二阶微分方程周期-积分边值问题, 应用最优控制理论给出了跨多个共振情形下的二阶微分方程周期-积分边值问题唯一可解的最优条件.

关键词: 最优控制; 二阶微分方程; 周期-积分边值; 唯一可解性
中图分类号: O175.1 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)01-0066-02

Periodic-Integral Boundary Value Problems across Resonance

SONG Xin[1,2], YANG Xue[1]
(1. *College of Mathematics, Jilin University, Changchun* 130012, *China*;
2. *Teaching and Research Section of Mathematics, Aviation University of Air Force, Changchun* 130022, *China*)

Abstract: The periodic-integral boundary value problems for second order differential equations were considered. On the basis of optimal control theory method, we gave an optimal condition of the unique solvability to the periodic-integral boundary value problems for second order differential equations across multiple resonance.

Key words: optimal control; second order differential equations; periodic-integral boundary value problem; unique solvability

考虑边值问题(BVP):

$$x'' + f(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$\int_0^{2\pi} x(s)\,\mathrm{d}s = 0, \tag{2}$$

$$x(0) = x(2\pi) \tag{3}$$

在跨共振情形下的唯一可解性. 这种非局部边值问题的研究近年来受到人们广泛关注[1-6], 本文应用最优控制理论给出了其唯一可解性的最优性条件. 假设:

(H_1) $f(t,x)$, $f_x(t,x)$于$[0,2\pi]\times\mathbb{R}^1$上连续;

(H_2) 存在正数A,B和有界函数$\beta(t)\in L^2[0,2\pi]$, 使得$0\leqslant(k-1)^2<A<k^2\leqslant\cdots\leqslant(k+m-1)^2\leqslant B<(k+m)^2$, $A\leqslant f_x(t,x)\leqslant B$, $f_x(t,x)\leqslant\beta(t)$, $\int_0^{2\pi}\beta(t)\,\mathrm{d}t<k\left(4\sigma A+2\left(\frac{\pi}{k}-2\sigma\right)B\right)$, 其中$\sigma$是代数方程$\tan\sqrt{A}\alpha=-\sqrt{\frac{A}{B}}\cot\sqrt{B}\left(\alpha-\frac{\pi}{2k}\right)$的最小正根.

定理1 假设(H_1),(H_2)成立, 则BVP(1)-(3)有唯一解.

在证明定理1前, 先考虑线性方程

$$x'' + a(t)x = 0, \tag{4}$$

收稿日期: 2010-12-03.

作者简介: 宋 新(1981—), 女, 汉族, 博士研究生, 从事微分动力系统的研究, E-mail: sissi.rings@gmail.com. 通讯作者: 杨 雪(1982—), 女, 汉族, 博士, 讲师, 从事微分动力系统的研究, E-mail: xueyang@jlu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11026043).

（其中 $a(t)\in L^2[0,2\pi]$，并且 $A\leqslant a(t)\leqslant B$）及最优控制问题 $\min\limits_{u\in\Omega} J[u]$，其中：$J[u]=\int_0^{2\pi}u(s)\mathrm{d}s$；$\Omega=\{u(s)$：对于 $u(s)=a(t)$，BVP(2)-(4)有非平凡解$\}$.

引理 1　最优控制函数 $u_*(t)$ 存在.

应用 Ekeland 变分原理即可证明引理 1.

将 $u_*(t)$ 作 2π 周期延拓. 设 $x_*(t)$ 是 BVP(2)-(4)对 $a=u_*$ 的解. 按延拓后的 $u_*(t)$ 延展 $x_*(t)$ 于 $\mathbb{R}^1$.

引理 2　对某一 $t_0\in(-2\pi/k,0]$，

$$u_*(t)=\begin{cases}A, & t\in[t_0,t_0+\sigma),\\ B, & t\in(t_0+\sigma,t_0+\pi/k-\sigma),\\ A, & t\in(t_0+\pi/k-\sigma,t_0+\pi/k+\sigma),\\ B, & t\in(t_0+\pi/k+\sigma,t_0+2\pi/k-\sigma),\\ A, & t\in(t_0+2\pi/k-\sigma,t_0+2\pi/k],\\ u_*(t+2\pi/k)=u_*(t), & \text{其他；}\end{cases}$$

$$x_*(t)=\begin{cases}\sin\sqrt{A}(t-t_0), & t\in[t_0,t_0+\sigma],\\ C\cos\sqrt{B}(t-(t_0+\pi/(2k))), & t\in(t_0+\sigma,t_0+\pi/k-\sigma],\\ -\sin\sqrt{A}(t-(t_0+\pi/k)), & t\in(t_0+\pi/k-\sigma,t_0+\pi/k+\sigma],\\ -C\cos\sqrt{B}(t-(t_0+3\pi/(2k))), & t\in(t_0+\pi/k+\sigma,t_0+2\pi/k-\sigma],\\ \sin\sqrt{A}(t-(t_0+2\pi/k)), & t\in(t_0+2\pi/k-\sigma,t_0+2\pi/k],\\ x_*(t+2\pi/k)=x_*(t), & \text{其他.}\end{cases}$$

证明：应用 Pontryagin 最大值原理，再结合 BVP(2)-(3)即得 $u_*(t)$ 和 $x_*(t)$ 的表达式.

下面证明定理 1. 改写方程(1)为 $x''+\int_0^1 f_x(t,\theta x)\mathrm{d}\theta\cdot x+f(t,0)=0$. 定义 $X=\{y\in C^1([0,2\pi],\mathbb{R}^1)$：$y(t)$ 满足边值条件(2)-(3)$\}$，且具有范数 $\|y\|=:\max\limits_{[0,2\pi]}|y(t)|+\max\limits_{[0,2\pi]}|y'(t)|$，则 X 是 Banach 空间. 对任意的 $y\in X$，定义映射 P：$X\to X$，$P(y)=x_y$，其中 x_y 是 $x''+\int_0^1 f_x(t,\theta y(t))\mathrm{d}\theta\cdot x+f(t,0)=0$ 满足边值条件(2)-(3)的解. 由假设(H_2)和引理 2 知，映射 P 是良定义的，并且是全连续的. 由假设(H_2)知，存在正数 M，使得 $\|PX\|\leqslant M$. 再应用 Schauder 不动点定理知，P 于 X 中有不动点，设为 x_*，则 $\|x_*\|\leqslant M$，从而 $x_*(t)$ 是 BVP(1)-(3)的解. 唯一性可应用引理 2 得到.

参　考　文　献

[1] CHANG Xiao-jun, HUANG Qing-dao. Two-Point Boundary Value Problems for Duffing Equations across Resonance [J]. J Optim Theory Appl, 2009, 140(3): 419-430.

[2] LI Yong, WANG Huai-zhong. Neumann Problems for Second Order Ordinary Differential Equations across Resonance [J]. Z Angew Math Phys, 1995, 46(3): 393-406.

[3] SONG Xin, YANG Xue. Optimal Solvability for Periodic-Integral Boundary Value Problems [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2010, 48(6): 951-952.（宋新，杨雪. 周期-积分边值问题的最优可解性[J]. 吉林大学学报：理学版，2010，48(6)：951-952.）

[4] WANG Huai-zhong, LI Yong. Existence and Uniqueness of Periodic Solutions for Duffing Equations across Many Points of Resonance [J]. J Differential Equations, 1994, 108(1): 152-169.

[5] WANG Huai-zhong, LI Yong. Two Point Boundary Value Problems for Second-Order Ordinary Differential Equations across Many Resonant Points [J]. J Math Anal Appl, 1993, 179(1): 61-75.

[6] WANG Huai-zhong, LI Yong. Existence and Uniqueness of Solutions to Two Point Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations [J]. Z Angew Math Phys, 1996, 47(3): 373-384.