李 Color 三系的幂零理想

贾志鹏, 张庆成
(东北师范大学 数学与统计学院, 长春 130024)

摘要: 将李三系幂零理想的基本性质推广到李 color 三系上, 并给出了李 color 三系幂零理想和李 color 代数幂零理想的关系及李 color 三系幂零性和可解性的关系.

关键词: 李 color 三系; 幂零理想; 诣零根; 标准嵌入; 可解性
中图分类号: O152.5 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)04-0674-05

Nilpotent Ideals of Lie Color Triple Systems

JIA Zhi-peng, ZHANG Qing-cheng
(*School of Mathematics and Statistics*, *Northeast Normal University*, *Changchun* 130024, *China*)

Abstract: The authors extended some conclusions of the Lie color algebras to Lie color triple systems, and discussed the nilpotent ideal of Lie color algebras and Lie color triple systems. Finally the authors presented the relation between nilpotency and solvability in Lie color triple systems.
Key words: Lie color triple system; nilpotent ideal; nil radical; standard embedded; solvability

文献[1]给出了李 color 代数的定义, 并证明了李 color 代数包络代数的 PBW 定理和 Ado 定理, 建立了李 color 代数和普通李超代数的关系; 文献[2-3]构造了两类更广泛的 Witt 型和 Wely 型单李 color 代数, 讨论了这两类代数的结构; 文献[4]研究了特征零域上李三系[5]的结构; 文献[6]将李三系的概念推广为李三代数; 文献[7-8]将李代数上幂零理想的一些结论推广到李三系上. 由于李 color 代数可以作为李 color 三系, 并且李 color 三系可以标准嵌入一个李 color 代数, 因此李三系上关于幂零理想的一些结论也可以推广到李 color 三系上.

1 预备知识

设 K 是特征不为 2 的域, 本文约定所讨论的向量空间和代数均为域 K 上的. 本文的一些概念和术语可参见文献[1].

设 G 是一个交换群, G 的一个反对称特征标是一个函子 ε: $G\times G\rightarrow K^*$, 满足: 对任意的$a,b,c\in G$, 有:

$$\varepsilon(a+b,c)=\varepsilon(a,c)\varepsilon(b,c);$$
$$\varepsilon(a,b+c)=\varepsilon(a,b)\varepsilon(a,c);$$
$$\varepsilon(a,b)\varepsilon(b,a)=1.$$

当 G 有一个反对称特征标时, 一个 G-阶化代数(G-阶化向量空间) $T=\bigoplus_{g\in G}T_g$ 称为一个 color 代数(color 向量空间). 对于齐次元素 $x\in T_a$, $b\in T_b$, $a,b\in G$, 记为 $\varepsilon(a,b)=\varepsilon(x,y)$. 当表达式中出现反对

收稿日期: 2010-10-18.
作者简介: 贾志鹏(1986—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事李超代数及相关问题的研究, E-mail: jiazp551@nenu.edu.cn. 通讯作者: 张庆成(1960—), 男, 汉族, 博士, 副教授, 从事李超代数及相关问题的研究, E-mail: zhangqc569@nenu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10871057).

称特征标时, 所对应的元素都是齐次的.

定义 1 设一个 color 向量空间 $T=\bigoplus_{g\in G}T_g$, 如果 T 上有一个线性三角积 $[\cdot,\cdot,\cdot]: T\times T\times T\to T$, 满足:

$$\sigma([x,y,z])=\sigma(x)+\sigma(y)+\sigma(z); \tag{1}$$

$$[x,y,z]=-\varepsilon(x,y)[y,x,z]; \tag{2}$$

$$\varepsilon(z,x)[x,y,z]+\varepsilon(x,y)[y,z,x]+\varepsilon(y,z)[z,x,y]=0; \tag{3}$$

$$[u,v,[x,y,z]]=[[u,v,x],y,z]+\varepsilon(u+v,x)[x,[u,v,y],z]+\varepsilon(u+v,x+y)[x,y,[u,v,z]], \tag{4}$$

其中 $x,y,z\in T$, 则称 T 是一个李 color 三系.

定义 2 设 I 是李 color 三系非零 G-阶化子空间, 若 $[I,T,T]\subseteq I$, 则 I 是 T 的 color 理想, 记为 $I\trianglelefteq T$.

根据式(2)和(3), 显然可得 $[T,I,T]\subseteq I$, $[T,T,I]\subseteq I$.

定义 3 设 T 是李 color 三系, 线性变换 $D: T\to T$ 满足: $D(T_b)\subset T_{a+b}$, 并且

$$D([x,y,z])=[D(x),y,z]+\varepsilon(D,x)[x,D(y),z]+\varepsilon(D,x+y)[x,y,D(z)], \tag{5}$$

则称 D 是 T 的次数为 a 的 color 导子, 次数记为 $|D|=a$.

定义 4 设 T 是李 color 三系, $L(T,T):=\{x\in \mathrm{End}(V)\,|\,x=\sum_{j,k}c_{jk}L(x_j,x_k),\ x_j,x_k\in V,\ c_{jk}\in K\}$ 是 Der L 的李 color 子代数, 称为内导子代数. 令 $L_s(T)=L(T,T)\oplus T$, 在 $L_s(T)$ 中定义换位运算:

$$[D_1+x_1,D_2+x_2]=([D_1,D_2]+L(x_1,x_2))+(D_1(x_2)-\varepsilon(x_1,D_2)D_2(x_1)), \tag{6}$$

其中 $D_1,D_2\in L(T,T)$, $x_1,x_2\in T$, 则 $L_s(T)$ 是李 color 代数, 称为 T 的标准嵌入李 color 代数.

定义 5 设 T 是域 K 上的李 color 三系, 且有 $\varphi\trianglelefteq T$, φ 的降中心序列定义为: $\varphi^0=\varphi,\varphi^1=[\varphi^0,T,\varphi]+[\varphi,T,\varphi^0],\cdots,\varphi^{n+1}=[\varphi^n,T,\varphi]+[\varphi,T,\varphi^n]$, 若存在 m, 使得 $\varphi^m=0$, 则称 φ 是 T 的幂零理想.

如果 T 是有限维的, 则 T 有唯一的最大幂零理想 $N(T)$ 称为 T 的诣零根, 同理 $N(L_S(T))$ 称为 $L_S(T)$ 的诣零根.

根据式(2)和(3), 可得

$$[\varphi^n,\varphi,T]=[\varphi,\varphi^n,T]\subseteq\varphi^{n+1}. \tag{7}$$

定义 6 设 L 是域 K 上的李 color 代数, 且有 $\mathscr{R}\trianglelefteq L$, $\mathscr{R}$ 的降中心序列定义为: $\mathscr{R}^0=\mathscr{R}$, $\mathscr{R}^1=[\mathscr{R}^0,\mathscr{R}],\cdots,\mathscr{R}^{n+1}=[\mathscr{R}^n,\mathscr{R}]$, 若存在 m, 使得 $\mathscr{R}^m=0$, 则称 $\mathscr{R}$ 是 L 的幂零理想.

定义 7 设 T 是域 K 上的李 color 三系, 定义 $Z(T)=\{z\in T\,|\,[x,y,z]=0,\ \forall x,y\in T\}$, 则称 $Z(T)$ 是 T 的中心, 其中 $Z(T)\trianglelefteq T$.

通过式(2)和(3)可得, $[T,Z(T),T]=[Z(T),T,T]=0$.

定义 8 设 T 是域 K 上的李 color 三系, 且 $\varphi\trianglelefteq T$, 定义 φ 的导出列为: $\varphi^{(0)}=\varphi$, $\varphi^{(1)}=[\varphi^{(0)},T,\varphi^{(0)}],\cdots,\varphi^{(n+1)}=[\varphi^{(n)},T,\varphi^{(n)}]$. 如果存在 m, 使得 $\varphi^{(m)}=0$, 则称 φ 是可解的.

定义 9 设 T 是李 color 三系, 次数为 0 的线性变换 $\sigma: T\to T$, 若 $\sigma([x,y,z])=[\sigma(x),\sigma(y),\sigma(z)]$, 则称 σ 是李 color 三系 T 的自同态.

引理 1[7] 设 T 是域 K 上的李 color 三系, 且 $\varphi\trianglelefteq T$, 记 $I(\varphi)=\varphi+L[\varphi,T]$. 如果 $\varphi\trianglelefteq T$, 则 $I(\varphi)<L_s(T)$. 记 $J(\varphi)=\varphi+j(\varphi)$, $j(\varphi)=\{A\in L(T,T)\,|\,AJ\subseteq\varphi\}$, 则 $J(\varphi)\trianglelefteq L_s(T)$.

2 主要结果

命题 1 设 $\mathscr{R}\trianglelefteq L_s(T)$, $\varphi\trianglelefteq T$, 且 $\alpha,\beta\trianglelefteq T$, 对所有的非负整数 n, 有:

1) 如果 $\varphi^n\trianglelefteq T$, 则 $\varphi^{n+1}\subseteq\varphi^n$;

2) $(\mathscr{R}\cap T)^n\subseteq\mathscr{R}^n\cap T$;

3) $(\alpha+\beta)^n\subseteq\alpha^n+\beta^n+\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha^k\cap\beta^{n-1-k})$;

4) $I(\varphi)^{2n}\subseteq I(\varphi^n)$;

5) $J(\varphi)^1\subseteq I(\varphi)$.

证明: 1) 对 n 用归纳法. 当 $n=0$ 时, 根据假设有 $\varphi^0=\varphi$, $\varphi^0\trianglelefteq T$, $\varphi^1\subseteq\varphi^0$. 假设 $\varphi^n\trianglelefteq T$, 则

$$\begin{aligned}[\varphi^{n+1},T,T]=&[[\varphi^n,T,T],T,T]+[[\varphi,T,\varphi^n],T,\varphi]\subseteq\\&[\varphi^n,T,[\varphi,T,\varphi]]+[\varphi,[\varphi^n,T,T],T]+[\varphi,T,[\varphi^n,T,\varphi]]+\\&[\varphi,T,[\varphi^n,T,T]]+[\varphi^n,[\varphi,T,T],T]+[\varphi^n,T,[\varphi,T,T]]\subseteq\\&[\varphi^n,T,\varphi]+[\varphi,\varphi^n,T]+[\varphi,T,\varphi^n]+[\varphi,T,\varphi^n]+[\varphi^n,\varphi,T]+[\varphi^n,T,\varphi]=\\&\varphi^{n+1}+[\varphi,\varphi^n,T]+[\varphi^n,\varphi,T]+\varphi^{n+1}\subseteq\varphi^{n+1}.\end{aligned}$$

综上可得, $\varphi^n\trianglelefteq T$, $\varphi^{n+1}\subseteq\varphi^n$.

2) 因为 $\mathscr{R}\cap T\trianglelefteq T$, 由 1) 可得 $(\mathscr{R}\cap T)^n\trianglelefteq T$.

下证 $(\mathscr{R}\cap T)^n\trianglelefteq\mathscr{R}^n$. 对 n 使用归纳法. 当 $n=0$ 时, 根据已知 $(\mathscr{R}\cap T)^0=\mathscr{R}\cap T$, 则有 $(\mathscr{R}\cap T)^0\subseteq\mathscr{R}$. 假设有 $(\mathscr{R}\cap T)^n\trianglelefteq\mathscr{R}^n\cap T$, 根据李 color 代数定义可得,

$$[P,[M,N]]\subseteq[[P,M],N]+[M,[P,N]],$$

其中 P,M,N 是李 color 代数的子空间.

对 Z 的任意两个理想 W,V, 因为

$$[Z,[W,V]]\subseteq[[Z,W],V]+[W,[Z,V]]\subseteq[W,V]+[W,V]=[W,V],$$

所以 $[W,V]$ 是 Z 的理想, 则可得 $\mathscr{R}^n\trianglelefteq L_s(T)$. 于是, 有

$$\begin{aligned}(\mathscr{R}\cap T)^{n+1}=&[(\mathscr{R}\cap T)^n,T,\mathscr{R}\cap T]+[\mathscr{R}\cap T,T,(\mathscr{R}\cap T)^n]\subseteq\\&[\mathscr{R}^n\cap T,T,\mathscr{R}\cap T]+[\mathscr{R}\cap T,T,\mathscr{R}^n\cap T]=\\&[\mathscr{R}^n\cap T,[T,\mathscr{R}\cap T]]+[\mathscr{R}\cap T,[T,\mathscr{R}^n\cap T]]\subseteq\\&[\mathscr{R}^n,\mathscr{R}]+[\mathscr{R},\mathscr{R}^n]\subseteq\mathscr{R}^{n+1}.\end{aligned}$$

3) 因为 $[\alpha^n,T,\beta]\subseteq[\alpha^n,T,T]=\alpha^n$, 且 $[\alpha^n,T,\beta]\subseteq[T,T,\beta]=\beta$, 所以 $[\alpha^n,T,\beta]\subseteq\alpha^n\cap\beta$. 同理 $[\beta,T,\alpha^2]\subseteq\alpha^n\cap\beta$.

对 n 用归纳法. 当 $n=0$ 时, 显然成立. 假设 $(\alpha+\beta)^n\subseteq\alpha^n+\beta^n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}(\beta^k\cap\beta^{n-1-k})$, 则

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^{n+1}=&[(\alpha+\beta)^n,T,\alpha+\beta]+[\alpha+\beta,T,(\alpha+\beta)^n]\subseteq\\&\Big[\alpha^n+\beta^n+\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha^k\cap\beta^{n-1-k}),T,\alpha+\beta\Big]+\Big[\alpha+\beta,T,\alpha^n+\beta^n+\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha^k\cap\beta^{n-1-k})\Big]=\\&[\alpha^n,T,\alpha]+[\alpha^n,T,\beta]+[\beta^n,T,\alpha]+[\beta^n,T,\beta]+\\&\Big[\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha^k\cap\beta^{n-1-k}),T,\alpha+\beta\Big]+[\alpha,T,\alpha^n]+[\beta,T,\alpha^n]+\\&[\alpha,T,\beta^n]+[\beta,T,\beta^n]+\Big[\alpha+\beta,T,\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha^k\cap\beta^{n-1-k})\Big]\subseteq\\&\alpha^{n+1}+\alpha^n\cap\beta+\beta^n\cap\alpha+\beta^{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha^k\cap\beta^{n-1-k})=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\sum_{k=0}^{n}(\alpha^k\cap\beta^{n-1-k}).\end{aligned}$$

综上可得

$$(\alpha+\beta)^n\subseteq\alpha^n+\beta^n+\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha^k\cap\beta^{n-1-k}).$$

4) 对 n 用归纳法. 当 $n=0$ 时, 显然成立.

假设 $I(\varphi)^{2n}\subseteq I(\varphi^n)$, 则

$$\begin{aligned}I(\varphi)^{2n+1}=&[I(\varphi)^{2n},I(\varphi)]\subseteq[I(\varphi^n),I(\varphi)]=[\varphi^n+L(\varphi^n,T),\varphi+L(\varphi,T)]\subseteq\\&[L(\varphi^n,T),L(\varphi,T)]+L(\varphi^n,\varphi)+L(\varphi^n,T)(\varphi)+L(\varphi,T)(\varphi^n)=\\&[L(\varphi^n,T),L(\varphi,T)]+L(\varphi^n,\varphi)+(\varphi^n,T,\varphi)+(\varphi,T,\varphi^n)\subseteq\\&\varphi^{n+1}+L(\varphi^n,\varphi)+L([\varphi^n,T,\varphi],T)+L(\varphi,[\varphi^n,T,T])+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{n+1}+L(\varphi^{n},\varphi)+L(\varphi^{n+1},T);\\
I(\varphi)^{2n+2}=&[I(\varphi)^{2n+1},I(\varphi)]\subseteq[\varphi^{n+1}+L(\varphi^{n},\varphi)+L(\varphi^{n+1},T),\varphi\oplus L(\varphi,T)]\subseteq\\
&L(\varphi^{n+1},\varphi)+[L(\varphi^{n},\varphi)+L(\varphi^{n+1},T),L(\varphi,T)]+\\
&(L(\varphi^{n},\varphi)+L(\varphi^{n+1},T))(\varphi)+L(\varphi,T)(\varphi^{n+1})=\\
&L(\varphi^{n+1},\varphi)+[L(\varphi^{n},\varphi),L(\varphi,T)]+[L(\varphi^{n+1},T),L(\varphi,T)]+\\
&(\varphi^{n},\varphi,\varphi)+(\varphi^{n+1},T,\varphi)+(\varphi,T,\varphi^{n+1})\subseteq\\
&\varphi^{n+1}+L(\varphi^{n+1},\varphi)+L([\varphi^{n},\varphi,\varphi],T)+L(\varphi,[\varphi^{n},\varphi,T])+\\
&L([\varphi^{n+1},T,\varphi],T)+L(\varphi,[\varphi^{n+1},T,T])\subseteq\varphi^{n+1}+L(\varphi^{n+1},T)=I(\varphi^{n+1});
\end{aligned}
$$

5）
$$
\begin{aligned}
J(\varphi)^{1}=&[J(\varphi),J(\varphi)]=[\varphi+j(\varphi),\varphi+j(\varphi)]\subseteq\\
&[j(\varphi),j(\varphi)]+L(\varphi,\varphi)+j(\varphi)(\varphi)\subseteq[L(T,T),j(\varphi)]+L(\varphi,T)+\varphi\subseteq\\
&\varphi+L(\varphi,T)+L(j(\varphi),T,T)\subseteq L(\varphi,T)=I(\varphi).
\end{aligned}
$$

定理 1[7]　假设 Ψ 是李 color 代数，且 $\mathscr{R}\trianglelefteq\Psi$，则 $\mathscr{R}$ 是李 color 代数 Ψ 的幂零理想，当且仅当 $\mathscr{R}$ 是李 color 三系 Ψ 的幂零理想，其中 $[x,y,z]=[x,[y,z]]$.

3　T 的诣零根

命题 2　设 T 是域 K 上的李 color 三系.

1）如果 $\varphi\trianglelefteq T$，则 φ 是 T 的幂零理想当且仅当 $I(\varphi)$ 是幂零的；

2）$N(L_s(T))\cap T$ 是 T 的唯一最大幂零理想；

3）如果 φ 和 ψ 是 T 的幂零理想，则 $\varphi+\psi$ 是 T 的幂零理想.

证明：1）必要性. 如果 φ 是 T 的幂零理想，则存在 m，使得 $\varphi^{m}=0$. 根据命题 1 中 4）可得，$I(\varphi)^{2m}\subseteq I(\varphi^{m})=0$，所以 $I(\varphi)$ 是幂零的.

充分性. 如果 $I(\varphi)$ 是幂零的，则存在 m，使得 $I(\varphi)^{m}=0$. 根据命题 1 中 2），

$$\varphi^{m}=(I(\varphi)\cap T)^{m}\subseteq I(\varphi)^{m}\cap T=0,$$

所以 φ 是 T 的幂零理想.

2）因为 $N(L_s(T))$ 是 $L_s(T)$ 的幂零理想，故由命题 1 中 2）可得，$N(L_s(T))\cap T$ 是 T 的幂零理想. 由 1）可知，如果 φ 是 T 的幂零理想，则 $I(\varphi)$ 是 $L_s(T)$ 的幂零理想. 因为 $N(L_s(T))\cap T$ 是诣零根，所以 $I(\varphi)\subseteq N(L_s(T))$，则 $\varphi=I(\varphi)\cap T\subseteq N(L_s(T))\cap T$，从而 $N(L_s(T))\cap T$ 是 T 的唯一最大幂零理想.

3）由 1）可得，如果 φ 和 ψ 是 T 的幂零理想，则 $I(\varphi)$ 和 $I(\psi)$ 也都是 $L_s(T)$ 的幂零理想，从而有 $I(\varphi)\subseteq N(L_s(T))$，且 $I(\psi)\subseteq N(L_s(T))$. 于是，有

$$
\begin{aligned}
I(\varphi+\psi)=&(\varphi+\psi)+L[\varphi+\psi,T]=\varphi+\psi+L[\varphi+\psi]+L[\psi,T]=\\
&(\varphi+L[\varphi,T])+(\psi+L[\psi,T])=I(\varphi)+I(\psi)\subseteq N(L_s(T)).
\end{aligned}
$$

由命题 1 中 2）可知，$\varphi+\psi$ 是 T 的幂零理想.

命题 3　1）T 是幂零的当且仅当 $L_s(T)$ 是幂零的；2）$N(T)=0$ 当且仅当 $N(L_s(T))=0$.

证明：1）因为 $I(T)=T+L[T,T]=L_s(T)$，故由命题 2 中 1）可得，T 是幂零的当且仅当 $L_s(T)$ 是幂零的.

2）充分性. 因为 $N(T)=N(L_s(T))\cap T$，当 $N(L_s(T))=0$ 时，有 $N(T)=0$. 必要性. 因为 $N(T)=N(L_s(T))\cap T$，当 $N(T)=0$ 时，有 $N(L_s(T))\subseteq L(T,T)$，因此 $N(L_s(T))$ 一定是 σ 下的不变量. 又因为在 $L_s(T)$ 中，有 $[T,N(L_s(T))]\subseteq T\cap N(L_s(T))=0$，因此 $N(L_s(T))$ 是 T 下的自同态，从而 $N(L_s(T))=0$.

定理 2　$Z(L_s(T))=Z(T)$.

证明：因为 $Z(L_s(T))$ 是 σ 下的不变量，因此

$$Z(L_s(T))=(Z(L_s(T))\cap T)\oplus(Z(L_s(T))\cap L(T,T)).$$

由于 $[T,Z(L_s(T))\cap L(T,T)]=0$，从而 $Z(L_s(T))\cap L(T,T)$ 是 T 上的自同态，其中 T 是 T 的不变量，

于是有 $Z(L_s(T))\cap L(T,T)=0$, 且 $Z(L_s(T))\subseteq T$. 如果 $x\in Z(L_s(T))$, 且 $y,z\in T$, 则

$$L(x,y)=[x,y]\in Z(L_s(T))\cap L(T,T),$$

因此 $L(x,y)=0$, 且$[x,y,z]=L(x,y)z=0$, 从而 $x\in Z(T)$, 于是$Z(L_s(T))\subseteq Z(T)$. 又因为

$$[Z(T),L(T,T)]=[Z(T),T,T]=0,$$

从而 $Z(T)\subseteq Z(L_s(T))$, 因此$Z(L_s(T))=Z(T)$.

命题4 如果 $T\neq 0$ 是幂零的, 则 $Z(T)\neq 0$.

证明: 由命题3中1)可知, 如果 T 是幂零的, 则 $L_s(T)$是幂零的, 从而存在 m, 使得 $L_s(T)^m\neq 0$, 且 $L_s(T)^{m+1}=0$, 即 $L_s(T)^{m+1}=[L_s(T)^m,L_s(T)]$. 由李 color 代数中心的定义得, $L_s(T)^m\subseteq Z(L_s(T))$. 又因为 $Z(T)=Z(L_s(T))$, 因此 $L_s(T)^m\subseteq Z(T)\neq 0$.

命题5 若 $T/Z(T)$是幂零的, 则 T 是幂零的.

证明: 由命题3中1)可知, 如果 $T/Z(T)$是幂零的, 则 $L_s(T/Z(T))$是幂零的. 又由定理2知, $Z(L_s(T))=Z(T)$, 所以

$$L_s(T)/Z(L_s(T))=L_s(T)/Z(T)\cong L_s(T/Z(T))$$

是幂零的. 因此, 存在 m, 使得 $L_s(T)^m\subseteq Z(L_s(T))$. 又因为

$$L_s(T)^{m+1}=[L_s(T)^m,L_s(T)]\subseteq[Z(L_s(T)),L_s(T)]=0,$$

因此 $L_s(T)$是幂零的. 由命题3中1)可知 T 是幂零的.

定理3 T 是域 K 上的李 color 三系, φ 是 T 的幂零理想, 则 φ 一定是可解的.

证明: 先证 $\varphi^{(n)}\subseteq\varphi^n$. 对 n 用归纳法. 当 $n=0$ 时, $\varphi^{(0)},\varphi^0=\varphi$. 所以 $\varphi^{(0)}=\varphi^0$. 当 $n=1$ 时,

$$\varphi^{(1)}=[\varphi^{(0)},T,\varphi^{(0)}]=[\varphi,T,\varphi],\qquad \varphi^1=[\varphi^0,T,\varphi]+[\varphi,T,\varphi^0]=[\varphi,T,\varphi],$$

所以 $\varphi^{(1)}=\varphi^1$. 当 $n=2$ 时,

$$\varphi^{(2)}=[\varphi^{(1)},T,\varphi^{(1)}],\qquad \varphi^2=[\varphi^1,T,\varphi]+[\varphi,T,\varphi^1].$$

又因为 $\varphi^{n+1}\subseteq\varphi^n$, 所以可得 $\varphi^{(2)}\subseteq\varphi^2$. 假设 $\varphi^{(n)}\subseteq\varphi^n$, 则

$$\varphi^{(n+1)}=[\varphi^{(n)},T,\varphi^{(n)}],\ \varphi^{n+1}=[\varphi^n,T,\varphi]+[\varphi,T,\varphi^n].$$

因为 $\varphi^{(n)}\subseteq\varphi^n$, 所以有

$$[\varphi^{(0)},T,\varphi^{(0)}]\subseteq[\varphi^n,T,\varphi^n]\subseteq[\varphi^n,T,\varphi]\subseteq\varphi^{(n+1)},$$

从而 $\varphi^{(n+1)}\subseteq\varphi^{n+1}$. 因此, 如果$\varphi$ 是 T 的幂零理想, 则 φ 一定是可解的.

参 考 文 献

[1] Scheunert M. Generalized Lie Algebras [J]. J Math Phys, 1979, 20: 712-720.

[2] SU Yu-cai, ZHAO Kai-ming, ZHU Lin-sheng. Simple Lie Color Algebras of Weyl Type [J]. Israel J Math, 2003, 137(1): 109-123.

[3] SU Yu-cai, ZHAO Kai-ming, ZHU Lin-sheng. Classification of Derivation-Simple Color Algebras Related to Locally Finite Derivations [J]. J Math Phys, 2004, 45(1): 525-536.

[4] Lister W G. A Structure Theory of Lie Triple Systems [J]. Trans Amer Math Soc, 1952, 72(2): 217-242.

[5] Jacobson N. Lie and Jordan Triple Systems [J]. Amer J Math, 1949, 71(1): 149-170.

[6] Yamaguti K. On Algebra of Totally Geodesic Spaces, Lie Triple Systems [J]. J Sci Hiroshima Univ: Ser A, 1967, 21: 155-159.

[7] Hopkins N C. Nilpotent Ideals in Lie and Anti-Lie Triple Systems [J]. J Algebra, 1995, 178(2): 480-492.

[8] WU Han, REN Li, ZHANG Yong-zheng. The Killing Model and Ideal of (p,q) Type Lorentz Lie Algebra over Rings [J]. Journal of Northeast Normal University: Natural Science Edition, 2010, 42(1): 1-4. (吴晗, 任丽, 张永正. 环上(p,q)型 Lorentz 李代数的 Killing 型与理想 [J]. 东北师大学报: 自然科学版, 2010, 42(1): 1-4.)