第50卷 第1期　　吉林大学学报(理学版)　　Vol. 50 No. 1
2012年1月　　Journal of Jilin University (Science Edition)　　Jan 2012

一类广义不变凸函数的最优性条件

王彩玲, 卢秀双
(吉林大学 数学学院, 长春 130012)

摘要: 通过在 Banach 空间上定义一类新的广义不变凸函数, 给出了这类函数的一些性质, 并在该类广义不变凸的条件下, 给出了目标函数是实值函数和向量函数的最优性必要条件及向量优化问题的充分必要条件.

关键词: 弱有效解; 广义不变凸函数; 最优性条件
中图分类号: O221.6　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1671-5489(2012)01-0006-05

Optimality Condition of a Class of Generalized Invex Functions

WANG Cai-ling, LU Xiu-shuang
(*College of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*)

Abstract: We introduced new notion of generalized invex functions on Banach space and proved some result. Using these functions, we obtained the conditions of optimality with constraint conditions when the objective function is real-valued and vectorial functions. Moreover, necessity and sufficiency of optimality for vectorial problems were given.

Key words: weakly efficient solution; generalized invexity function; optimality conditions

0 引　言

设 E,F,G 是实的 Banach 空间, 考虑优化问题:

$$(\mathrm{P})\quad \begin{aligned} &\min \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\\ &\mathrm{s.t.}\ -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in K,\\ &\boldsymbol{x} \in S \subset E, \end{aligned}$$

其中 $K \subset G$; $\boldsymbol{f}$: $E \to F$; $\boldsymbol{g}$: $E \to G$. 设 $Q \subset F$, $K \subset G$ 分别是具有非空内部的闭凸锥. 记 $\Gamma = \{\boldsymbol{x} \in S,\ -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in K\}$ 为问题(P)的可行域.

在 F 上考虑如下偏序问题:

$$\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in F,\qquad \boldsymbol{y} \leq_F \boldsymbol{z} \Leftrightarrow \boldsymbol{z} - \boldsymbol{y} \in Q;$$
$$\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in F,\qquad \boldsymbol{y} <_F \boldsymbol{z} \Leftrightarrow \boldsymbol{z} - \boldsymbol{y} \in \operatorname{int} Q,$$

其中 $\operatorname{int} Q$ 表示 Q 的内部. 类似地, 对 G 也有相同结果.

定义 1　如果 $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq_F \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \Rightarrow \boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$, 则称 $\boldsymbol{x}_0 \in \Gamma$ 是问题(P)的有效解.

定义 2　如果不存在 $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, 使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) <_F \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$, 则称 $\boldsymbol{x}_0 \in \Gamma$ 是问题(P)的弱有效解.

文献[1-3]研究了当 $E = R^n$, $F = R^p$, $G = R^m$, $Q = R^p_+$, $K = R^m_+$ 时的问题(P); 文献[4]考虑无限维的

收稿日期: 2011-02-21.
作者简介: 王彩玲(1972—), 女, 汉族, 博士, 副教授, 从事最优化理论与算法的研究, E-mail: wangcl-jl@163.com.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11171350)和吉林省自然科学基金(批准号: 201115043).

情形, 在各种可微的假设下给出了问题(P)的一些结果; 文献[5-7]给出了不同最优性条件下问题(P)的相应结果. 本文首先给出预不变凸的概念, 并在该类广义不变凸的条件下给出了带有不等式约束向量优化问题的最优性充分必要条件, 从而推广了文献[1-9]的结果.

1　预不变凸函数

定义 3　设 E 是 Banach 空间, 如果对 $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S$, $\lambda \in (0,1)$, 存在向量函数 $\boldsymbol{\eta}$: $S \times S \to E$, 使得

$$\theta(\boldsymbol{x}_2 + \lambda \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)) \leqslant \lambda \theta(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda)\theta(\boldsymbol{x}_2),$$

则函数 θ: $\Omega \subset E \to R$ 在 $S \subset \Omega$ 上被称为关于 $\boldsymbol{\eta}$ 预不变凸的.

当 $S \subset E$ 时, 如果 $\boldsymbol{x}_2 + \lambda \eta(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in S$, $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S$, $\lambda \in (0,1)$, 则称 S 关于向量函数 $\boldsymbol{\eta}$ 是不变凸的. 设 $Q^* = \{\boldsymbol{w}^* \in F^* : \langle \boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{x} \rangle \geqslant 0, \forall \boldsymbol{x} \in Q\}$ 为 Q 的对偶锥, 则 F^* 称为 F 的拓扑对偶. 如果 $\langle \boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{x} \rangle = \boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{w}^* \in F^*$, $\forall \boldsymbol{x} \in F$, 则称 $\langle \cdot , \cdot \rangle$ 为 $F^* \times F$ 上的标准对偶. 在 Banach 空间将定义 3做如下推广:

定义 4　如果对每个 $\boldsymbol{w}^* \in Q^*$, 复合函数 $\boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}$ 关于 $\boldsymbol{\eta}$ 是(定义 3 意义下的) 预不变凸的, 则函数 $\boldsymbol{f}$: $\Omega \subset E \to F$ 在 $S \subset \Omega$ 上被称为关于 $\boldsymbol{\eta}$ 预不变凸的.

引理 1　设 F 是 Banach 空间, $Q \subset F$ 是闭凸锥, 如果存在 $\boldsymbol{y} \in F$, 使得 $\langle \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{y} \rangle \geqslant 0$, $\forall \boldsymbol{y}^* \in Q^*$, 则 $\boldsymbol{y} \in Q$.

引理 1 的逆成立.

引理 2　定义 4 等价于对 $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S$, $\lambda \in (0,1)$, 存在一个向量 $\boldsymbol{\eta}$: $S \times S \to E$, 使得

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2 + \lambda \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)) \leq_F \lambda \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2). \tag{1}$$

证明: 设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S$, $\lambda \in (0,1)$,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2 + \lambda \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)) \leq_F \lambda \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) \Leftrightarrow$$

$$\lambda \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2 + \lambda \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x})) \in Q(\text{由} \leq_F \text{的定义}) \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{w}^*(\lambda \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2 + \lambda \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2))) \geqslant 0(\forall \boldsymbol{w}^* \in Q^*, \text{由引理 1}) \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2 + \lambda \eta(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)) \leqslant \lambda \boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda)\boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)(\forall \boldsymbol{w}^* \in Q^*, \text{由} \boldsymbol{w}^* \text{线性}).$$

定义 5　设 $\boldsymbol{f}$: $\Omega \subset E \to F$, 如果极限 $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \dfrac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\lambda}$ 存在, 则称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点沿方向 $\boldsymbol{d}$ 是方向可微的, 记为 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{d})$.

引理 3　设 $\boldsymbol{f}$: $\Omega \subset E \to F$ 在 $S \subset \Omega$ 上是预不变凸函数且方向可微的, 则对 $\forall \boldsymbol{w}^* \in Q^*$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$, 有

$$(\boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x} + \eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \leqslant \boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

证明: 因为 $\boldsymbol{f}$ 在 $S \subset \Omega$ 上是预不变凸的, 由定义 4 对所有 $\forall \boldsymbol{w}^* \in Q^*$, 有 $\boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}$ 是预不变凸的. 则对 $\forall \lambda \in (0,1)$, 有

$$\boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \leqslant \boldsymbol{w}^*(\lambda \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - (1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) - \boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leqslant \lambda \boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})). \tag{3}$$

不等式(3)两边同时除以 λ, 当 $\lambda \to 0^+$ 时取极限, 有

$$(\boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \leqslant \boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

$\forall \boldsymbol{w}^* \in Q^*$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$.

引理 4　如果 $Q \subset F$ 是凸锥, $\operatorname{int} Q \neq \emptyset$, $0 \neq \boldsymbol{p} \in Q^*$, 当 $\boldsymbol{s} \in \operatorname{int} Q$, 则有 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{s}) > 0$.

下面给出预不变凸函数的 Gordan 型择一性定理.

定理 1　设 $\boldsymbol{f}$: $E \to F$ 在 $\Gamma \subset E$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 是预不变凸函数, Γ 关于 $\boldsymbol{\eta}$ 是不变凸集, $Q \subset F$ 是具有非空内部的凸锥, 则下列命题二择一:

(i) 存在 $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, 使得 $-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{int} Q$;

(ii) 存在 $\boldsymbol{p} \in Q^* \setminus \{0\}$, 使得 $(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{f})(\Gamma) \subset R_+$.

证明: 首先, 假设(i),(ii)都有解, 且 $\boldsymbol{p} \in Q^* \setminus \{0\}$, 由引理 4 知, $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) < 0$, $\boldsymbol{x} \in \Gamma$; 与(ii)矛

盾.

其次, 假设(ii)无解, 证明(i)有解. 设 $A := \boldsymbol{f}(\Gamma) + \mathrm{int}\, Q$.

先证 A 是开集: 设 $\boldsymbol{k} \in A$, 则存在 $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ 和 $\boldsymbol{s} \in \mathrm{int}\, Q$, 使得 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{s}$, 因为 $\boldsymbol{s} \in \mathrm{int}\, Q$, 所以存在以零为中心的球 N, 使得 $\boldsymbol{s} + N \subset Q$, 但 $\boldsymbol{k} + N = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{s} + N \subset A$, 因此 A 是开集.

再证 A 是凸集, 设 $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2 \in A$, $\tau \in (0,1)$, 使得

$$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{s}_1, \quad \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{s}_2, \quad \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Gamma, \quad \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \in \mathrm{int}\, S,$$

$$(1-\tau)\boldsymbol{k}_1 + \tau\boldsymbol{k}_2 = [(1-\tau)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) + \tau\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)] + [(1-\tau)\boldsymbol{s}_1 + \tau\boldsymbol{s}_2]. \tag{4}$$

因为 $\boldsymbol{f}$ 是预不变凸的, 则有

$$(1-\tau)\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + \tau\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2) \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2 + \tau\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)) + Q, \tag{5}$$

$$(1-\tau)\boldsymbol{s}_1 + \tau\boldsymbol{s}_2 \in \mathrm{int}\, Q. \tag{6}$$

由 Γ 是不变凸的, 则有

$$\boldsymbol{x}_2 + \tau\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in \Gamma. \tag{7}$$

由式(4)~(7), 有 $(1-\tau)\boldsymbol{k}_1 + \tau\boldsymbol{k}_2 \in A$, 即 A 是凸集.

假设(i)无解, 则 $0 \notin A$, 由 Hahn-Banach 定理知, 存在 $\boldsymbol{p} \in F^* \setminus \{0\}$, 使得

$$\boldsymbol{p}(A) \subset R_+. \tag{8}$$

固定 $\boldsymbol{s} \in \mathrm{int}\, Q$, 易证 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \geqslant 0$, $\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma$.

因为对于一些球 N 及 $\boldsymbol{s} \in \mathrm{int}\, Q$, 有

$$\boldsymbol{s} + N \subset \mathrm{int}\, Q. \tag{9}$$

故当 $\tau \in R_+$ 且充分大时, 有 $\dfrac{1}{\tau}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in N$, 由式(9)有 $\boldsymbol{s} - \dfrac{1}{\tau}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{int}\, Q$. 又由于 $\mathrm{int}\, Q$ 是锥, 因此有 $\tau\boldsymbol{s} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{int}\, Q$, 即 $\tau\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \mathrm{int}\, Q \subset A$, 由式(8)有

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{s}) \geqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{s} \in \mathrm{int}\, Q. \tag{10}$$

对于每个充分小的 $\varepsilon > 0$, 有 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\boldsymbol{s} \in A$, 因此

$$(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{k}) - \varepsilon\boldsymbol{p}(\boldsymbol{s}) \geqslant -\varepsilon\boldsymbol{p}(\boldsymbol{s}) \to 0.$$

当 $\varepsilon \to 0^+$ 时, 有

$$(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) \geqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma. \tag{11}$$

对每个 $\boldsymbol{s}_0 \in Q$, $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{s}_0) = \dfrac{1}{\tau}\boldsymbol{p}(\tau\boldsymbol{s}_0)$. 由于 $\tau > 0$, $\tau\boldsymbol{s}_0 \in \mathrm{int}\, Q$, 故由式(10)有 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{s}_0) \geqslant 0$, $\forall \boldsymbol{s}_0 \in \mathrm{int}\, Q$, 即

$$\boldsymbol{p} \in Q^* \setminus \{0\}, \tag{12}$$

又由式(11),(12)知, $\boldsymbol{p}$ 是(ii)的解.

2 最优性条件

设 E, G 是 Banach 空间, 考虑如下优化问题:

$$(\mathrm{PM}) \quad \begin{array}{l} \min\ \theta(\boldsymbol{x}), \\ \mathrm{s.t.}\ -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in K, \\ \boldsymbol{x} \in S \subset E, \end{array}$$

其中: $K \subset G$ 是具有非空内部的闭凸锥; θ: $E \to R$ 与 $\boldsymbol{x}$ 是方向可微的; $S \subset E$ 是非空开集.

定理2 设问题(PM)中的函数 θ 与 $\boldsymbol{g}$ 关于同一个 $\boldsymbol{\eta}$ 是预不变凸函数且方向可微的, 如果 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(PM)的解, 则存在 $\lambda^* \geqslant 0$, $\boldsymbol{\mu}^* \in K^*$(不同时为零)满足:

$$(\lambda^*\theta)'(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\eta}(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})) + (\boldsymbol{\mu}^* \circ \boldsymbol{g})'(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\eta}(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})) \geqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{y} \in S,$$

$$\langle \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}}) \rangle = 0.$$

证明: 由已知有可行集 $\Gamma := \{\boldsymbol{x} \in S: -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in K\}$ 关于 $\boldsymbol{\eta}$ 是不变凸的, 设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(PM)的解, 则不存在 $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, 使得 $-\begin{pmatrix} \theta(\boldsymbol{x}) - \theta(\bar{\boldsymbol{x}}) \\ g(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \in \mathrm{int}(R_+ \times K)$ 成立.

由定理 1 知，存在 $\boldsymbol{p}=(\tau,\boldsymbol{\nu}^*)\in(R_+\times K^*)\setminus\{0,0\}$，使得

$$\tau(\theta(\boldsymbol{x})-\theta(\bar{\boldsymbol{x}}))+\boldsymbol{\nu}^*\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\qquad\forall\boldsymbol{x}\in\Gamma,\tag{13}$$

从而有

$$\boldsymbol{\nu}^*\circ\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}})=0.\tag{14}$$

对每个充分小的 $\lambda>0$，由于 Γ 关于 $\boldsymbol{\eta}$ 是不变凸的，于是对 $\forall\boldsymbol{y}\in S$，有 $\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\boldsymbol{\eta}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})\in\Gamma$. 由式(13)，(14)有

$$\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\tau\theta(\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\boldsymbol{\eta}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}))-\tau\theta(\bar{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{\nu}^*\circ\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\boldsymbol{\eta}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}))-\boldsymbol{\nu}^*\circ\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}})}{\lambda}=$$

$$(\tau\theta)'(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\eta}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}))+(\boldsymbol{\nu}^*\circ\boldsymbol{g})'(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\eta}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y}))\geqslant 0.\tag{15}$$

在式(14)，(15)中令 $\boldsymbol{\tau}=\lambda^*$，$\boldsymbol{\nu}^*=\boldsymbol{\mu}^*$ 问题得证.

设 E,F 是 Banach 空间，考虑如下优化问题：

$$(\mathrm{P}_1)\quad\begin{array}{l}\min\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\\ \mathrm{s.t.}\ \boldsymbol{x}\in H,\end{array}$$

其中：$\boldsymbol{f}$：$E\to F$；$H\subset E$，$Q\subset F$ 是具有非空内部的闭凸锥.

定理 3 设问题(P_1)中的 $\boldsymbol{f}$ 在可行集 H 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 是预不变凸函数，可行集 H 关于 $\boldsymbol{\eta}$ 是不变凸的. 如果 $\boldsymbol{x}^*\in H$ 是问题(P_1)的弱有效解，则存在 $\boldsymbol{w}^*\in Q^*\setminus\{0\}$，使得

$$\boldsymbol{w}^*\circ\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\leqslant\boldsymbol{w}^*\circ\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\qquad\forall\boldsymbol{x}\in H.$$

证明：考虑如下集合：

$$U:=\{\boldsymbol{u}\in F:0\prec_F\boldsymbol{u}\};\qquad V:=\{\boldsymbol{\nu}\in F:\boldsymbol{\nu}\preceq_F\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \exists\boldsymbol{x}\in H\}.$$

因为 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题(P_1)的弱有效解，则有 $U\cap V=\varnothing$. 假设存在 $\boldsymbol{z}\in U\cap V$，则一定存在 $\boldsymbol{x}\in H$，使得 $0\prec_F\boldsymbol{z}\preceq_F\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. 但 $\boldsymbol{z}\in\mathrm{int}\ Q$，则存在一个以 0 点为中心的球 N，使得 $\boldsymbol{z}+N\subset Q$. 于是，有 $\boldsymbol{z}\preceq_F\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{z}+Q$，因此

$$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))+N\subset(\boldsymbol{z}+N)+Q\subset Q+Q\subset Q.$$

因为 Q 是凸锥，且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in\mathrm{int}\ Q$，则有

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\prec_F\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*),\qquad\boldsymbol{x}\in H,$$

这与 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题(P_1)的弱有效解矛盾，从而 $U\cap V=\varnothing$.

因为 $U=\mathrm{int}\ Q$，Q 是凸的，易得 U 是开凸集. 由于 $\boldsymbol{f}$ 是预不变凸的，集合 H 是不变凸，因此 V 是凸的. 设 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in V$，$\lambda\in(0,1)$，则存在 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in H$，使得

$$\boldsymbol{v}_1\preceq_F\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1),\qquad\boldsymbol{v}_2\preceq_F\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2),$$

易得

$$\lambda\boldsymbol{v}_1\preceq_F\lambda\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\lambda\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1),\qquad(1-\lambda)\boldsymbol{v}_2\preceq_F(1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-(1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2),$$

则有

$$\lambda\boldsymbol{v}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{v}_2\preceq_F\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-[\lambda\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)+(1-\lambda)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)]\preceq_F$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2+\lambda\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2))(\boldsymbol{f}\text{ 是预不变凸的}).$$

由于 H 关于 $\boldsymbol{\eta}$ 是不变凸集，则有 $\boldsymbol{x}_2+\lambda\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\in H$，因此 V 是凸集. 由 Hahn-Banach 定理知，存在 $\boldsymbol{w}^*\in F^*\setminus\{0\}$，使得

$$\langle\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{v}\rangle\leqslant0\leqslant\langle\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{u}\rangle,\quad\forall\boldsymbol{u}\in U,\quad\forall\boldsymbol{v}\in V.$$

又由第二个不等式有 $\langle\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{u}\rangle\geqslant0$，$\forall\boldsymbol{u}\in\mathrm{int}\ Q$. 由 Q 是内部非空的凸集，可证 $\mathrm{int}\ Q=Q$[8]，从而有 $\boldsymbol{w}^*\in Q^*$. 对于每个 $\boldsymbol{x}\in H$，有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in V$，且

$$\langle\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\rangle\leqslant0,\qquad\forall\boldsymbol{x}\in H.$$

下面给出问题(P)的最优性条件：

定理 4 设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$，$\boldsymbol{f}$：$\Omega\subset E\to F$ 在 $S\subset\Omega$ 上关于 $\boldsymbol{\eta}$ 是预不变凸函数且方向可微的，则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 弱有效解的充要条件是

$$(\boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f})'(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\eta}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})) \geqslant 0, \tag{16}$$

$\forall \boldsymbol{w}^* \in Q^*$, $\forall \boldsymbol{y} \in S$, 这里 S 是开集.

证明: 必要性. 反证法. 假设式(16)不成立, 则必存在 $\boldsymbol{y} \in S$, $\boldsymbol{w}^* \in Q^*$, 使得

$$(\boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f})'(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\eta}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})) < 0. \tag{17}$$

由于 S 是开集, $\bar{\boldsymbol{x}} \in S$, 故当 $\lambda \to 0^+$, 有 $\bar{\boldsymbol{x}} + \lambda\boldsymbol{\eta}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})) \in S$. 由式(17)得

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}} + \lambda\boldsymbol{\eta}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})) - \boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})}{\lambda} < 0,$$

从而有

$$\boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}} + \lambda\boldsymbol{\eta}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})) - \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})) < 0.$$

又因为 $\boldsymbol{w}^* \in Q^*$, $\boldsymbol{w}^* \neq 0$, 则有 $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}} + \lambda\boldsymbol{\eta}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})) \prec_F \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})$, 这与 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是弱有效解矛盾.

充分性. 反证法. 假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是弱有效解, 则存在 $\boldsymbol{y} \in S$, 使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \prec_F \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})$. 设 $\boldsymbol{w}^* \in Q^* \setminus \{0\}$ ($Q^* \neq \{0\}$[9]), 则有

$$\boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) < 0, \tag{18}$$

从而

$$0 \leqslant (\boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f})'(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\eta}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{y})) \leqslant \boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{w}^* \circ \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) < 0.$$

因此 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是弱有效解.

参 考 文 献

[1] Clarke F H. Optimization and Nonsmooth Analysis [M]. New York: Wiley, 1983.

[2] Craven B D. Nonsmooth Multiobjective Programming [J]. Number Functional Analysis and Optimization, 1989, 10(1/2): 49-64.

[3] Mishra S K, Mukherjee R N. On Generalized Convex Multiobjective Nonsmooth Programming [J]. Journal of the Australian Mathematical Society: Ser B, 1996, 38: 140-148.

[4] Abdouni B, EI, Thibault L. Lagrange Multipliers for Pareto Nonsmooth Programming Problems in Banach Spaces [J]. Optimization, 1992, 26(3/4): 277-285.

[5] Durea M, Dutta J, Tammer C. Lagrange Multipliers for ε-Pareto Solution in Vector Optimization with Nonsolid Cones in Banach Spaces [J]. Journal of Optim Theory Appl, 2010, 145(1): 196-211.

[6] Niculescu C. Optimality and Duality in Multiobjective Fractional Programming Involving ρ-Semilocally Type I-Preinvex and Related Functions [J]. Math Anal Appl, 2007, 335(1): 7-19.

[7] WANG Cai-ling, SUN Wen-juan, YANG Rong, et al. Optimality Conditions of Nonsmooth Composite Generalized Invex Multiobjective Programming [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2008, 46(5): 877-879. (王彩玲, 孙文娟, 杨荣, 等. 非光滑复合广义凸多目标规划的最优性条件 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2008, 46(5): 877-879.)

[8] Dunfort N, Schwarz J T. Linear Operators Part Ⅰ: General Theory [M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1957.

[9] Girsanov I V. Lectures on Mathematical Theory of Extremu Problems: Lecture Notes in Economics and Mathematical System [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1972.

(责任编辑: 赵立芹)