云南大学学报（自然科学版），2006，28（1）：16~ 19　　CN 53- 1045/N　ISSN 0258- 7971
Journal of Yunnan University

两相依聚集索赔风险模型的生存概率*

杨善兵[1,2]，房厚庆[3]
(1.南京航空航天大学 理学院,江苏 南京　210016;2.盐城工学院 基础部,江苏 盐城　224003;
3.江苏大学 理学院,江苏 镇江　212013)

摘要:介绍了2个具有相依关系的聚集索赔的风险模型,求出了模型的生存概率满足的积分微分方程,借助于林德伯格系数,获得了模型的生存概率满足的拉普拉斯变换及其初始盈余为零时的精确值的表达式.

关键词:相依的聚集索赔;生存概率;积分微分方程组;Erlang(2)过程
中图分类号:O 211.5　　文献标识码:A　　文章编号:0258- 7971(2006)01- 0016- 04

1　积分微分方程组

风险理论是经营者或决策者对风险进行定量分析和预测的一般理论,风险经营的稳定性分析在这一理论中占有十分重要的地位,而破产理论直接用于经营的稳定性分析,研究其经营者的经营状况.生存概率给出了经营稳定性的度量刻画,它与初始资本有关.初始资本越大生存概率越大.但是,生存概率的精确表达式在绝大多数情况下是无法得到的,只有在极少数特殊的情况下可以得到.当前具有相依关系聚集索赔的风险模型越来越受到研究风险理论界的学者们的重视,如文献[1~ 3].本文考虑的也是有一定相关性的2个聚集索赔过程,可以经过一定的转换,使其一个为复合Poisson过程,另一个为Erlang(2)过程.众所周知,复合Poisson过程是经典风险模型所经常讨论的过程,而Erlang过程是排队论所最常使用的过程,本文将二者完美地结合起来,解决了较难处理的一类风险模型.

本节介绍了原模型及其转化的模型,使可以运用转化的模型来求原模型的生存概率,求出了生存概率所满足的积分微分方程;第2部分借助于构造鞅的方法找到了本模型的广义的林德伯格方程,且证明了方程只有唯一的正根;第3部分借助于林德伯格系数,求出了生存概率的拉普拉斯变换及初始盈余为零时的生存概率的精确值.

本文考虑的是2个具有相依关系聚集索赔过程的风险模型,设 X_i 和 $Y_i(i=1,2,\cdots)$ 是2个独立同分布的随机变量列,分布函数分别为 F_X 和 F_Y,其数学期望分别为 μ_X 和 μ_Y.令

$$U(t)=\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i+\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i,\qquad t\geqslant 0,\tag{1}$$

其中 $N_i(t)$ 是第 $i(i=1,2)$ 类的索赔计数过程,假定 $\{X_i,i=1,2,\cdots\}$ 和 $\{Y_i,i=1,2,\cdots\}$ 是独立的,它们和 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 也是独立的,但是2个索赔计数过程是相关的,相关的方式为

$$N_1(t)=K_1(t)+\overline{K(t)}\ 和\ N_2(t)=K_2(t)+\overline{K(t)},$$

其中 $K_1(t)$ 和 $K_2(t)$ 为参数分别是 k_1 和 k_2 的Poisson过程,$\overline{K(t)}$ 是Erlang(2)过程,且 $K_1(t)$,$K_2(t)$ 和 $\overline{K(t)}$ 是独立的更新过程.盈余过程为

$$S(t)=u+ct-U(t),\qquad t\geqslant 0,\tag{2}$$

u 为初始准备金,c 为保费率,$\Phi(u)=\Pr(S(t)\geqslant 0,\forall t\geqslant 0\mid U(0)=u)$,$\Psi(u)=1-\Phi(u)$,为了讨

* 收稿日期:2005- 02- 23
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10271090)
作者简介:杨善兵(1974-),男,安徽人,硕士,讲师,主要从事金融数学方面的研究.

论 $S(t)$ 的生存概率, 我们利用以下转化的盈余过程

$$S'(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{K_{12}(t)} X'_i - \sum_{i=1}^{\overline{K(t)}} Y'_i,\ t \geqslant 0, \tag{3}$$

其中$\{X'_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 和$\{Y'_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 是数学期望分别为 $\mu_{X'}$ 和 $\mu_{Y'}$ 独立同分布的索赔随机变量列, 并且它们的分布函数分别为 $F_{X'}(x)$ 和 $F_{Y'}(x)$, 密度函数分别为 $f_{X'}(x)$ 和 $f_{Y'}(x)$, $K_{12}(t) = K_1(t) + K_2(t)$ 是参数为 $\lambda = k_1 + k_2$ 的Poisson过程, X'_i, Y'_i 和 $K_{12}(t)$, $\overline{K(t)}$ 独立, 并且假定 $K_{12}(t)$ 和 $\overline{K(t)}$ 也是独立的. 可以求出 X'_i, Y'_i 的分布函数分别为: $F_{X'}(x) = \dfrac{k_1}{k_1 + k_2} F_X(x) + \dfrac{k_2}{k_1 + k_2} F_Y(x)$ 和 $F_{Y'}(x) = F_X * F_Y(x)$, 其中 $*$ 表示卷积. 不难看出 $S(t)$ 和 $S'(t)$ 具有相同的分布, 因此我们可以通过过程 $S'(t)$ 来考虑过程 $S(t)$.

通篇论文假定所有的分布函数是轻尾的, 数学期望是有限的.

设相邻的索赔 X'_i 的时间间隔为$\{W_i\}_{i \geqslant 1}$, 相邻的索赔 Y'_i 的时间间隔为$\{V_i\}_{i \geqslant 1}$, V_i 是服从 Erlang(2) 分布, 即 $V_i = L_{i1} + L_{i2}$, L_{i1} 和 L_{i2} 是独立的, $\{L_{i1}\}_{i \geqslant 1}$ 是一个独立同指数分布的随机变量列, 参数为 λ_1; $\{L_{i2}\}_{i \geqslant 1}$ 是另一个独立同指数分布的随机变量列, 参数为 λ_2. 令 $c > \lambda\mu_{X'} + \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\mu_{Y'}$, 设相对安全负荷为 θ, 满足 $\dfrac{c}{1+\theta} = \left[\lambda\mu_{X'} + \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\mu_{Y'}\right]$.

定义破产时 $T = \inf\{t \geqslant 0: U(t) < 0 \mid U(0) = u\}$, 如果上集合不存在则 T 为 ∞; 最终破产概率为 $\Psi(u) = \Pr(T < \infty \mid U(0) = u)$, $u \geqslant 0$, 则生存概率为 $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$.

定义 $\Psi_1(u) = \Pr(T < \infty \mid L_{11} = t, U(0) = u)$, $\Phi_1(u) = 1 - \Psi_1(u)$, $M = \min\{W_1, L_{11}\}$. 因为

$$\Pr(M = W_1) = \Pr(W_1 < L_{11}) = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1},\quad \Pr(M = L_{11}) = \Pr(W > L_{11}) = \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1},$$

$$\Pr(M > t \mid M = W_1) = \Pr(M > t \mid M = L_{11}) = \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)t},$$

则有

$$\begin{aligned}\Phi(u) = &\int_0^\infty \Pr(M = \mathrm{d}t, M = L_{11})\,\Phi_1(u + ct) + \\ &\int_0^\infty \Pr(M = \mathrm{d}t, M = W_1)\int_0^{u+ct}\Phi(u + ct - x) f_{X'}(x)\,\mathrm{d}x = \\ &\frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}\int_0^\infty (\lambda + \lambda_1)\mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)t}\Phi_1(u + ct)\,\mathrm{d}t + \\ &\frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}\int_0^\infty (\lambda + \lambda_1) e^{-(\lambda+\lambda_1)t}\int_0^{u+ct}\Phi(u + ct - x) f_{X'}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{4}$$

令 $Z = \min\{W_1, L_{12}\}$, 则

$$\begin{aligned}\Phi_1(u) = &\int_0^\infty \Pr(Z = \mathrm{d}t, Z = L_{12})\int_0^{u+ct}\Phi_1(u + ct - x) f_{Y'}(x)\,\mathrm{d}x + \\ &\int_0^\infty \Pr(Z = \mathrm{d}t, Z = W_1)\int_0^{u+ct}\Phi_1(u + ct - x) f_{X'}(x)\,\mathrm{d}x = \\ &\frac{\lambda_2}{\lambda + \lambda_2}\int_0^\infty (\lambda + \lambda_2)\mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_2)t}\int_0^{u+ct}\Phi(u + ct - x) f_{Y'}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \\ &\frac{\lambda}{\lambda + \lambda_2}\int_0^\infty (\lambda + \lambda_2)\mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_2)t}\int_0^{u+ct}\Phi_1(u + ct - x) f_{X'}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5}$$

令 $s = u + ct$, (4) 和(5) 式可变为

$$\begin{aligned}c\,\Phi(u) = &\lambda_1\int_u^\infty \Phi_1(s)\exp\left\{-\frac{(\lambda + \lambda_1)(s - u)}{c}\right\}\mathrm{d}s + \\ &\lambda\int_u^\infty \exp\left\{-\frac{(\lambda + \lambda_1)(s - u)}{c}\right\}\int_0^s \Phi(s - x) f_{X'}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

$$c\Phi_1(u)=\lambda_2\int_u^\infty \exp\left\{-\frac{(\lambda+\lambda_2)(s-u)}{c}\right\}\int_0^s \Phi(s-x)f_{Y'}(x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s+\lambda\int_u^\infty \exp\left\{-\frac{(\lambda+\lambda_2)(s-u)}{c}\right\}\int_0^s \Phi_1(s-x)f_{X'}(x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s.$$

对上面2式关于 u 微分, 可得

$$c\Phi'(u)=-\lambda_1\Phi_1(u)-\lambda\int_0^u \Phi(u-x)f_{X'}(x)\mathrm{d}x+(\lambda+\lambda_1)\Phi(u), \tag{6}$$

$$c\Phi'_1(u)=-\lambda_2\int_0^u \Phi(u-x)f_{Y'}(x)\mathrm{d}x-\lambda\int_0^u \Phi_1(u-x)f_{X'}(x)\mathrm{d}x+(\lambda+\lambda_2)\Phi_1(u). \tag{7}$$

对上面2式关于 u 在区间$[0,u]$上积分得

$$\Phi(u)=\Phi(0)+\frac{\lambda_1}{c}\int_0^u[\Phi(s)-\Phi_1(s)]\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-x)\bar{F}_{X'}(x)\mathrm{d}x,\ u\geqslant 0, \tag{8}$$

$$\Phi_1(u)=\Phi_1(0)+\frac{\lambda_2}{c}\int_0^u[\Phi_1(s)-\Phi(s)]\mathrm{d}s+\frac{\lambda_2}{c}\int_0^u \Phi(u-x)\bar{F}_{Y'}(x)\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi_1(u-x)\bar{F}_{X'}(x)\mathrm{d}x,\ u\geqslant 0, \tag{9}$$

其中 $\bar{F}_{X'}(x)=1-F_{X'}(x)$ 和 $\bar{F}_{Y'}(x)=1-F_{Y'}(x)$, 上2式令 $u\to\infty$, 由单调收敛定理和 $\Phi(\infty)=\Phi_1(\infty)=1$ 得

$$\Phi(0)=1-\frac{\lambda_1}{c}\int_0^\infty[\Phi(s)-\Phi_1(s)]\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{c}\mu_{X'}, \tag{10}$$

$$\Phi_1(0)=1-\frac{\lambda_2}{c}\int_0^\infty[\Phi_1(s)-\Phi(s)]\mathrm{d}s+\frac{\lambda_2}{c}\mu_{Y'}+\frac{\lambda}{c}\mu_{X'}. \tag{11}$$

由(10)和(11)2式可以得出 $\Phi(0)$ 和 $\Phi_1(0)$ 满足

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\Phi(0)+\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\Phi_1(0)=1-\frac{\lambda\mu_{X'}+\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\mu_{Y'}}{c}=\frac{\theta}{1+\theta}. \tag{12}$$

2 广义的林德伯格方程

令 $T_0=0$ 和 $T_k=\sum_{j=1}^k V_j$ 表示第 k 个索赔到达时刻, 令 $U_0=U(0)=u$, 对 $k=1,2,\cdots$, $U_k=U(T_k)=u+cT_k-\sum_{j=1}^k Y'_j-\sum_{i=1}^{N(T_k)}X'_i=u+\sum_{j=1}^k\left[cV_j-Y_j-\sum_{i=1}^{N(V_j)}X'_i\right]$ 表示第2类的险种的第 k 个索赔后的盈余, 我们寻找 s 使$\{\mathrm{e}^{sU_k};k=0,1,2,\cdots\}$ 成为一个鞅, 其条件是

$$E\left[\mathrm{e}^{csV_1-sY'_1-s\sum_{i=1}^{N(V_1)}X'_i}\right]=E\left[\mathrm{e}^{csV_1-s\sum_{i=1}^{N(V_1)}X'_i}\right]E[\mathrm{e}^{-sY'_1}]=1\text{ 成立.} \tag{13}$$

定义$\hat{f}_{X'}(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}f_{X'}(x)\mathrm{d}x$, $\hat{f}_{Y'}(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}f_{Y'}(x)\mathrm{d}x$ 分别是$f_{X'}(x)$ 和 $f_{Y'}(x)$ 的 Laplace 变换, 令 $\gamma(s):=\left[\frac{c}{\lambda_1}s+\frac{\lambda}{\lambda_1}(\hat{f}_{X'}(s)-1)-1\right]\left[\frac{c}{\lambda_2}s+\frac{\lambda}{\lambda_2}(\hat{f}_{Y'}(s)-1)-1\right]$, (13) 式等价于

$$\gamma(s)=\hat{f}_{Y'}(s),\qquad s\in C(\text{复数域}), \tag{14}$$

(14) 式称为广义的林德伯格方程(Generalized Lundberg Fundamental Equation). 注意到$s=0$是其一根, 下面的定理证明它有且只有一个正实根(令为 ρ), 有时 ρ 也称为林德伯格系数.

定理1 对于广义的林德伯格方程有且只有一个正实根 ρ.

证明 定义 $\gamma(s):=\left[\frac{c}{\lambda_1}s+\frac{\lambda}{\lambda_1}(\hat{f}_{X'}(s)-1)-1\right]\left[\frac{c}{\lambda_2}s+\frac{\lambda}{\lambda_2}(\hat{f}_{Y'}(s)-1)-1\right]=0$, $s\in C$(复数域), 可以看到上面方程只有2个实根 s_1 和 s_2.

由于 $c+\lambda\hat{f}'_{X'}(s)\geqslant c-\lambda\mu_{X'}>0,\ s\geqslant 0$,

$$\gamma'(s)=\frac{2[c+\lambda\hat{f}'_{X'}(s)][s-\lambda-(\lambda_1+\lambda_2)/2+\lambda\hat{f}_{X'}(s)]}{\lambda_1\lambda_2}=0.$$

上面方程只有一个正实根 s_0, 因此当 $s\in[0,s_0)$ 时, $\gamma'(s)<0$, $\gamma(s)$ 单调下降; 当 $s\in[s_0,\infty)$ 时, $\gamma'(s)>0$, $\gamma(s)$ 单调上升, 又由于 $\gamma(0)=\hat{f}_{X'}(0)=1$ 和 $\gamma'(0)=-\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)(c-\lambda\mu_{X'})}{\lambda_1\lambda_2}<-\mu_{Y'}=\hat{f}'_{Y'}(0)$, 故 $\gamma(s)=\hat{f}_{Y'}(s)$ 仅有一个正实根 ρ.

3　$\Phi(s)$ 的拉普拉斯变换

定义 $\Phi(u)$ 和 $\Phi_1(u)$ 的拉普拉斯变换分别为

$$\hat{\Phi}(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\Phi(s)\,\mathrm{d}x \text{ 和 } \hat{\Phi}_1(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\Phi_1(x)\,\mathrm{d}x,\quad s\geqslant 0.$$

对(6), (7) 2 式分别取拉普拉斯变换得

$$[cs-(\lambda+\lambda_1)+\lambda\hat{f}_{X'}(s)]\hat{\Phi}(s)=c\Phi(0)-\lambda_1\hat{\Phi}_1(s),$$

$$[cs-(\lambda+\lambda_2)+\lambda\hat{f}_{X'}(s)]\hat{\Phi}_1(s)=c\Phi_1(0)-\lambda_2\hat{\Phi}(s)\hat{f}_{Y'}(s).$$

上面 2 式经过整理可得

$$\hat{\Phi}(s)=\frac{c\Phi(0)[cs-(\lambda+\lambda_2)+\lambda\hat{f}_{X'}(s)]-c\lambda_1\Phi_1(0)}{\lambda_1\lambda_2(\gamma(s)-\hat{f}_{Y'}(s))},\tag{15}$$

$$\hat{\Phi}_1(s)=\frac{c\Phi_1(0)[cs-(\lambda+\lambda_1)+\lambda\hat{f}_{X'}(s)]-c\lambda_2\hat{f}_{Y'}(s)\Phi(0)}{\lambda_1\lambda_2(\gamma(s)-\hat{f}_{Y'}(s))}.\tag{16}$$

我们采用文献[5] 中的方法, 由于对于所有的 $s>0$, $\Phi(u)$ 和 $\Phi_1(u)$ 是有限的, 又因为 $\gamma(\rho)=\hat{f}_{Y'}(\rho)$, 故当 $s=\rho$ 时(16) 和(17) 式的分子应为 0, 即

$$\Phi(0)[c\rho-(\lambda+\lambda_2)+\lambda\hat{f}_{X'}(\rho)]=\lambda_1\Phi_1(0),\tag{17}$$

$$\Phi_1(0)[c\rho-(\lambda+\lambda_1)+\lambda\hat{f}_{X'}(\rho)]=\lambda_2\hat{f}_{Y'}(\rho)\Phi(0),$$

所以

$$\hat{\Phi}(s)=\frac{c\Phi(0)[c(s-\rho)+\lambda(\hat{f}_{X'}(s)-\hat{f}_{X'}(\rho))]}{\lambda_1\lambda_2[\gamma(s)-\hat{f}_{Y'}(s)]},\qquad s\in C,\tag{18}$$

$$\hat{\Phi}_1(s)=\frac{\rho-(\lambda+\lambda_2)+\lambda\hat{f}_{X'}(\rho)}{\lambda_1}\hat{\Phi}(s)+\frac{c\Phi(0)}{\lambda_1}\left[\frac{\hat{f}_{Y'}(\rho)-\hat{f}_{Y'}(s)}{\gamma(s)-\hat{f}_{Y'}(s)}\right].\tag{19}$$

解方程(12) 和(17) 得

$$\Phi(0)=\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{c\rho-\lambda[1-\hat{f}_{X'}(\rho)]}\right),\tag{20}$$

$$\Phi_1(0)=\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{c\rho-\lambda[1-\hat{f}_{X'}(\rho)]}\right)\left(\frac{c\rho-\lambda-\lambda_2+\lambda\hat{f}_{X'}(\rho)}{\lambda_1}\right).\tag{21}$$

可由关系式 $\Phi(u)=1-\Psi(u)$, 分别得出破产概率 $\Psi(u)$ 的拉普拉斯变换及 $\Psi(0)$ 的精确值. 当随机变量 X' 和 Y' 服从指数分布或混合指数分布时也可以得出它们的具体表达式.

参考文献:

[1] AMBAGASPITIYA R S. On the distribution of a sum of correlated aggregate claims[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1998, 23(1): 15-19.

[2] COSSETTE H, MARCEAU E. The discrete time model with correlated classes of business[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2000, 26(2): 133-149.

(下转第 26 页)

The planning walking trajectory of biped humanoid robot

ZHOU Yun-song, PEI Yi-jian, YU Jiang, CHI Zong-lin

(Department of Computer Science and Engineering, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: The planning trajectory of humanoid robot bases on that some special sample points analysis during the biped humanoid robot walks, and compares with mankind itself walking gaits by observing and measuring the value of gaits, and also uses cubic polynomial interpolation to plan the trajectory of the biped walking humanoid robot in the course of walking, according to the height ration of human body, makes the walking posture of the biped robot more like human walking by calculating out a smoother and steadier walking trajectory. The result of simulation test indicates that the cubic polynomial interpolation method is a better way of planning trajectory of walking biped humanoid robot. Moreover the trajectory of interpolation function is smoother.

Key words: biped robot; plan walking trajectory; cubic polynomial interpolation

* *

(上接第 19 页)

[3] KAM C Y, GUO Jun-yi, WU Xue-yuan. On a correlated aggregated claims model with Poisson and Erlang risk processes[J]. Insurance: mathematics and economics, 2002, 31(2): 205-214.

[4] 李晋枝, 乔克林, 何树红. 随机利率因素的破产模型[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2003, 25(1): 9-14.

[5] LI Shuan-ming, GARRIDO J. On ruin for Erlang(n) risk process[J]. Insurance: mathematics and economics, 2004, 34(3): 391-408.

Survival probability of two correlated aggregate claims risk model

YANG Shan-bing[1,2], FANG Hou-qing[3]

(1. School of Science Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 220016, China;

2. Department of foundamental Science Teaching, Yancheng Institute of Technology, Yancheng 224003, China;

3. School of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract: It is consided that two correlated aggregate claims risk model. In this model the two claims number processes are correlated. We derive system of integro - differential equations of survival probability, and obtain *Laplace* transforms of survival probability and explicit results when the initial reserve is zero by the coefficient of *Generalized Lundberg*.

Key words: correlated aggregate claims; survival probability; system of integro-differential equations; Erlang (2) processes