第49卷 第4期 吉林大学学报(理学版) Vol.49 No.4
2011年7月 Journal of Jilin University (Science Edition) July 2011

研究简报

均匀经验过程几乎处处中心极限定理的一个注记

张 勇
(吉林大学 数学学院, 长春 130012)

摘要: 设$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$为来自$[0,1]$上服从均匀分布的独立同分布样本, 产生的经验过程为$F_n(t)=n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(I\{\xi_i\leqslant t\}-t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$; $\|\cdot\|$表示一致模, 即$\|F_n\|=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|F_n(t)|$; U为$D[0,1]$上的Brown桥, $\|U\|=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|U(t)|$. 利用概率强收敛工具, 得到了关于$\|F_n\|$及$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}F_n(t)$的形如$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}I\{\|F_k\|\leqslant x\}=P\{\|U\|\leqslant x\}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2x^2}$ a.s. 的几乎处处中心极限定理.

关键词: 均匀经验过程; 几乎处处中心极限定理; Brown桥
中图分类号: O211.4 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)04-0687-03

A Note on Almost Sure Central Limit Theorem for Uniform Empirical Processes

ZHANG Yong
(*College of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*)

Abstract: Let $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ be a sequence of independent and identically distributed $U[0,1]$-distributed random variables. The uniform empirical process generated by them is defined as

$$F_n(t)=n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(I\{\xi_i\leqslant t\}-t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1;\quad \|F_n\|=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|F_n(t)|.$$

Let U be the Brownian bridge of $D[0,1]$ and $\|U\|=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|U(t)|$. With the strong convergence of probability, we obtained the following almost sure central limit theorem for $\|F_n\|$ and $\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}F_n(t)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}I\{\|F_k\|\leqslant x\}=P\{\|U\|\leqslant x\}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2x^2}\quad \text{a.s.}$$

Key words: uniform empirical process; almost sure central limit theorem; Brownian bridge

几乎处处中心极限定理(ASCLT)最早分别由Brosamler[1]和Schatte[2]独立提出并研究的. 而对于i.i.d.随机变量列有下述几乎处处中心极限定理: 设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是独立同分布随机变量序列, $EX_1=0$, $EX_1^2=1$, $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$. 则$\forall x$, 有$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}I\{S_k/\sqrt{k}\leqslant x\}=\Phi(x)$ a.s. 本文$I\{\cdot\}$表示示性函数, $\Phi(\cdot)$表示标准正态分布的分布函数. ASCLT问题在随机模拟方面应用广泛[3]. 目前, ASCLT问题已取得许多研究结果: Lacey等[4]针对i.i.d.随机变量列, 在二阶矩$EX_1^2<\infty$的条件下, 证明了ASCLT成立; Peligrad等[5]针对平稳α-混合随机变量列、平稳ρ-混合随机变量列以及平稳PA随机变量列, 在$EX_1^2<\infty$的条件下, 证明了ASCLT成立; 董志山等[6]针对平稳NA和LNQD随机变量列, 在$EX_1^2<\infty$的

收稿日期: 2010-10-08.
作者简介: 张 勇(1980—), 男, 汉族, 博士, 讲师, 从事概率极限理论的研究, E-mail: zyong2661@jlu.edu.cn.
基金项目: 吉林大学基本科研业务费项目(批准号: 201001002)和吉林大学数学学院(所)青年基金.

条件下，证明了 ASCLT 和 FASCLT 成立；文献[7-10]在不同的条件下分别得到了几乎处处中心极限定理.

本文恒假设$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$为来自$[0,1]$上服从均匀分布的独立同分布样本，产生的经验过程为$F_n(t)=n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(I\{\xi_i\leqslant t\}-t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$；$\|\cdot\|$表示一致模，即$\|F_n\|=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|F_n(t)|$；$U$为$D[0,1]$上的 Brown 桥，$\|U\|=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|U(t)|$.

Dehling 等[11]对相依数据下的经验过程给出了一种新的处理方法；Drees 等[12]得到了由族函数生成经验过程的极限定理；王芳[13]得到了关于$F_n(t)$的几乎处处中心极限定理. 本文将文献[13]的结果推广到由随机样本$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$产生的经验过程，即关于$\|F_n\|$和$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}F_n(t)$的几乎处处中心极限定理.

引理1 由$[0,1]$上服从均匀分布、独立同分布的样本$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$产生的经验过程$F_n(t)$弱收敛于$D[0,1]$上的 Brown 桥$U$，即$F_n(t)\Rightarrow U$.

证明：参见文献[14]中的定理2.

引理2 设$\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$为来自分布函数$F$的独立同分布样本，记$D_n=\sup_x\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I\{\xi_i\leqslant x\}-F(x)\right|$，则存在正常数$C$，使得对所有的$n$及所有的$F$和正数$r$，有
$$P\{D_n\geqslant r/n^{1/2}\}\leqslant C\mathrm{e}^{-Cr^2}.$$
证明：参见文献[15]中的定理1.

引理3 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$为一零均值一致有界的随机变量序列，再假设$|E\xi_k\xi_l|\leqslant C(k/l)^{\varepsilon}$对于任意的$1\leqslant k<l\leqslant n$和某个$\varepsilon>0$成立，则有$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\xi_k=0$ a.s.

证明：参见文献[7]中的引理2.

下面给出本文的主要结果.

定理1 对于$\forall x>0$，有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}I\{\|F_k\|\leqslant x\}=P\{\|U\|\leqslant x\}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\mathrm{e}^{-2k^2x^2}\ \text{a.s.}\tag{1}$$
证明：由引理1知，$\{F_n(t),n\geqslant 1\}$弱收敛于$D[0,1]$上的 Brown 桥U，于是由连续映射定理[16]知
$$\|F_n\|\xrightarrow{d}\|U\|,\qquad n\to\infty.\tag{2}$$
设$f(x)$是一有界的 Lipschitz 函数，并且其 Radon-Nikodyn 导数为$f'(x)$，满足$|f'(x)|\leqslant\Gamma$. 则由式(2)知
$$Ef(\|F_n\|)\to Ef(\|U\|),\qquad n\to\infty.\tag{3}$$
另一方面，由文献[5]中第二节及文献[16]中定理7.1知，式(1)等价于
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}f(\|F_k\|)=Ef(\|U\|)\ \text{a.s.}\tag{4}$$
因此要证明式(1)，只需证明下式即可：
$$T_n=\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}[f(\|F_k\|)-Ef(\|F_k\|)]\to 0\ \text{a.s.},\qquad n\to\infty.\tag{5}$$
令
$$F_{k,l}(t)=\frac{1}{l^{1/2}}\sum_{i=k+1}^{l}(I\{\xi_i\leqslant t\}-t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$Z_k=f(\|F_k\|),\quad Z_{k,l}=f(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|F_{k,l}(t)|),\qquad 1\leqslant k<l\leqslant n.$$
则对于任意的$1\leqslant k<l\leqslant n$，有
$$\mathrm{Cov}(Z_k,Z_l)=\mathrm{Cov}(Z_k,Z_{k,l})+\mathrm{Cov}(Z_k,Z_l-Z_{k,l})=:I_1+I_2.\tag{6}$$
由样本的独立性知，

$$I_1 = 0. \tag{7}$$

利用f的 Lipschitz 性和有界性及引理 2，有

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant CE\,|Z_l - Z_{k,l}| \leqslant CE\,\Big|\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|F_l(t)| - \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|F_{k,l}(t)|\Big| \leqslant \\ &CE\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\big||F_l(t)| - |F_{k,l}(t)|\big| \leqslant CE\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|F_l(t) - F_{k,l}(t)| = \\ &CE\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\frac{1}{l^{1/2}}\Big|\sum_{i=1}^{k}(I\{\xi_i\leqslant t\} - t)\Big| = C\frac{k^{1/2}}{l^{1/2}}E\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\frac{1}{k^{1/2}}\Big|\sum_{i=1}^{k}(I\{\xi_i\leqslant t\} - t)\Big| = \\ &C\frac{k^{1/2}}{l^{1/2}}\int_0^{\infty}P\Big\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\frac{1}{k^{1/2}}\Big|\sum_{i=1}^{k}(I\{\xi_i\leqslant t\} - t)\Big| > x\Big\}\,\mathrm{d}x \leqslant C\frac{k^{1/2}}{l^{1/2}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-Cx^2}\mathrm{d}x \leqslant C\Big(\frac{k}{l}\Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{8}$$

从而由式(6)～(8)及引理 3 知式(5)成立，即定理 1 的第一个等号成立．而定理 1 的第二个等号可由文献[16]中的式(11.39)直接得到.

定理 2　对于$\forall x > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}I\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}F_k(t)\leqslant x\} = P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}U(t)\leqslant x\} = 1 - \mathrm{e}^{-2x^2}\ \text{a.s.} \tag{9}$$

定理 2 的证明过程与定理 1 类似.

参　考　文　献

[1] Brosamler G A. An Almost Everywhere Central Limit Theorem [J]. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1988, 104(3): 561-574.

[2] Schatte P. On Strong Versions of the Central Limit Theorem [J]. Math Nachr, 1988, 137: 249-256.

[3] Fisher A. Convex-Invariant Means and a Pathwise Central Limit Theorem [J]. Adv Math, 1987, 63: 213-246.

[4] Lacey M T, Phillip W. A Note on the Almost Sure Central Limit Theorem [J]. Statist Probab Lett, 1990, 9: 201-205.

[5] Peligrad M, Shao Q M. A Note on the Almost Sure Central Limit Theorem [J]. Statist Probab Lett, 1995, 22: 131-136.

[6] DONG Zhi-shan, YANG Xiao-yun. An Almost Sure Central Limit Theorem for NA and LNQD Random Variables [J]. Acta Mathematica Sinica, 2004, 47(3): 593-600.（董志山，杨小云．NA 及 LNQD 随机变量列的几乎处处中心极限定理 [J]．数学学报，2004，47(3)：593-600.）

[7] Gonchigdanzan K, Rempala G. A Note on the Almost Sure Limit Theorem for the Product of Partial Sums [J]. Appl Math Lett, 2006, 19(2): 191-196.

[8] LI Yun-xia, WANG Jian-feng. An Almost Sure Limit Theorem for Products of Sums under Association [J]. Statist Probab Lett, 2008, 78(4): 367-375.

[9] ZHANG Yong, YANG Xiao-yun, DONG Zhi-shan. An Almost Sure Central Limit Theorem for Products of Sums of Partial Sums under Association [J]. J Math Anal Appl, 2009, 355(2): 708-716.

[10] Bercu B, Cénac P, Fayolle G. On the Almost Sure Central Limit Theorem for Vector Martingales: Convergence of Moments and Statistical Applications [J]. J Appl Probab, 2009, 46(1): 151-169.

[11] Dehling H, Durieu O, Volny D. New Techniques for Empirical Processes of Dependent Data [J]. Stochastic Process Appl, 2009, 119(10): 3699-3718.

[12] Drees H, Rootzén H. Limit Theorems for Empirical Processes of Cluster Functionals [J]. Ann Statist, 2010, 38(4): 2145-2186.

[13] WANG Fang. Almost Sure Central Limit Theorem for Uniform Empirical Processes [J]. Journal of Capital Normal University: Natural Science Edition, 2006, 26(2): 9-11.（王芳．均匀经验过程的几乎处处中心极限定理 [J]．首都师范大学学报：自然科学版，2006，26(2)：9-11.）

[14] Pollard D. Convergence of Stochastic Process [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

[15] Kiefer J, Wolfowitz J. On the Deviations of the Empiric Distribution Function of Vector Chance Variables [J]. Trans Amer Math Soc, 1958, 87: 173-186.

[16] Billingsley P. Convergence of Probability Measures [M]. New York: Wiley, 1968.