第 50 卷 第 1 期 吉林大学学报(理学版) Vol. 50 No. 1
2012 年 1 月 Journal of Jilin University (Science Edition) Jan 2012

k-广义 Hermite 矩阵及其在矩阵方程中的应用

袁晖坪, 王行荣
(重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067)

摘要: 给出了 k-广义 Hermite 矩阵的概念, 并给出了它的性质及其与酉矩阵、Hermite 矩阵、Hamilton 矩阵和广义逆矩阵之间的关系及其在解矩阵方程中的应用, 取得了一些新结果, 推广了酉矩阵、Hermite 矩阵及广义次对称矩阵的相应结果, 特别地将正交阵的广义 Cayley 分解推广到了 k-广义酉矩阵和 k-广义 Hermite 矩阵上, 从而统一了各类 Hermite 矩阵及广义逆矩阵.

关键词: k-广义 Hermite 矩阵; 酉矩阵; 广义逆矩阵; 辛矩阵; 矩阵方程
中图分类号: O151.21 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2012)01-0059-04

k-Generalized Hermite Matrices and Their Application in Matrix Equation

YUAN Hui-ping, WANG Xing-rong
(*College of Mathematics and Statistics*, *Chongqing Technology and Business University*, *Chongqing* 400067, *China*)

Abstract: The concept of k-generalized Hermite matrix was given, and its properties and relations to unitary matrix, Hermite matrix, Hamilton matrix and generalized inverse matrix, and its matrix equation of application were discussed, with many new results obtained. The corresponding results of unitary matrix, Hermite matrix and generalized symmetric matrix, especially the Cayley decomposition of orthogonal matrix to k-generalized unitary matrix and k-generalized Hermite matrix were extended, unifying various kinds of Hermite matrix and generalized inverse matrix.

Key words: k-generalized Hermite matrix; unitary matrix; generalized inverse matrix; symplectic matrix; matrix equation

Hermite 矩阵的研究已取得了丰富的成果, 在优化理论、计算数学、信号分析、Hamilton 力学、线性系统论、经济数学、组合矩阵、辛几何、控制论、物理学、统计、工程技术等领域应用广泛. 目前 Hermite 矩阵已有多种推广形式[1-8]. 一般研究矩阵都从主对角线方向考虑问题(如对角化、正定性等); 至于次对角线方向的情形常被忽略, 但事实上, 次对角线方向的矩阵理论(如次正定性、次对称性与次正交性[1,8-9]等)也十分重要. 本文根据结构模型修正、机械振动设计和自动控制等需要, 兼顾矩阵的主对角线与次对角线方向的研究, 提出了 k-广义 Hermite 矩阵的概念, 并研究了它的性质及其与(次)酉矩阵、(次、斜) Hermite 矩阵、Hamilton 矩阵及广义逆矩阵之间的关系, 推广了 Hill 等[1]的(斜)广义次对称矩阵及(次)酉矩阵和(次、斜) Hermite 矩阵的相应结果. 特别地, 将正交阵的广义 Cayley 分解推广到了广义酉矩阵及 k-广义 Hermite 矩阵上, 并研究了 k-广义 Hermite 矩阵在解矩阵方程中的应用. 为简便, 用 $\boldsymbol{J}_n=\boldsymbol{J}$ 表示次对角线上元素全为 1、其余元素全为 0 的 n 阶方阵; $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_n$ 表示 n 阶

收稿日期: 2011-03-01.
作者简介: 袁晖坪(1958—), 男, 汉族, 教授, 从事矩阵理论的研究, E-mail: yhp@ctbu.edu.cn.
基金项目: 重庆市自然科学基金(批准号: CSTS2005BB0243)和重庆市教委科技项目基金(批准号: KJ0707023).

单位阵；$\boldsymbol{A}^*$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置阵；$C^{m\times n}$表示 $m\times n$ 复矩阵集；C_n^n 表示 n 阶复可逆矩阵集.

定义 1[8] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in C^{m\times n}$，则称 $n\times m$ 矩阵(b_{ij})(其中 $b_{ij}=a_{m-j+1,n-i+1}$)为 $\boldsymbol{A}$ 的次转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^S=(b_{ij})$；称 $\boldsymbol{A}^{(*)}=\overline{\boldsymbol{A}}^S$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭次转置矩阵；若$(\boldsymbol{A}^{(*)}=-\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{(*)}=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为(反)次 Hermite 矩阵.

由定义 1 及文献[8]易知：

1) 设 $\boldsymbol{A}\in C^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{A}^{(*)}\boldsymbol{J}_m=\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{J}_m=\boldsymbol{A}^{(*)}$；

2) $(\boldsymbol{A}^{(*)})^{(*)}=\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{(*)}=\boldsymbol{A}^{(*)}+\boldsymbol{B}^{(*)}$，$(\boldsymbol{AB})^{(*)}=\boldsymbol{B}^{(*)}\boldsymbol{A}^{(*)}$，$(\overline{\boldsymbol{A}})^{(*)}=\boldsymbol{A}^S$，$(c\boldsymbol{A})^{(*)}=\bar{c}\boldsymbol{A}^{(*)}$($c$ 为复数)；

3) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{(*)}=(\boldsymbol{A}^{(*)})^{-1}$，$|\boldsymbol{A}^{(*)}|=|\overline{\boldsymbol{A}}|$，$\boldsymbol{J}^{(*)}=\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{I}^{(*)}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{J}^{-1}=\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{J}^2=\boldsymbol{I}$.

1 *k*-广义 Hermite 矩阵

定义 2 设 $\boldsymbol{A}\in C^{n\times n}$，若 $\exists\boldsymbol{P}\in C_n^n$ 及 $k\in C$，使得 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=k\boldsymbol{PA}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶 k-$\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵，简称 k-广义 Hermite 矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in H_{\boldsymbol{P}}^k=\{\boldsymbol{A}\in C^{n\times n}\mid\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=k\boldsymbol{PA}\}$.

显然：当 $k=0$ 时，$H_{\boldsymbol{P}}^0=\{\boldsymbol{O}\}$ 为 n 阶零矩阵集；当 $k=1$ 时，$H_{\boldsymbol{P}}^1=\{\boldsymbol{A}\in C^{n\times n}\mid\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{PA}\}$ 为 n 阶 $\boldsymbol{P}$-广义Hermite 矩阵集[8]；当 $k=-1$ 时，$H_{\boldsymbol{P}}^{-1}=\{\boldsymbol{A}\in C^{n\times n}\mid\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{PA}\}$ 为 n 阶 $\boldsymbol{P}$-广义斜 Hermite 矩阵集[8]；当 $k=1$，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$ 时，$H_{\boldsymbol{I}}^1=\{\boldsymbol{A}\in C^{n\times n}\mid\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}\}$ 为 n 阶 Hermite 矩阵集；当 $k=-1$，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$ 时，$H_{\boldsymbol{I}}^{-1}=\{\boldsymbol{A}\in C^{n\times n}\mid\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}\}$ 为 n 阶斜 Hermite 矩阵集；当 $k=1$，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$ 时，$H_{\boldsymbol{J}}^1=\{\boldsymbol{A}\in C^{n\times n}\mid\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{J}=\boldsymbol{JA}$，即 $\boldsymbol{A}^{(*)}=\boldsymbol{A}\}$ 为 n 阶次 Hermite 矩阵集[8]；当 $k=-1$，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$ 时，$H_{\boldsymbol{J}}^{-1}=\{\boldsymbol{A}\in C^{n\times n}\mid\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{J}=-\boldsymbol{JA}$，即 $\boldsymbol{A}^{(*)}=-\boldsymbol{A}\}$ 为 n 阶反次 Hermite 矩阵集[8]；当 $k=1$，$\boldsymbol{P}^*=\boldsymbol{K}$(置换矩阵)时，$H_{\boldsymbol{P}}^1=\{\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}=\boldsymbol{KA}\}$ 为 n 阶广义次对称矩阵集[1]；当 $k=-1$，$\boldsymbol{P}^*=\boldsymbol{K}$(置换矩阵)时，$H_{\boldsymbol{K}}^{-1}=\{\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{KA}\}$ 为 n 阶斜广义次对称矩阵集[1]；当 $k=1$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{I}_m\\-\boldsymbol{I}_m&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{K}$ 时，$H_{\boldsymbol{K}}^1=\{\boldsymbol{A}\in C^{2m\times 2m}\mid\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{K}=\boldsymbol{KA}\}$ 为 $2m$ 阶 k-斜Hermite矩阵集[8]；当 $k=-1$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{I}_m\\-\boldsymbol{I}_m&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{K}$ 时，$H_{\boldsymbol{K}}^{-1}=\{\boldsymbol{A}\in C^{2m\times 2m}\mid\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{KA}\}$ 为 $2m$ 阶 Hamilton 矩阵集[3]；当 $k=1$，$\boldsymbol{P}^*=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^*=-\boldsymbol{P})$时，$H_{\boldsymbol{P}}^1(H_{\boldsymbol{P}}^{-1})$即为 $\boldsymbol{P}$ 的广义$\{3\}$-逆矩阵集.

定理 1 设 $\boldsymbol{P}\in C_n^n$，$\boldsymbol{A}\in H_{\boldsymbol{P}}^k$，$\alpha$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则 $\bar{\lambda}=\lambda k$ 或 $\alpha^*\boldsymbol{P}\alpha=0$.

证明：因为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=k\boldsymbol{PA}$，$\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$，后式两边取共轭得：$\alpha^*\boldsymbol{A}^*=\bar{\lambda}\alpha^*$，于是

$$\bar{\lambda}\alpha^*\boldsymbol{P}\alpha=\alpha^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}\alpha=\alpha^*k\boldsymbol{PA}\alpha=\lambda k\alpha^*\boldsymbol{P}\alpha,$$

即$(\bar{\lambda}-\lambda k)\alpha^*\boldsymbol{P}\alpha=0$，故 $\bar{\lambda}=\lambda k$ 或 $\alpha^*\boldsymbol{P}\alpha=0$.

在定理 1 中，取 $k=1$，可得：

推论 1 设 $\boldsymbol{P}\in C_n^n$，$\boldsymbol{A}\in H_{\boldsymbol{P}}^1$，$\alpha$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则 λ 为实数或 $\alpha^*\boldsymbol{P}\alpha=0$.

在定理 1 中，取 $k=-1$，可得：

推论 2 设 $\boldsymbol{P}\in C_n^n$，$\boldsymbol{A}\in H_{\boldsymbol{P}}^{-1}$，$\alpha$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则 λ 为零或纯虚数或 $\alpha^*\boldsymbol{P}\alpha=0$.

推论 3 若 $\boldsymbol{P}\in C_n^n$，$\boldsymbol{A}\in H_{\boldsymbol{P}}^{-1}$，则 $\forall c\in R$，$c\neq 0$，有 $c\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 均可逆；特别地，$\boldsymbol{I}\pm\boldsymbol{A}$ 均可逆.

证明：由推论 2 知，非零实数 c 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，故$|c\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\neq 0$，因而 $c\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆.

在定理 1 中，取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$，$k=1$，可得 Hermite 矩阵的重要性质：

推论 4 Hermite 矩阵的特征值均为实数.

在定理 1 中，取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$，$k=-1$，可得反 Hermite 矩阵的重要性质：

推论 5 反 Hermite 矩阵的特征值均为零或纯虚数.

定理 2 设 $\boldsymbol{P}\in C_n^n$，$\boldsymbol{A}\in H_{\boldsymbol{P}}^k$，$\alpha$ 与 β 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 与 μ 的特征向量，若 $\bar{\lambda}\neq k\mu$，则 $\alpha^*\boldsymbol{P}\beta=0$.

证明：因为 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$，两边取共轭次转置得 $\alpha^*\boldsymbol{A}^*=\bar{\lambda}\alpha^*$，又因为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=k\boldsymbol{PA}$，$\boldsymbol{A}\beta=\mu\beta$，故

$$k\mu\alpha^{*}\boldsymbol{P}\beta = k\alpha^{*}\boldsymbol{PA}\beta = \alpha^{*}(\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P})\beta = \bar{\lambda}\alpha^{*}\boldsymbol{P}\beta,$$

即$(\bar{\lambda}-k\mu)\alpha^{*}\boldsymbol{P}\beta=0$，而$\bar{\lambda}\neq k\mu$，故$\alpha^{*}\boldsymbol{P}\beta=0$.

在定理 2 中，取$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$，$\alpha^{*}\boldsymbol{I}\beta=\alpha^{*}\beta$，则由推论 4 与推论 5 有：

推论 6　1）Hermite 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量 α,β 满足 $\alpha^{*}\beta=0$；

2）反 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于两特征值 $\lambda,\mu(\bar{\lambda}\neq-\mu)$ 的特征向量 α,β 满足 $\alpha^{*}\beta=0$.

定理 1 与定理 2 显然拓广了 Hermite 矩阵与反 Hermite 矩阵的相关结果.

定理 3　设 $\boldsymbol{P}\in C_n^n$，$k\in C$，$k\neq0$，$\boldsymbol{A}\in C^{n\times n}$，若下列 3 个条件中的任意 2 个成立，则第三个必成立：

1）$\boldsymbol{A}$ 为 k-$\boldsymbol{P}$-广义酉矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{PA}=k\boldsymbol{P}$，记为 $\boldsymbol{A}\in U_{\boldsymbol{P}}^{k}$；2）$\boldsymbol{A}\in H_{\boldsymbol{P}}^{-k}$；3）$\boldsymbol{A}^2=-\boldsymbol{I}$.

证明：若 1)，2)成立，则

$$\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{PA} = k\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P} = -k\boldsymbol{PA},\quad k\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{P}^{-1}k\boldsymbol{PA} = -k\boldsymbol{A},$$

故$\boldsymbol{A}^2=-\boldsymbol{I}$，即 3)成立. 若 1)，3)成立，则 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{PA}=k\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{A}^2=-\boldsymbol{I}$，于是 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}=k\boldsymbol{PA}^{-1}=-k\boldsymbol{PA}$，故 $\boldsymbol{A}\in H_{\boldsymbol{P}}^{-k}$，即 2)成立. 若 2)，3)成立，则 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}=-k\boldsymbol{PA}$，$\boldsymbol{A}^2=-\boldsymbol{I}$，于是 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{PA}=-k\boldsymbol{PA}^2=k\boldsymbol{PI}=k\boldsymbol{P}$，故 1)成立.

定理 4　设 $\boldsymbol{P}\in C_n^n$，实数 $k\neq0$，$\boldsymbol{B}\in U_{\boldsymbol{P}}^{k^2}$，$k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\exists\boldsymbol{A}\in H_{\boldsymbol{P}}^{-1}$，使得 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{B}$ 可分解为

$$\boldsymbol{B} = k(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1} = k(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}).$$

证明：由条件可令

$$\boldsymbol{A} = (k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1} = (k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}(k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}). \tag{1}$$

又因为$2k\boldsymbol{I}-(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，两边右乘$(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}$得

$$2k(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}-\boldsymbol{I} = (k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A},$$

于是$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}=2k(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}$可逆，且 $k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}=2k(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$，从而

$$\boldsymbol{B} = 2k(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}-k\boldsymbol{I} = 2k(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}-k(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1} = k(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1};$$

再由式(1)得$(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，两边取共轭转置得 $\boldsymbol{A}^{*}(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}^{*})=k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^{*}$，两边右乘 $\boldsymbol{PB}$，并利用 $\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{PB}=k^2\boldsymbol{P}$ 得 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})$，两边右乘$(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}$得

$$\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})(k\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1} = -\boldsymbol{PA},$$

所以 $\boldsymbol{A}\in H_{\boldsymbol{P}}^{-1}$使 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}=k(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$.

定理 5　设 $\boldsymbol{P}\in C_n^n$，$\boldsymbol{A}\in U_{\boldsymbol{P}}^{1}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}\in H_{\boldsymbol{P}}^{-k}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}\in H_{\boldsymbol{P}}^{-k}$.

证明：因为 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{P}$，所以

$$\boldsymbol{A}^{*} = \boldsymbol{PA}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1},\qquad (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA})^{*} = \boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}^{*}(\boldsymbol{A}^{*})^{-1} = \boldsymbol{PA}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{PAP}^{-1},$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}\in H_{\boldsymbol{P}}^{-k}\Leftrightarrow(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA})^{*}\boldsymbol{P} = -k\boldsymbol{PA}^{-1}\boldsymbol{BA}\Leftrightarrow(\boldsymbol{PA}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{PAP}^{-1})\boldsymbol{P} =$$
$$-k\boldsymbol{PA}^{-1}\boldsymbol{BA}\Leftrightarrow\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{P} = -k\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{P} = -k\boldsymbol{PB}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}\in H_{\boldsymbol{P}}^{-k}.$$

定理 6　设 $\boldsymbol{P}\in C_n^n$，$\boldsymbol{A}\in H_{\boldsymbol{P}}^{k}$，$\boldsymbol{B}\in H_{\boldsymbol{P}}^{-k}$，$c\in R$，$c\neq0$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则：

1）若 $c\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，则$(c\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(c\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\in U_{\boldsymbol{P}}^{1}$；2）若 $c\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆，则$(c\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(c\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\in U_{\boldsymbol{P}}^{1}$.

证明：1）因为 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}=k\boldsymbol{PA}$，$\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{P}=-k\boldsymbol{PB}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，故

$$(c\boldsymbol{A}^{*}-\boldsymbol{B}^{*})\boldsymbol{P} = k\boldsymbol{P}(c\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),\qquad k\boldsymbol{P}(c\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = (c\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{B}^{*})\boldsymbol{P},$$

$$(c\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(c\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = (c\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(c\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}),$$

$$\begin{aligned}
&[(c\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(c\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}]^{*}\boldsymbol{P}[(c\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(c\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}] = \\
&\quad(c\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{B}^{*})^{-1}(c\boldsymbol{A}^{*}-\boldsymbol{B}^{*})\boldsymbol{P}(c\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(c\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} = \\
&\quad(c\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{B}^{*})^{-1}k\boldsymbol{P}(c\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(c\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(c\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} = \\
&\quad(c\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{B}^{*})^{-1}k\boldsymbol{P}(c\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(c\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(c\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} = \\
&\quad(c\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{B}^{*})^{-1}(c\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{B}^{*})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P},
\end{aligned}$$

从而

$$(c\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(c\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\in U_{\boldsymbol{P}}^{1}.$$

同理可证2).

推论7 设 $\boldsymbol{P}\in C_n^n$, $\boldsymbol{B}\in H_{\boldsymbol{P}}^{-1}$, $c\in R$, $c\neq 0$, 则$(c\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})(c\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}$, $(c\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})(c\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\in U_{\boldsymbol{P}}^{1}$.

证明: 由条件及推论3知 $c\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$,$c\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 均可逆, 又因为 $\boldsymbol{I}\in H_{\boldsymbol{P}}^{1}$, 故由定理6知结论成立.

定理3~定理6拓广了酉矩阵、Hermite矩阵、斜Hermite矩阵及Hill等[1]的(斜)广义次对称矩阵间的相关结果. 特别地, 定理4将正交矩阵的广义Cayley分解推广到了k-广义酉矩阵及k-广义Hermite矩阵上.

2 *k*-广义Hermite矩阵在解矩阵方程中的应用

引理1[10] 设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为任意矩阵, 且使 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 均为可逆矩阵, 则

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1},\qquad \boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$$

为矩阵方程 $\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{A}$ 的解.

定理7 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{P}\in C_n^n$, $\boldsymbol{A}\in H_{\boldsymbol{P}}^{k}$, $\boldsymbol{B}\in H_{\boldsymbol{P}}^{-k}$, 且使 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 均可逆, 则

$$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}),\qquad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Y}^{*}\boldsymbol{P}$$

为矩阵方程 $\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{A}$ 的解.

证明: 因为 $\boldsymbol{A}\in H_{\boldsymbol{P}}^{k}$, $\boldsymbol{B}\in H_{\boldsymbol{P}}^{-k}$, 所以 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}=k\boldsymbol{PA}$, $\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{P}=-k\boldsymbol{PB}$, 即 $\boldsymbol{A}^{*}=k\boldsymbol{PAP}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^{*}=-k\boldsymbol{PBP}^{-1}$, 因而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Y}^{*}\boldsymbol{P}&=\boldsymbol{P}^{-1}[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})]^{*}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}[(\boldsymbol{A}^{*}-\boldsymbol{B}^{*})(\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{B}^{*})^{-1}]\boldsymbol{P}=\\&\boldsymbol{P}^{-1}[(k\boldsymbol{PAP}^{-1}+k\boldsymbol{PBP}^{-1})(k\boldsymbol{PAP}^{-1}-k\boldsymbol{PBP}^{-1})^{-1}]\boldsymbol{P}=\\&kk^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}.\end{aligned}$$

于是由引理1知, 定理7成立.

参考文献

[1] Hill R D, Waters S R. On k-Real and k-Hermitian Matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 1992, 169: 17-29.

[2] Pressman S. Matrices with Multiple Symmetry Properties: Applications of Centrohermitian and Perhermitian Matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 1998, 284: 239-258.

[3] WAN Zhe-xian. Geometry of Hamilton Matrices and Its Applications Ⅱ [J]. Algebra Colloquium, 1996, 3(2): 107-116.

[4] DAI Hua. On the Symmetric Solutions of Linear Matrix Equations [J]. Linear Algebra and Its Applications, 1990, 131: 1-7.

[5] XU Gui-ping, WEI Mu-sheng, ZHENG Dao-sheng. On Solutions of Matrix Equation $\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{CYD}=\boldsymbol{F}$ [J]. Linear Algebra and Its Applications, 1998, 279: 93-109.

[6] Jameson A, Kxeindler E, Laneaster P. Symmetric, Positive Semidefinite, and Positive Real Solutions of $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}^{\mathrm{T}}$ and $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{YB}$ [J]. Linear Algebra and Its Applications, 1992, 160: 189-215.

[7] LI Fan-liang, HU Xi-yan, ZHANG Lei. Left and Right Inverse Eigenpairs Problem for k-Persymmetric Matrices [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2007, 29(4): 337-344. (李范良, 胡锡炎, 张磊. 广义次对称矩阵的左右逆特征对问题[J]. 计算数学, 2007, 29(4): 337-344.)

[8] YUAN Hui-ping. Generalized Unitary Matrices and Generalized Hermite Matrices [J]. Journal of Mathematics, 2003, 23(3): 375-380. (袁晖坪. 广义酉矩阵与广义Hermite阵[J]. 数学杂志, 2003, 23(3): 375-380.)

[9] YUAN Hui-ping. Determinantal Inequality of Generalized Positive Subefinite Matrices [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2004, 42(3): 346-350. (袁晖坪. 广义次正定矩阵的行列式不等式[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2004, 42(3): 346-350.)

[10] YANG Chang-lan, WANG Long-bo. Hermite Matrix Equation [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2004, 24(3): 500-502. (杨昌兰, 王龙波. Hermite矩阵方程[J]. 数学研究与评论, 2004, 24(3): 500-502.)

(责任编辑: 赵立芹)