研究快报

随机微分方程 Runge-Kutta 方法的矩指数稳定及矩渐近稳定性

张 雨 馨[1,2]
(1. 吉林大学 数学学院, 长春 130012; 2. 哈尔滨工程大学 理学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 考虑逼近随机微分方程的1.5阶 Runge-Kutta 法的矩指数稳定性和矩渐近稳定性, 对于标量线性检验方程, 证明了随机 Runge-Kutta 法的矩指数稳定性和矩渐近稳定性是一致的, 并给出了这两种稳定性的存在条件.

关键词: Runge-Kutta 方法; 矩指数稳定; 矩渐近稳定
中图分类号: O211.63 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2012)01-0067-02

Moment Exponential and Moment Asymptotic Stabilities of Runge-Kutta Methods for Stochastic Differential Equations

ZHANG Yu-xin[1,2]
(1. *College of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*;
2. *College of Science*, *Harbin Engineering University*, *Harbin* 150001, *China*)

Abstract: Moment exponentical and moment asymptotic stabilities of Runge-Kutta method with strong order 1.5 for stochastic differential equations was studied. We have proved that for scalar linear test equations, these stabilities of Runge-Kutta method are equivalent and we gave the conditions for these stabilities existing.

Key words: Runge-Kutta method; moment exponential stability; moment asymptotical stability

对于随机微分方程, 常用的数值方法是 Euler-Maruyama 格式和 Milstein 近似, 关于它们的稳定性研究目前已有许多结果[1-6]. 但 Euler-Maruyama 方法的强收敛阶仅为0.5, Milstein 方法的强收敛阶为1. Burrage 等[7]构造了1.5阶强收敛的随机 Runge-Kutta 方法, 并在文献[8]中修正了所构造的算法. 本文研究这类算法的 p 阶矩指数稳定性和 p 阶矩渐近稳定性.

Stranovich 随机微分方程初值问题为:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(t)) \circ \mathrm{d}W(t), \qquad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

其中: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))$ 为漂移项; $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(t))$ 为扩散项; $W(t)$ 为标准 Wiener 过程. 做稳定性分析时, 一般只需考虑标量线性检验方程

$$\mathrm{d}y(t) = ay(t)\mathrm{d}t + by(t) \circ \mathrm{d}W(t), \tag{2}$$

其中 $a,b \in \mathbb{R}$. 选择 h 为步长, 用 $\boldsymbol{y}_n$ 表示 $\boldsymbol{y}(t_n)$ 的近似值, 将文献[9]提出的1.5阶 Runge-Kutta 法应用于随机微分方程(1)上, 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y} &= (\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{I})\boldsymbol{y}_n + h(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}) + J_1(\boldsymbol{B}^{(1)} \otimes \boldsymbol{I})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Y}) + (J_{10}/h)(\boldsymbol{B}^{(2)} \otimes \boldsymbol{I})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Y}), \\ \boldsymbol{y}_{n+1} &= \boldsymbol{y}_n + h(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{I})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}) + J_1(\boldsymbol{\gamma}^{(1)\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{I})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Y}) + (J_{10}/h)(\boldsymbol{\gamma}^{(2)\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{I})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Y}), \end{aligned} \tag{3}$$

其中: $J_1 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \circ\, \mathrm{d}W$; $J_{10} = \int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{t_n}^{t} \circ\, \mathrm{d}W(s)\mathrm{d}t$; $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{(1)},\boldsymbol{B}^{(2)}$ 是 $s \times s$ 矩阵; $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}^{(1)},\boldsymbol{\gamma}^{(2)}$ 是 s 维向量; $\boldsymbol{I}$ 是

收稿日期: 2011-12-06.
作者简介: 张雨馨(1982—), 女, 汉族, 博士研究生, 讲师, 从事随机微分方程数值解的研究, E-mail: xyz.jl@163.com.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11101184).

单位矩阵; ⊗表示 Kronecker 积, 而

$$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{Y}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{Y}_s^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})=(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}_1)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}_s)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{Y})=(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}_1)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}_s)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{e}=(1,\cdots,1).$$

将 Runge-Kutta 法(3)应用到检验方程(2)上, 可得

$$\boldsymbol{Y}=y_n\boldsymbol{e}+(ha\boldsymbol{A}+b(\boldsymbol{B}^{(1)}J_1+\boldsymbol{B}^{(2)}(J_{10}/h)))\boldsymbol{Y}\Rightarrow\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{I}-ha\boldsymbol{A}-b(\boldsymbol{B}^{(1)}J_1+\boldsymbol{B}^{(2)}(J_{10}/h)))^{-1}y_n\boldsymbol{e},$$

因此,

$$y_{n+1}=y_n+h\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}a\boldsymbol{Y}+(\boldsymbol{\gamma}^{(1)\mathrm{T}}J_1+\boldsymbol{\gamma}^{(2)\mathrm{T}}(J_{10}/h))b\boldsymbol{Y}\Rightarrow y_{n+1}=R_{n+1}y_n,\tag{4}$$

其中 $R_{n+1}=1+(ha\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+b(\boldsymbol{\gamma}^{(1)\mathrm{T}}J_1+\boldsymbol{\gamma}^{(2)\mathrm{T}}(J_{10}/h)))(\boldsymbol{I}-ha\boldsymbol{A}-b(\boldsymbol{B}^{(1)}J_1+\boldsymbol{B}^{(2)}(J_{10}/h)))^{-1}\boldsymbol{e}$.

下面给出矩指数稳定和矩渐近稳定的定义[6,9-10].

定义1 给定一个步长 $h>0$, 如果对于所有的初值 $\boldsymbol{y}_0\in\mathbb{R}^d$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\dfrac{1}{nh}\log E(|\boldsymbol{y}_n|^p)<0$, 则应用在方程(1)上的数值方法称为 p 阶矩指数稳定的. 当 $p=2$ 时, 这种稳定性称为均方指数稳定.

定义2 如果对于所有的初值 $\boldsymbol{y}_0\in\mathbb{R}^d$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}E(|\boldsymbol{y}_n|^p)=0$, 则应用在方程(1)上的数值方法称为 p 阶矩渐近稳定的. 当 $p=2$ 时, 这种稳定性称为均方渐近稳定.

定理1 对于检验方程(2), Runge-Kutta 法(3)的 p 阶矩指数稳定和 p 阶矩渐近稳定是一致的, 且充要条件均为 $E(|R_n|^p)<1$.

证明: 由式(4)通过迭代可知

$$|y_n|^p=|R_n|^p\cdots|R_1|^py_0.\tag{5}$$

因为$\{R_1,\cdots,R_n\}$是独立同分布的随机变量序列, 所以对式(5)的两端同时取数学期望可得 $E(|y_n|^p)=(E(|R_n|^p))^ny_0$, 计算此式的极限可得

$$\lim_{n\to\infty}E(|y_n|^p)=0\Leftrightarrow E(|R_n|^p)<1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nh}\log E(|y_n|^p)=\frac{1}{h}\log E(|R_n|^p)<0\Leftrightarrow E(|R_n|^p)<1,$$

从而由定义1和定义2可知结论成立.

衷心感谢吉林大学数学学院李勇教授的悉心指导.

参 考 文 献

[1] Buckwar E, Kelly C. Towards a Systematic Linear Stability Analysis of Numerical Methods for Systems of Stochastic Differential Equations [J]. SIAM J Numer Anal, 2010, 48(1): 298-321.

[2] Buckwar E, Sickenberger T. A Comparative Linear Mean-Square Stability Analysis of Maruyama and Milstein-Type Methods [J]. Math Comput Simu, 2011, 81: 1110-1127.

[3] Higham D J, MAO Xue-rong, YUAN Cheng-gui. Almost Sure and Moment Exponential Stability in the Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations [J]. SIAM J Numer Anal, 2007, 45(2): 592-609.

[4] Saito Y, Mitsui T. Mean-Square Stability of Numerical Schemes for Stochastic Differential Systems [J]. Vietnam J Math, 2002, 30: 551-560.

[5] Saito Y, Mitsui T. Stability Analysis of Numerical Schemes for Stochastic Differential Equations [J]. SIAM J Numer Anal, 1996, 33(6): 2254-2267.

[6] Higham D J, MAO Xue-rong, Stuart A M. Exponential Mean-Square Stability of Numerical Solutions to Stochastic Differential Equations [J]. LMS J Comput Math, 2003, 6: 297-313.

[7] Burrage K, Burrage P M. High Strong Order Explicit Runge-Kutta Methods for Stochastic Ordinary Differential Equations [J]. Appl Numer Math, 1996, 22(1/2/3): 81-101.

[8] Burrage K, Burrage P M. Order Conditions of Stochastic Runge-Kutta Methods by B-Series [J]. SIAM J Numer Anal, 2000, 38(5): 1626-1646.

[9] Burrage P M. Runge-Kutta Methods for Stochastic Differential Equations [D]: [Ph D Thesis]. Brisbane, Australia: Department of Mathematics, University of Queensland, 1999.

[10] MAO Xue-rong. Stochastic Differential Equations and Applications [M]. Chichester, UK: Horwood, 1997.

(责任编辑: 赵立芹)