一类具偏差变元的三阶 p-Laplacian 方程周期解的存在性

沈钦锐, 周宗福
(安徽大学 数学科学学院, 合肥 230039)

摘要: 采用重合度理论中的延拓定理, 研究一类三阶 p-Laplacian 中立型方程:
$$(\varphi_p((x(t)-cx(t-\sigma))''))'+f_1(x(t))x'(t)+f_2(x'(t))x''(t)+\rho(t)g(x(t-\tau(t)))=e(t)$$
T-周期解的存在性, 得到了该方程存在 T-周期解的相关结果.

关键词: 周期解; 偏差变元; 重合度; p-Laplacian 方程
中图分类号: O175.6 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2012)01-0027-08

Existence of Perodic Solution for a Class of Third-Order p-Laplacian Equation with a Deviating Argument

SHEN Qin-rui, ZHOU Zong-fu
(*School of Mathematics Science*, *University of Anhui*, *Hefei* 230039, *China*)

Abstract: Continuation theorem in coincidence degree theory, a type of third order p-Laplacian equation with a deviating argument
$$(\varphi_p((x(t)-cx(t-\sigma))''))'+f_1(x(t))x'(t)+f_2(x'(t))x''(t)+\rho(t)g(x(t-\tau(t)))=e(t)$$
was considered with the sufficient condition for the existance of T-periodic solution obtained.

Key words: periodic solution; deviating argument; coincidence degree; p-Laplacian equation

0 引 言

近年来, 关于具有偏差变元的 p-Laplacian 微分方程周期解存在性研究已有许多成果[1-7]. 文献[1-2]讨论了一类 p-Laplacian 方程
$$(\phi_p(x'(t)))'+f(x(t))x'(t)+g(x(t-\tau(t)))=e(t),$$
$$(\phi_p(x'(t)))'+f(x(t))x'(t)+\beta(t)g(x(t-\tau(t)))=e(t)$$
周期解的存在性; 文献[3]在 $p>1$ 时利用拓扑度理论研究了一类具有偏差变元的 p-Laplacian 方程 $(\varphi_p(x'(t)))'+f(t,x'(t))+g(t,x(t-\tau(t)))=e(t)$ 的周期解问题; 文献[4]在 $p>2$ 时, 讨论了一类具有偏差变元的 p-Laplacian 中立型微分方程 $(\varphi_p((x(t)-cx(t-\sigma))'))'+g(t,x(t-\tau(t)))=e(t)$ 的周期解问题; 文献[5]在 $1<p<+\infty$ 时, 研究了具有偏差变元的 p-Laplacian 中立型方程 $(\varphi_p((x(t)-cx(t-\sigma))'))'+f(x(t))x'(t)+g(x(t-\tau(t)))=e(t)$, 得到了其存在周期解的判别条件; 文献[6]讨论了一类具有 p-Laplacian 算子的分布时滞中立型微分方程 $(\varphi_p((x(t)-cx(t-\sigma))'))'+f(x(t))x'(t)+g\left(\int_{-r}^{0}x(t+s)\mathrm{d}(m(s))\right)=e(t)$ 的周期解问题, 得到了其存在周期解的充分性.

收稿日期: 2011-04-15.
作者简介: 沈钦锐(1984—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事泛函微分方程的研究, E-mail: qinrui327@163.com.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11071001)、安徽省教育厅重点科研项目基金(批准号: KJ2009A005Z)、中国高校博士学科点专项科研基金(批准号: 20093401110001)和安徽大学学术创新团队项目(批准号: KJTD002B).

基于此, 本文研究一类具有偏差变元的三阶 p-Laplacian 中立型方程

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_p((x(t)-cx(t-\sigma))''))'+f_1(x(t))x'(t)+\\
&\qquad f_2(x'(t))x''(t)+\rho(t)g(x(t-\tau(t)))=e(t)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

周期解的存在性问题, 其中: 常数 $p>1$; q 为 p 的共轭指数, 即满足 $1/p+1/q=1$. 定义函数 φ_p: $R\to R$, $\varphi_p(u)=|u|^{p-2}u$, 则 φ_p 的逆映射 $\varphi_q=|u|^{q-2}u$, f_1, f_2, ρ, g, τ 和 e 皆为 R 上的连续实函数, 并且 ρ, τ 和 e 关于 t 是 T 周期函数, $T>0$, $c,\sigma\in R$ 为常数, 且满足 $|c|\neq 1$.

1 预备知识

设 X 和 Y 是两个赋范向量空间, 定义映射 L: Dom $L\subset X\to Y$ 为线性映射, 映射 N: $X\to Y$ 是连续映射. 如果 Im L 是 Y 中的闭集, 且 dim Ker L = codim Im $L<+\infty$, 则称 L 是指标为 0 的 Fredholm 算子. 如果 L 是指标为 0 的 Fredholm 算子, 则存在连续的投影算子 P: $X\to X$ 及 Q: $Y\to Y$, 使得 Im P = Ker L, Im L = Ker Q = Im$(I-Q)$, 且算子 $L|_{\text{Dom }L\cap\text{Ker }P}$: $(I-P)X\to$ Im L 可逆, 记其逆算子为 L_P^{-1}. 设 Ω 是 X 中的有界开集, 如果 $QN(\bar{\Omega})$ 有界, 且满足 $L_P^{-1}(I-Q)N$: $\bar{\Omega}\to$ Im L 是紧的, 则称 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的. 由于 Ker L 和 Im Q 同构, 故存在同构映射 J: Im $Q\to$ Ker L.

引理1[7] 设 X,Y 为 Banach 空间, L 是指标为 0 的 Fredholm 算子, N: $\bar{\Omega}\to Y$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的, 其中 Ω 是 X 中的有界开集, 且满足:

1) $Lx\neq\lambda Nx$, $\forall\lambda\in(0,1)$, $\forall x\in$ Dom $L\cap\partial\Omega$;

2) $Nx\notin$ Im L, $\forall x\in$ Ker $L\cap\partial\Omega$;

3) $\deg(JQNx,\text{Ker }L\cap\Omega,0)\neq 0$.

则方程 $Lx=Nx$ 在 $\bar{\Omega}$ 上至少有一个解.

记 $|x|_k=\left(\int_0^T|x(t)|^k\mathrm{d}t\right)^{1/k}$, $|x|_0=\max\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$. 假设:

$C_T=\{x|x\in C(R,R),\ x(t+T)=x(t),\ \forall t\in R\}$, 定义范数 $\|x\|_0=|x|_0$;

$C_T^1=\{x|x\in C^1(R,R),\ x(t+T)=x(t),\ \forall t\in R\}$, 定义范数 $\|x\|=\max\{|x|_0,|x'|_0\}$;

$X=\{\boldsymbol{x}=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}\in C^1(R,R^2):\boldsymbol{x}(t+T)=\boldsymbol{x}(t)\}$, 定义范数 $\|\boldsymbol{x}\|_X=\max\{\|x_1\|,\|x_2\|\}$;

$Y=\{\boldsymbol{y}=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}\in C(R,R^2):\boldsymbol{y}(t+T)=\boldsymbol{y}(t)\}$, 定义范数 $\|\boldsymbol{x}\|_Y=\max\{\|x_1\|,\|x_2\|\}$. 显然 X,Y 是 Banach 空间.

定义算子 A,L 和 N 如下:

A: $C_T\to C_T$, $(Ax)(t)=x(t)-cx(t-\sigma)$;

L: Dom $L=C^2(R,R^2)\cap X\subset X\to Y$,

$$
L\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}(Ax_1)''\\ x_2{}'\end{pmatrix};
\tag{2}
$$

$$
N: X\to Y,\quad N\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\varphi_q(x_2(t))\\ -f_1(x_1(t))x_1'(t)-f_2(x_1'(t))x_1''(t)-\rho(t)g(x_1(t-\tau(t)))+e(t)\end{pmatrix},
\tag{3}
$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}$.

为了应用重合度理论讨论方程(1)的 T-周期解, 将方程(1)写成如下形式:

$$
\begin{cases}
(Ax_1)''=\varphi_q(x_2(t))=|x_2(t)|^{q-2}x_2(t),\\
x_2'=-f_1(x_1(t))x_1'(t)-f_2(x_1'(t))x_1''(t)-\rho(t)g(x_1(t-\tau(t)))+e(t).
\end{cases}
\tag{4}
$$

显然, 如果 $\boldsymbol{y}(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}$ 是式(4)的周期解, 则 $x_1(t)$ 即为方程(1)的 T-周期解. 根据 L 的定义可知, Ker $L=R^2$, Im $L=\left\{\boldsymbol{x}\in Y:\int_0^T\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t=0\right\}$, 易知 dim(Ker L) = 2, dim(Y/Im L) = 2, codim(Im L) = dim(Ker L) = 2, 因此 L 是一个指标为零的 Fredholm 算子.

定义如下投影算子:

$$P: X \to \mathrm{Ker}\, L,\quad P(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{x}(t)\,\mathrm{d}t;\quad Q: Y \to R,\quad Q(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{y}(t)\,\mathrm{d}t.$$

则 $\mathrm{Im}\, P = \mathrm{Ker}\, L = 2$，$\mathrm{Im}\, L = \mathrm{Ker}\, Q$. 容易验证，$L|_{\mathrm{Dom}\, L \cap \mathrm{Ker}\, P}$是连续的一一映射，从而 $L|_{\mathrm{Dom}\, L\cap \mathrm{Ker}\, P}$有逆映射：$L_P^{-1}$：$\mathrm{Im}\, L \to \mathrm{Dom}\, L \cap \mathrm{Ker}\, P$，

$$[L_P^{-1}\boldsymbol{y}] = \begin{pmatrix} (A^{-1}k_1y_1)(t) \\ (k_2y_2)(t) \end{pmatrix},$$

其中：

$$(k_1y_1)(t) = \int_0^T \frac{s(T-s)}{2T} y_1(s)\,\mathrm{d}s - \frac{t}{T}\int_0^T (T-s)y_1(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (t-s)y_1(s)\,\mathrm{d}s;$$

$$(k_2y_2)(t) = \int_0^T \frac{s-T}{T} y_2(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t y_2(s)\,\mathrm{d}s.$$

易证 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L-紧的，这里 Ω 是 X 中的任一有界开子集.

引理 2[8]　设 $u \in W^{1,p}(0,\omega)$，且满足 $u(0) = u(\omega) = 0$，则有

$$\| u \|_0 \leqslant \frac{\omega}{2}^{1/q} \| u' \|_p,\qquad \| u \|_p \leqslant \frac{\omega}{\pi_p} \| u' \|_p,$$

其中 $\pi_p = 2\int_0^{(p-1)^{1/p}} \dfrac{\mathrm{d}s}{(1 - s^p/(p-1))^{1/p}} = \dfrac{2\pi(p-1)^{1/p}}{p\sin(\pi/p)}$.

引理 3　设 $x \in C_T^2$，$\xi \in [0,T]$，则有

$$|x(t)|_p \leqslant \left(\frac{T}{\pi_p}\right)^2 |x''(t)|_p + |x(\xi)|T^{1/p},\qquad |x(t)|_0 \leqslant \frac{T^{1+1/q}}{2^{1/q}\pi_p}|x''(t)|_p + |x(\xi)|.$$

π_p 定义同上.

证明：设 $u(t) = x(t+\xi) - x(\xi)$，则有 $u(0) = u(T) = 0$，且 $u \in W^{1,p}(0,\omega)$.

$$|x|_p = \left(\int_0^T |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} = \left(\int_0^T |x(t+\xi)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} = \left(\int_0^T |u(t) + x(\xi)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \leqslant$$

$$|u|_p + |x(\xi)|T^{1/p} \leqslant \frac{T}{\pi_p}|u'|_p + |x(\xi)|T^{1/p} \leqslant \left(\frac{T}{\pi_p}\right)^2 |u''(t)|_p + |x(\xi)|T^{1/p} =$$

$$\left(\frac{T}{\pi_p}\right)^2 |u''(t)|_p + |x(\xi)|T^{1/p},$$

$$|x|_0 \leqslant |u|_0 + |x(\xi)| \leqslant \left(\frac{T}{2}\right)^{1/q} |u'(t)|_p + |x(\xi)| \leqslant$$

$$\frac{T^{1+1/q}}{2^{1/q}\pi_p}|u''(t)|_p + |x(\xi)| = \frac{T^{1+1/q}}{2^{1/q}\pi_p}|x''(t)|_p + |x(\xi)|.$$

引理 4[5]　设 $|c| \neq 1$，$p > 1$，则 A 在 C_ω 上具有有界的逆算子，且

$$\int_0^\omega |(A^{-1}x)(t)|^p \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{|1 - |c||^p}\int_0^\omega |x(t)|^p \mathrm{d}t,\qquad \forall x \in C_\omega,$$

这里 $C_\omega = \{x \mid x \in C(R,R),\ x(t+T) = x(t),\ \forall t \in R\}$.

2　主要结果

定理 1　假设存在常数 $d > 0$，$d_3 > 0$，$k_1 \geqslant 0$，$k_2 \geqslant 0$，$k_3 \geqslant 0$，使得下列条件成立：

1）$0 < \rho_1 = \min\limits_{t\in[0,T]} \rho(t) \leqslant \max\limits_{t\in[0,T]} \rho(t) = \rho_2$；

2）$\lim\limits_{|x|\to+\infty} \sup \dfrac{\left|\int_0^x f_1(t)\,\mathrm{d}t\right|}{|x|^{p-1}} = k_1$，$\lim\limits_{|x|\to+\infty} \sup \dfrac{\left|\int_0^x f_2(t)\,\mathrm{d}t\right|}{|x|^{p-1}} = k_2$；

3）$\lim\limits_{|x|\to+\infty} \mathrm{sgn}(x)g(x) = +\infty$，$|g(x)| \leqslant k_3|x|^{p-1} + d_3$，$\forall |x| > d$；

4) $\dfrac{k_1|c|T^{2(p-1)}}{\pi_p^{2(p-1)}}+\dfrac{k_2|c|T^{p-1}+2^{1-p}(1+|c|)\rho_2k_3T^{2p-1}}{\pi_p^{p-1}}<|1-|c||^p$.

则方程(1)至少存在一个 T-周期解.

证明: 对 $\forall\lambda\in(0,1)$, 考虑方程

$$Lx=\lambda Nx. \tag{5}$$

由式(2)~(4)易知式(5)即为如下方程组:

$$\begin{cases}(Ax_1)''=\lambda\varphi_q(x_2(t))=\lambda|x_2(t)|^{q-2}x_2(t),\\ x_2'=-\lambda f_1(x_1(t))x_1'(t)-\lambda f_2(x_1'(t))x_1''(t)-\lambda\rho(t)g(x_1(t-\tau(t)))+\lambda e(t).\end{cases} \tag{6}$$

设 $\boldsymbol{x}=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm T}$为式(6)任一可能的 T-周期解, 又 $x_2(t)=\varphi_p\left(\dfrac{1}{\lambda}(Ax_1)''\right)=\dfrac{1}{\lambda^{p-1}}\varphi_p(Ax_1'')$, 则 $x_1(t)$是方程

$$(\varphi_p(Ax_1)'')'+\lambda^pf_1(x_1(t))x_1'(t)+\lambda^pf_2(x_1'(t))x_1''(t)+\lambda^p\rho(t)g(x_1(t-\tau(t)))=\lambda^pe(t) \tag{7}$$

的 T-周期解. 将式(7)两边从0到 T 积分, 有

$$\int_0^T[\rho(t)g(x_1(t-\tau(t)))-e_2]\mathrm{d}t=0. \tag{8}$$

根据积分中值定理知, $\exists\eta\in[0,T]$, 使得$\rho(\eta)g(x_1(\eta-\tau(\eta)))-e_2=0$, 这里 $e_2=\dfrac{1}{T}\int_0^Te(t)\mathrm{d}t$. 移项得 $g(x_1(\eta-\tau(\eta)))=e_2/\rho(\eta)$, 由条件(1)有

$$|e_2|/\rho_2\leqslant|g(x_1(\eta-\tau(\eta)))|\leqslant|e_2|/\rho_1. \tag{9}$$

由式(9)并结合条件(3)可知, 存在一个足够大的常数 $D>0$, 满足

$$|x_1(\eta-\tau(\eta))|\leqslant D. \tag{10}$$

由式(10)可知存在正整数 m 和 $\xi\in[0,T]$, 使得 $\eta-\tau(\eta)=mT+\xi$, 故有

$$|x_1(\xi)|\leqslant D. \tag{11}$$

根据引理3, 得:

$$|x_1(t)|_p\leqslant\left(\frac{T}{\pi_p}\right)^2|x_1''(t)|_p+|x_1(\xi)|T^{1/p}\leqslant\left(\frac{T}{\pi_p}\right)^2|x_1''(t)|_p+DT^{1/p}; \tag{12}$$

$$|x_1(t)|_0\leqslant\frac{T^{1+1/q}}{2^{1/q}\pi_p}|x_1''(t)|_p+|x_1(\xi)|\leqslant\frac{T^{1+1/q}}{2^{1/q}\pi_p}|x_1''(t)|_p+D; \tag{13}$$

$$|x_1'(t)|_0\leqslant\left(\frac{T}{2}\right)^{1/q}|x_1''(t)|_p. \tag{14}$$

又由条件(4)知, $\exists\varepsilon>0$, 使得

$$\frac{(k_1+\varepsilon)|c|T^{2(p-1)}}{\pi_p^{2(p-1)}}+\frac{(k_2+\varepsilon)|c|T^{p-1}+2^{1-p}(1+|c|)\rho_2k_3T^{2p-1}}{\pi_p^{p-1}}<|1-|c||^p. \tag{15}$$

对 $\varepsilon>0$, 由(2)知, 存在常数 $d_1,d_2>0$, 使得

$$\left|\int_0^xf_1(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant(k_1+\varepsilon)|x|^{p-1}+d_1,\qquad\forall x\in R, \tag{16}$$

$$\left|\int_0^xf_2(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant(k_2+\varepsilon)|x|^{p-1}+d_2,\qquad\forall x\in R. \tag{17}$$

将方程(7)两边同乘 $Ax_1'(t)$, 并从0到 T 积分得

$$\begin{aligned}\int_0^T(\varphi_p(Ax_1)'')'(Ax_1'(t))\mathrm{d}t=&-\lambda^p\int_0^T(x_1'(t)-cx_1'(t-\sigma))f_1(x_1(t))x_1'(t)\mathrm{d}t-\\&\lambda^p\int_0^T(x_1'(t)-cx_1'(t-\sigma))f_2(x_1'(t))x_1''(t)\mathrm{d}t-\\&\lambda^p\int_0^T(x_1'(t)-cx_1'(t-\sigma))[\rho(t)g(x_1(t-\tau(t)))-e(t)]\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

化简得

$$-|Ax_1''|_p^p=c\lambda^p\int_0^T x_1'(t-\sigma)f_1(x_1(t))x_1'(t)\mathrm{d}t+c\lambda^p\int_0^T x_1'(t-\sigma)f_2(x_1'(t))x_1''(t)\mathrm{d}t-$$
$$\lambda^p\int_0^T(x_1'(t)-cx_1'(t-\sigma))[\rho(t)g(x_1(t-\tau(t)))-e(t)]\mathrm{d}t,$$

从而有

$$|Ax_1''|_p^p\leqslant|c|\left|\int_0^T x_1'(t-\sigma)f_1(x_1(t))x_1'(t)\mathrm{d}t\right|+|c|\left|\lambda^p\int_0^T x_1'(t-\sigma)f_2(x_1'(t))x_1''(t)\mathrm{d}t\right|+$$
$$(1+|c|)|x_1'|_0\left(\int_0^T|\rho(t)g(x_1(t-\tau(t)))|\mathrm{d}t+\int_0^T|e(t)|\mathrm{d}t\right),\tag{18}$$

结合式(16)，有

$$\left|\int_0^T x_1'(t-\sigma)f_1(x_1(t))x_1'(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^T x_1'(t-\sigma)\mathrm{d}\left(\int_0^{x_1(t)}f_1(s)\mathrm{d}s\right)\right|=\left|\int_0^T\left(\int_0^{x_1(t)}f_1(s)\mathrm{d}s\right)x_1''(t-\sigma)\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\int_0^T|x_1''(t-\sigma)|((k_1+\varepsilon)|x_1|^{p-1}+d_1)\mathrm{d}t,\tag{19}$$

结合式(17)，并令 $x_1'(t)=z(t)$，可得

$$\left|\int_0^T x_1'(t-\sigma)f_2(x_1'(t))x_1''(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^T z(t-\sigma)f_2(z(t))z'(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^T z(t-\sigma)\mathrm{d}\left(\int_0^{z(t)}f_2(s)\mathrm{d}s\right)\right|=$$
$$\left|\int_0^T\left(\int_0^{z(t)}f_2(s)\mathrm{d}s\right)z'(t-\sigma)\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\int_0^T|z'(t-\sigma)|((k_2+\varepsilon)|z|^{p-1}+d_2)\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^T|x_1''(t-\sigma)|((k_2+\varepsilon)|x_1'|^{p-1}+d_2)\mathrm{d}t.\tag{20}$$

将式(19),(20)代入式(18)，有

$$|Ax_1''|_p^p\leqslant|c|\int_0^T|x_1''(t-\sigma)|((k_1+\varepsilon)|x_1|^{p-1}+d_1)\mathrm{d}t+|c|\int_0^T|x_1''(t-\sigma)|((k_2+\varepsilon)|x_1'|^{p-1}+d_2)\mathrm{d}t+$$
$$(1+|c|)|x_1'|_0\left(\int_0^T|\rho(t)g(x_1(t-\tau(t)))|\mathrm{d}t+\int_0^T|e(t)|\mathrm{d}t\right)\leqslant$$
$$(k_1+\varepsilon)|c||x_1''|_p|x_1|_p^{p-1}+d_1|c|T^{1/q}|x_1''|_p+(k_2+\varepsilon)|c||x_1''|_p|x_1'|_p^{p-1}+d_2|c|T^{1/q}|x_1''|_p+$$
$$(1+|c|)|x_1'|_0\left(\int_0^T|\rho(t)g(x_1(t-\tau(t)))|\mathrm{d}t+\int_0^T|e(t)|\mathrm{d}t\right).\tag{21}$$

设 $E_1=\{t\in[0,T]:|x_1(t-\tau(t))|>d\}$，$E_2=\{t\in[0,T]:|x_1(t-\tau(t))|\leqslant d\}$，则由条件(3)和式(21)知

$$\int_0^T|\rho(t)g(x_1(t-\tau(t)))|\mathrm{d}t=\int_0^T\rho(t)|g(x_1(t-\tau(t)))|\mathrm{d}t=\left(\int_{E_1}+\int_{E_2}\right)\rho(t)|g(x_1(t-\tau(t)))|\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_0^T\rho(t)(k_3|x|^{p-1}+d_3)\mathrm{d}t+\rho_2Tg_d\leqslant$$
$$\rho_2k_3T|x_1|_0^{p-1}+\rho_2d_3T+\rho_2Tg_d,\tag{22}$$

其中 $g_d=\max\limits_{|x_1|\leqslant d}|g(x_1)|$. 将式(12)～(14),(22)代入式(21)得

$$|Ax_1''|_p^p\leqslant(k_1+\varepsilon)|c||x_1''|_p\left(\left(\frac{T}{\pi_p}\right)^2|x_1''(t)|_p+DT^{1/p}\right)^{p-1}+(k_2+\varepsilon)|c|\left(\frac{T}{\pi_p}\right)^{p-1}|x_1''(t)|_p^p+$$
$$(1+|c|)|x_1'|_0\left(\rho_2k_3T|x_1|_0^{p-1}+\rho_2d_3T+\rho_2Tg_d+\int_0^T|e(t)|\mathrm{d}t\right)+b_1|x_1''(t)|_p=$$
$$(k_1+\varepsilon)|c||x_1''|_p\left(\left(\frac{T}{\pi_p}\right)^2|x_1''|_p+DT^{1/p}\right)^{p-1}+(k_2+\varepsilon)|c|\left(\frac{T}{\pi_p}\right)^{p-1}|x_1''|_p^p+$$
$$(1+|c|)\rho_2k_3T|x_1'|_0|x_1|_0^{p-1}+b_2|x_1'|_0+b_1|x_1''|_p\leqslant$$

$$(k_1+\varepsilon)|c||x_1''|_p\left(\left(\frac{T}{\pi_p}\right)^2|x_1''|_p+DT^{1/p}\right)^{p-1}+(k_2+\varepsilon)|c|\left(\frac{T}{\pi_p}\right)^{p-1}|x_1''|_p^p+$$
$$(1+|c|)\rho_2k_3T\left(\frac{T}{2}\right)^{1/q}|x_1''|_p\left(\frac{T^{1+1/q}}{2^{1/q}\pi_p}|x_1''|_p+D\right)^{p-1}+b_2\left(\frac{T}{2}\right)^{1/q}|x_1''|_p+b_1|x_1''|_p, \tag{23}$$

其中：$b_1=(d_1+d_2)|c|T^{1/q}$；$b_2=(1+|c|)\left(\rho_2d_3T+\rho_2Tg_d+\int_0^T|e(t)|\mathrm{d}t\right)$.

(i) 若$|x_1''|_p=0$, 则由式(13)有$|x_1(t)|\leqslant\frac{T^{1+1/q}}{2^{1/q}\pi_p}|x_1''(t)|_p+D=D$.

(ii) 若$|x_1''|_p\geqslant 0$, 则由式(22)可以证明, 存在常数$R_0>0$, 满足
$$|x_1''|_p\leqslant R_0. \tag{24}$$

易见, 存在与λ无关的常数$s>0$, 使得
$$(1+u)^{p-1}<1+pu,\qquad \forall u\in[0,s]. \tag{25}$$
$$\left(\left(\frac{T}{\pi_p}\right)^2|x_1''|_p+DT^{1/p}\right)^{p-1}=\left(\frac{T}{\pi_p}\right)^{2(p-1)}|x_1''|_p^{p-1}\left(1+\frac{D\pi_p^2T^{1/p}}{T^2|x_1''|_p}\right)^{p-1}, \tag{26}$$
$$\left(\frac{T^{1+1/q}}{2^{1/q}\pi_p}|x_1''|_p+D\right)^{p-1}=\left(\frac{T^{1+1/q}}{2^{1/q}\pi_p}\right)^{p-1}|x_1''|_p^{p-1}\left(1+\frac{2^{1/q}D\pi_p}{T^{1+1/q}|x_1''|_p}\right)^{p-1}. \tag{27}$$

下面分两种情况讨论：

1) 若$\min\left\{\frac{D\pi_p^2T^{1/p}}{T^2|x_1''|_p},\frac{2^{1/q}D\pi_p}{T^{1+1/q}|x_1''|_p}\right\}\geqslant s$, 则有
$$|x_1''|_p\leqslant\frac{D\pi_p^2T^{1/p}}{sT^2},\qquad |x_1''|_p\leqslant\frac{2^{1/q}D\pi_p}{sT^{1+1/q}}; \tag{28}$$

2) 若$\max\left\{\frac{D\pi_p^2T^{1/p}}{T^2|x_1''|_p},\frac{2^{1/q}D\pi_p}{T^{1+1/q}|x_1''|_p}\right\}<s$, 则由式(25)~(27)有
$$\left(\left(\frac{T}{\pi_p}\right)^2|x_1''|_p+DT^{1/p}\right)^{p-1}<\left(\frac{T}{\pi_p}\right)^{2(p-1)}|x_1''|_p^{p-1}+b_3|x_1''|_p^{p-2}, \tag{29}$$
$$\left(\frac{T^{1+1/q}}{2^{1/q}\pi_p}|x_1''|_p+D\right)^{p-1}<\left(\frac{T^{1+1/q}}{2^{1/q}\pi_p}\right)^{p-1}|x_1''|_p^{p-1}+b_4|x_1''|_p^{p-2}, \tag{30}$$

其中：$b_3=\frac{pDT^{2p-4+1/p}}{\pi_p^{2(p-2)}}$；$b_4=\frac{pDT^{(1+1/q)(p-2)}}{2^{(p-2)/q}\pi_p^{p-2}}$.

将式(29),(30)代入式(23)得
$$|Ax_1''|_p^p\leqslant\frac{(k_1+\varepsilon)|c|T^{2(p-1)}}{\pi_p^{2(p-1)}}|x_1''|_p^p+\frac{(k_2+\varepsilon)|c|T^{p-1}}{\pi_p^{p-1}}|x_1''|_p^p+\frac{(1+|c|)\rho_2k_3T^{2p-1}}{2^{p-1}\pi_p^{p-1}}|x_1''|_p^p+$$
$$(k_1+\varepsilon)b_3|c||x_1''|_p^{p-1}+(1+|c|)\rho_2k_3b_4T\left(\frac{T}{2}\right)^{1/q}|x_1''|_p^{p-1}+b_2\left(\frac{T}{2}\right)^{1/q}|x_1''|_p+b_1|x_1''|_p=$$
$$\left(\frac{(k_1+\varepsilon)|c|T^{2(p-1)}}{\pi_p^{2(p-1)}}+\frac{(k_2+\varepsilon)|c|T^{p-1}+2^{1-p}(1+|c|)\rho_2k_3T^{2p-1}}{\pi_p^{p-1}}\right)|x_1''|_p^p+$$
$$b_2\left(\frac{T}{2}\right)^{1/q}|x_1''|_p+b_1|x_1''|_p+\left(k_1b_3|c|+(1+|c|)\rho_2k_3b_4T\left(\frac{T}{2}\right)^{1/q}\right)|x_1''|_p^{p-1}, \tag{31}$$

由引理4有
$$\big|1-|c|\big|^p|x_1''|_p^p=\big|1-|c|\big|^p|A^{-1}Ax_1''|_p^p\leqslant|Ax_1''|_p^p, \tag{32}$$

由式(31),(32)可知
$$\big|1-|c|\big|^p|x_1''|_p^p\leqslant\left(\frac{(k_1+\varepsilon)|c|T^{2(p-1)}}{\pi_p^{2(p-1)}}+\frac{(k_2+\varepsilon)|c|T^{p-1}+2^{1-p}(1+|c|)\rho_2k_3T^{2p-1}}{\pi_p^{p-1}}\right)|x_1''|_p^p+$$
$$\left((k_1+\varepsilon)b_3|c|+(1+|c|)\rho_2k_3b_4T\left(\frac{T}{2}\right)^{1/q}\right)|x_1''|_p^{p-1}+$$

$$b_2\left(\frac{T}{2}\right)^{1/q}|x_1''|_p + b_1|x_1''|_p. \tag{33}$$

因为 $p>1$，故由式(15)，(33)可知，存在常数 $R_1>0$，满足 $|x_1''|_p \leqslant R_1$. 令 $R_0=\max\{R_1, D\pi_p^2T^{1/p}/(sT^2), 2^{1/q}D\pi_p/(sT^{1+1/q})\}$，便有式(23)成立.

由式(13)，(14)有

$$|x_1'(t)|_0 \leqslant \left(\frac{T}{2}\right)^{1/q}|x_1''(t)|_p \leqslant \left(\frac{T}{2}\right)^{1/q}R_0 \triangleq R_2, \tag{34}$$

$$|x_1(t)|_0 \leqslant \frac{T^{1+1/q}}{2^{1/q}\pi_p}|x_1''(t)|_p + D \leqslant \frac{T^{1+1/q}}{2^{1/q}\pi_p}R_0 + D \triangleq R_3. \tag{35}$$

取 $R_4=\max\{R_2,R_3\}$，由式(6)的第二个方程得

$$x_2'(t) = -\lambda f_1(x_1(t))x_1'(t) - \lambda f_2(x_1'(t))x_1''(t) - \lambda\rho(t)g(x_1(t-\tau(t))) + \lambda e(t),$$

两边从 0 到 T 积分得

$$\int_0^T|x_2'(t)|\mathrm{d}t \leqslant F_1\int_0^T|x_1'(t)|\mathrm{d}t + F_2\int_0^T|x_1''(t)|\mathrm{d}t + \rho_2Tg_{R_4} + \int_0^T|e(t)|\mathrm{d}t \leqslant$$

$$F_1R_2T + F_2R_0T + \rho_2Tg_{R_4} + \int_0^T|e(t)|\mathrm{d}t \triangleq R_5, \tag{36}$$

其中：$F_1=\max\limits_{|x_1|\leqslant R_4}|f_1(x_1(t))|$；$F_2=\max\limits_{|x_1'|\leqslant R_4}|f_2(x_1'(t))|$；$g_{R_4}=\max\limits_{|x_1|\leqslant R_4}|g(x_1)|$.

由式(6)的第一个方程得 $\int_0^T\lambda\varphi_q(x_2(t))\mathrm{d}t=0$，从而存在常数 $\nu\in[0,T]$，使得 $x_2(\nu)=0$，

$$|x_2(t)| = \left|x_2(\nu) + \int_\nu^t x_2'(s)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_0^T|x_2'(s)|\mathrm{d}s \leqslant R_5. \tag{37}$$

令 $R=\max\{R_0,R_4,R_5,D+1\}$，记 $\Omega=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}\in X, \|\boldsymbol{x}\|_X<R_0\}$. 则由式(34)，(36)可知，$\forall\lambda\in(0,1)$ 及 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathrm{Dom}\ L\cap\partial\Omega$，$L\boldsymbol{x}\neq\lambda N\boldsymbol{x}$.

当 $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\ L$ 时，$\boldsymbol{x}=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}$ 为常数，且 $\|\boldsymbol{x}\|_X=\max\{\|x_1\|,\|x_2\|\}=R$，故有

$$QN\boldsymbol{x} = \frac{1}{T}\int_0^T\begin{pmatrix}\varphi_q(x_2(t))\\ -f_1(x_1(t))x_1'(t) - f_2(x_1'(t))x_1''(t) - \rho(t)g(x_1(t-\tau(t))) + e(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t =$$

$$\begin{pmatrix}\varphi_q(x_2(t))\\ -\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T[\rho(t)g(x_1)-e(t)]\mathrm{d}t\end{pmatrix}.$$

若 $QN\boldsymbol{x}=0$，则有 $x_2=0$，$\int_0^T[\rho(t)g(x_1)-e(t)]\mathrm{d}t=0$，从而根据式(8)～(10)的证明过程可知 $|x_1|\leqslant D$，与 $|x_1|=R>D$ 矛盾，故对 $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\ L$，$QN\boldsymbol{x}\neq0$.

定义同构映射 J：$\mathrm{Im}\ Q\to\mathrm{Ker}\ L$ 为 $J\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}$. 令 $H(\boldsymbol{x},\mu)=\mu\boldsymbol{x}+(1-\mu)JQN\boldsymbol{x}$，则有

$$H(\boldsymbol{x},\mu) = \begin{pmatrix}\mu x_1 + (1-\mu)\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T[\rho(t)g(x_1)-e(t)]\mathrm{d}t\\ \mu x_2 + (1-\mu)\varphi_q(x_2)\end{pmatrix}.$$

易见，对 $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\ L$，$\mu\in[0,1]$，$H(\boldsymbol{x},\mu)=\mu\boldsymbol{x}+(1-\mu)JQN\boldsymbol{x}\neq0$. 因此

$$\deg(JQN\boldsymbol{x},\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\ L,0) = \deg(I,\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\ L,0) = 1 \neq 0.$$

由引理 1 知，方程(6)至少存在一个 T-周期解 $\boldsymbol{x}=(\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t))$，从而 $\tilde{x}_1(t)$ 即是方程(1)的 T-周期. 证毕.

注 1　在定理 1 中，若把 $g(x)$ 改为 $g(t,x)$，且 $g(t,x)$ 关于 t 是 T-周期解的，则结论仍成立.

当 $c=0$ 时，方程(1)化为

$$(\varphi_p((x(t))''))' + f_1(x(t))x'(t) + f_2(x'(t))x''(t) + \rho(t)g(x(t-\tau(t))) = e(t). \tag{38}$$

因此，有：

推论1 设存在常数 $d>0$, $k_3\geqslant 0$, 满足下列条件:

1) $0<\rho_1=\min\limits_{t\in[0,T]}\rho(t)\leqslant\max\limits_{t\in[0,T]}\rho(t)=\rho_2$;

2) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\operatorname{sgn}(x)g(x)=+\infty$, $|g(x)|\leqslant k_3|x|^{p-1}+d_3$, $\forall\ |x|>d$;

3) $2^{1-p}\rho_2k_3T^{2p-1}/\pi_p^{p-1}<1$.

则方程(38)至少存在一个 T-周期解.

3 应用实例

考虑泛函微分方程

$$(\varphi_4((x(t)-4x(t-5))''))'+f_1(x(t))x'(t)+f_2(x'(t))x''(t)+\rho(t)g(x(t-\cos 2t))=\sin 2t, \quad (39)$$

其中: $p=4$; $f_1(x)=3x^2$; $f_2(x)=3x^2$; $\rho(t)=\dfrac{1}{2}\sin 2t+\dfrac{3}{2}$;

$$g(x)=\begin{cases}4x^3/\pi^4, & x>1,\\ \sqrt{1+x}, & |x|\leqslant 1,\\ 4(x+1)^3/\pi^4, & x<-1.\end{cases}$$

可得 $k_1=k_2=1$, $k_3=4/\pi^4$, $T=\pi$, $\rho_2=2$,

$$\frac{k_1|c|T^{2(p-1)}}{\pi_p^{2(p-1)}}+\frac{k_2|c|T^{p-1}+2^{1-p}(1+|c|)\rho_2k_3T^{2p-1}}{\pi_p^{p-1}}=\frac{32}{3\sqrt{3}}+\frac{18\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}}<32+9\sqrt{2}<\big|1-|c|\big|^p=81.$$

故由定理1知, 方程(39)存在 π-周期解.

参考文献

[1] Chenug W S, Ren J L. Periodic Solutions for p-Laplacian Liénard Equation with a Deviating Argument [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2004, 59(1/2): 107-120.

[2] Chenug W S, REN Jin-li. On the Existence of Periodic Solutions for p-Laplacian Generalized Liénard Equation [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2005, 60(2): 65-75.

[3] ZHOU Ying-gao, ZHANG Xing-yong. On Periodic Solutions for Rayleigh Type p-Laplacian Equations with a Deviating Argument [J]. Acta Analysis Functionalis Applicata, 2009, 11(3): 235-239. (周英告, 张兴永. 具偏差变元的Rayleigh型 p-Laplacian方程的周期解 [J]. 应用泛函分析学报, 2009, 11(3): 235-239.)

[4] ZHU Yan-ling, LU Shi-ping. Periodic Solutions for p-Laplacian Neutral Functional Differential Equation with Deviating Arguments [J]. J Math Anal Appl, 2007, 325(1): 377-385.

[5] PENG Shi-guo. Periodic Solutions for p-Laplacian Neutral Liénard Equation with a Deviating Argument [J]. Chinese Annals of Mathematics: Ser A, 2008, 29(5): 617-626. (彭世国. 具有偏差变元的 p-Laplacian 中立型 Liénard 方程的周期解 [J]. 数学年刊: A辑, 2008, 29(5): 617-626.)

[6] ZHU Yan-ling, WANG Kai. Periodic Solutions for p-Laplacian Neutral Functional Differential Equation [J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2009, 29(6): 808-817. (朱艳玲, 汪凯. 具有 p-Laplace 算子的中立型泛函微分方程周期解 [J]. 系统科学与数学, 2009, 29(6): 808-817.)

[7] Gaines R, Mawhin J. Coincide Degree and Nonlinear Differential Equation [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[8] LU Shi-ping, ZHENG Zu-xiu. Periodic Solutions to Neutral Differential Equation with Deviating Arguments [J]. Appl Math Comput, 2004, 152(1): 17-27.

(责任编辑: 赵立芹)