第50卷 第3期 吉林大学学报(理学版) Vol. 50 No. 3
2012年5月 Journal of Jilin University (Science Edition) May 2012

# 具有常余维数 $2^k+7$ 不动点集的 $(Z_2)^k$ 作用

何江彦[1], 丁雁鸿[2], 冯杏芳[1]
(1. 军械工程学院 基础部, 石家庄 050003; 2. 河北师范大学 数学与信息科学学院, 石家庄 050016)

**摘要**: 设 $(Z_2)^k$ 作用于光滑闭流形 $M^n$ 上, 其不动点集具有常维数 $n-r$, $J^r_{n,k}$ 是具有上述性质未定向的 $n$ 维协边类 $[M^n]$ 构成的集合, $J^r_{*,k}=\sum\limits_{n\geqslant r}J^r_{n,k}$ 为未定向协边环 $MO_*=\sum\limits_{n\geqslant 0}MO_n$ 的理想. 通过构造 $MO_*$ 的一组生成元证明了 $J^{2^k+7}_{*,k}(k\geqslant 5)$ 由所有维数大于 $2^k+7$ 且模2欧拉示性数为0的协边类及分解式中每个因子的维数都小于 $2^k$ 的 $2^k+7$ 维可分解协边类构成.

**关键词**: $(Z_2)^k$ 作用; 协边类; 不动点集; 射影空间丛
**中图分类号**: O189.3 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2012)03-0439-06

# $(Z_2)^k$-Actions with Fixed Point Set of Constant Codimension $2^k+7$

HE Jiang-yan[1], DING Yan-hong[2], FENG Xing-fang[1]
(1. *Department of Foundation*, *Ordnance Engineering College*, *Shijiazhuang* 050003, *China*;
2. *College of Mathematics and Information Science*, *Hebei Normal University*, *Shijiazhuang* 050016, *China*)

**Abstract**: Let $J^r_{n,k}$ denote the set of $n$-dimensional cobordism classes containing a representative $M^n$ admitting a $(Z_2)^k$-action with fixed point set of constant codimension $r$. $J^r_{*,k}=\sum\limits_{n\geqslant r}J^r_{n,k}$ is an idea of the unoriented cobordism ring $MO_*=\sum\limits_{n\geqslant 0}MO_n$. The authors constructed the special generators of $MO_*$ to prove that $J^{2^k+7}_{*,k}(k\geqslant 5)$ consists of all classes of dimension greater than $2^k+7$ with 0 mod 2 Euler characteristic and the decomposables of dimension $2^k+7$ in which each factor of monomials has dimension less than $2^k$.

**Key words**: $(Z_2)^k$-action; cobordism class; fixed point set; projective space bundle

## 0 引 言

设 $\phi$: $(Z_2)^k\times M^n\to M^n$ 是群 $(Z_2)^k=\{T_1,T_2,\cdots,T_k\mid T_i^2=1,\ T_iT_j=T_jT_i\}$ 在光滑闭流形 $M^n$ 上的光滑作用, 其不动点集 $F$ 是 $M^n$ 的有限个闭子流形的不交并. 若 $F$ 的每个分支具有常维数 $n-r$, 则称 $F$ 具有常余维数 $r$. 设 $J^r_{n,k}$ 是具有上述性质未定向的 $n$ 维协边类 $[M^n]$ 构成的集合, 且 $J^r_{*,k}=\sum\limits_{n\geqslant r}J^r_{n,k}$, 由文献[1]知 $J^r_{n,k}$ 是未定向协边群 $MO_n$ 的子群, $J^r_{*,k}$ 是协边环 $MO_*=\sum\limits_{n\geqslant 0}MO_n$ 的理想, 且 $J^r_{*,k}\subset J^r_{*,k+1}$, $J^r_{*,k}J^{r'}_{*,k}\subset J^{r+r'}_{*,k}$. 对于 $1\leqslant r\leqslant 2^k$, 文献[2-3]确定了 $J^r_{*,k}$ 的结构; 对于 $r=2^k+1$, $r=2^k+2$, $r=2^k+3$, $r=2^k+4$, $r=2^k+5$, $r=2^k+6$, 文献[4-9]确定了 $J^r_{*,k}$ 的结构. 本文研究 $J^{2^k+7}_{*,k}$ 的结构, 得到如下结果:

**定理1** 设 $k\geqslant 5$, $x_n(n\neq 2^u-1)$ 是 $MO_*$ 的一组生成元, 则有

**收稿日期**: 2011-06-07.
**作者简介**: 何江彦(1982—), 女, 汉族, 硕士研究生, 讲师, 从事代数拓扑和微分拓扑的研究, E-mail: hezifan123@yahoo.com.cn.
**基金项目**: 国家自然科学基金(批准号: 10971050)、河北省自然科学基金(批准号: A2011205075)和河北师范大学一般科研基金(批准号: L2008Y01).

$$J_{n,k}^{2^k+7}=\begin{cases}MO_n\cap\operatorname{Ker}\chi, & n\geqslant 2^k+8,\\ \{\sum x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\,|\,2\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_m<2^k,\ m\geqslant 2\}, & n=2^k+7,\end{cases}$$

其中$\chi$: $MO_*\to Z_2$ 表示模2欧拉示性数.

**定理2** 设$k=4$, $n\geqslant 32$, 则$J_{n,k}^{2^k+7}=MO_n\cap\operatorname{Ker}\chi$.

本文所提到的流形均为光滑流形, 其上的群作用均为光滑作用.

## 1 预备知识

记号: $Z_2$ 表示模2整数; $\equiv$表示模2同余; 二项式系数$\binom{m}{n}=\dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$; $RP(n)$为$n$维实射影空间; $MO_*=\sum\limits_{n\geqslant 0}MO_n$为未定向协边环; $[M]$表示$M$所在协边类. 本文均用模2系数.

$MO_*$是$Z_2$上的多项式代数, 在每个不是$2^u-1$形式的维数上有一个生成元. 如果协边类$[M^n]$可以表示为更低维协边类的乘积之和, 则称$[M^n]$为可分解的; 否则, 称其为不可分解的. 不可分解的协边类可取为$MO_*$的生成元.

**引理1**[10] 设$RP(n_1,n_2,\cdots,n_l)$是$\lambda_1\oplus\lambda_2\oplus\cdots\oplus\lambda_l\to RP(n_1)\times RP(n_2)\times\cdots\times RP(n_l)$的射影丛, 其中$\lambda_i$为第$i$个因子$RP(n_i)$上的典范线丛的导出丛. 则当$l>1$时, $RP(n_1,n_2,\cdots,n_l)$不可分解的充要条件是

$$\binom{n+l-2}{n_1}+\binom{n+l-2}{n_2}+\cdots+\binom{n+l-2}{n_l}\equiv 1 \bmod 2,$$

其中$n=n_1+n_2+\cdots+n_l$.

流形$RP(n_1,n_2,\cdots,n_l)$的维数为$n+l-1$. 当$n_{i+1}=n_{i+2}=\cdots=n_l=0$时, $RP(n_1,n_2,\cdots,n_l)$简记为$RP(n_1,n_2,\cdots,n_i;l)$.

**引理2**[2] 设$\sum\limits_{i=1}^{l}2^{k_i}\leqslant 2^k(k_i\geqslant 0)$, $(Z_2)^{k_i}$作用于线丛$\lambda_i\to X_i$($X_i$为光滑闭流形), 在$X_i$上作用的不动点集是$F_i$, 则$RP(\lambda_1\oplus\lambda_2\oplus\cdots\oplus\lambda_l)$上具有$(Z_2)^k$作用, 不动点集为$F_1\times F_2\times\cdots\times F_l\times E$, 其中$E$是$l$个点构成的集合.

文献[11]定义了广义Dold流形: 对拓扑空间$X$及正整数$m$, 定义$S^m\times X\times X$上的对合$T$为$T(u,x,y)=(-u,y,x)$, 将$(S^m\times X\times X)/T$记为$P(m,X)$. 若$X$为$n$维流形, 则$P(m,X)$为$m+2n$维流形. 并证明了:

**引理3**[11] $[P(m,M^n)]$为$MO_*$中的不可分解元当且仅当$[M^n]$不可分解, 且$\binom{m+n-1}{m-1}\equiv 1 \bmod 2$.

**引理4**[6] 对$l+3\leqslant 2^k$, $[RP(3m+2,n_2,n_3,\cdots,n_l)]\in J_{*,k}^{2m+l+1}$.

**引理5**[6] 对$l+1\leqslant 2^k$, $[RP(2m+1,n_2,n_3,\cdots,n_l)]\in J_{*,k}^{m+l}$.

## 2 定理的证明

**引理6** 对$k\geqslant 6$, $n\geqslant 2^k+9$, $n$为奇数且$n\neq 2^u-1$, 则存在不可分解元$x_n\in J_{n,k}^{2^k+7}$.

证明: 1) $n=2^k+9$. 取$x_n=[RP(20;2^k-10)]$. 由引理1知, $x_n$是不可分解的. 在$RP(20)$上建立$(Z_2)^3$作用, 其中$T_j(1\leqslant j\leqslant 3)$作用在$RP(20)$上为在$y_i$上乘以$-1$, 若$i=1,2,\cdots,2^j+2^{j-1} \bmod 2^{j+1}+2^j$, 则$(T_1,T_2,T_3)$在$RP(20)$上的不动点集为7个$RP(2)$; 令$(Z_2)^0$作用在其余因子上是恒同, 又$2^3+2^k-11=2^k-3<2^k$. 由引理2知, $x_n$的不动点集为$\cup RP(2)\times RP(0)\times\cdots\times RP(0)\times E$, 是2维的. 所以余维数是$r=2^k+9-2=2^k+7$, 即$x_n\in J_{n,k}^{2^k+7}$.

2) $n=2^k+11$. 由文献[5]中$J_{*,k}^{2^k+2}$的构成知, 存在$2^{k-1}+5$维的不可分解元$\alpha_{2^{k-1}+5}\in J_{2^{k-1}+5,k-1}^{2^{k-1}+2}$, 故存在$\alpha_{2^{k-1}+5}$的代表元$M^{2^{k-1}+5}$及其上的可换对合$T_1',T_2',\cdots,T_{k-1}'$, 使得其不动点集$F'$的维数为3. 考虑

广义 Dold 流形 $P(1,M)=S^1\times M^{2^{k-1}+5}\times M^{2^{k-1}+5}/T$，在 $S^1\times M^{2^{k-1}+5}\times M^{2^{k-1}+5}$ 上定义可换对合 $T_1,T_2,\cdots,T_k$ 如下：

$$T_1(u,x,y)=(-u,x,y),\ T_2(u,x,y)=(-u,T_1'(x),T_1'(y)),\ \cdots,\ T_k(u,x,y)=(-u,T_{k-1}'(x),T_{k-1}'(y)).$$

$T_i$ 均与 $T$ 可换，因此在 $P(1,M^{2^{k-1}+5})$ 上导出相应的对合，其不动点集为 $F=S^1\times\Delta(F'\times F')/T$，是 4 维的，其中 $\Delta(F'\times F')=\{(x,x)\,|\,x\in F'\}$ 为对角线集，且 $P(1,M^{2^{k-1}+5})$ 的维数为 $1+2\times(2^{k-1}+5)=2^k+11$ 维；又因 $M^{2^{k-1}+5}$ 是不可分解的，且 $\binom{1+2^{k-1}+5-1}{1-1}\equiv 1 \bmod 2$. 由引理 3 知，$P(1,M^{2^{k-1}+5})$ 是不可分解的. 综上可知 $[P(1,M^{2^{k-1}+5})]\in J_{n,k}^{2^k+7}$.

3）当 $n=2^k+13$ 时，取 $x_n=[RP(20;2^k-6)]$；当 $n=2^k+15$ 时，取 $x_n=[RP(20,n-2^k-13;2^k-6)]$；当 $2^k+17\leqslant n<2^k+2^{k-1}-1$ 时，令 $n=2^k+2^{r_m}+\cdots+2^{r_1}$，$k-2\geqslant r_m>\cdots>r_1=0$，取 $x_n=[RP(2^{r_m+1}+2^{r_m}-16,n-2^k-2^{r_m}-1;\ 2^k-2^{r_m+1}+18)]$；当 $n=2^k+2^{k-1}-1$ 时，取 $x_n=[RP(2^{k-1}+2^{k-2}-4,n-2^k-2^{k-2}-5;2^k-2^{k-1}+10)]$，由引理 1 得，$x_n$ 是不可分解的，又由引理 4 知，$x_n\in J_{n,k}^{2^k+7}$.

4）当 $2^k+2^{k-1}+1\leqslant n<2^{k+1}-1$ 时，取 $x_n=[RP(2^k-15,n-2^k-2^{k-1}+1;2^{k-1}+15)]$；当 $2^{k+1}+1\leqslant n<2^{k+2}-1$ 时，取 $x_n=[RP(2^{k+1}-15,n-2^{k+1}+1;15)]$，由引理 1 知，$x_n$ 是不可分解的，又由引理 5 知，$x_n\in J_{n,k}^{2^k+7}$.

5）$n\geqslant 2^{k+2}+1$. 由文献[6]中引理 3.1 知，存在不可分解元 $x_n\in J_{n,k}^{2^k+7}$.

**引理 7**　对 $k\geqslant 6$，$n\geqslant 2^k+8$，$n$ 为偶数，则存在不可分解元 $x_n\in J_{n,k}^{2^k+7}$.

证明：1）$n=2^k+8$. 取 $x_n=[RP(31;2^k-22)]$，由引理 1 知，$x_n$ 是不可分解的. 在 $RP(31)$ 上建立 $(Z_2)^4$ 作用，使得不动点集为 16 个 $RP(1)$，令 $(Z_2)^0$ 作用在其余因子上是恒同，由引理 2 知 $x_n$ 的不动点集是 1 维的，所以余维数为 $r=2^k+7$，即 $x_n\in J_{n,k}^{2^k+7}$.

2）$n=2^k+10$. 取 $x_n=[RP(15;2^k-4)]$，由引理 1 得，$x_n$ 是不可分解的. 在 $RP(15)$ 上建立 $(Z_2)^2$ 作用，使得不动点集为 4 个 $RP(3)$，令 $(Z_2)^0$ 作用在其余因子上是恒同，由引理 2 知 $x_n$ 的不动点集是 3 维的，所以余维数为 $r=2^k+7$，即 $x_n\in J_{n,k}^{2^k+7}$.

3）$n=2^k+12$，$2^k+14$. 分别取 $x_n=[RP(17;2^k-4)]$，$[RP(23;2^k-8)]$，由引理 1 知，$x_n$ 是不可分解的，由引理 4 知，$x_n\in J_{n,k}^{2^k+7}$.

4）当 $2^k+16\leqslant n\leqslant 2^{k+1}-2$ 时，取 $x_n=[RP(2n-2^{k+1}-13;2^{k+1}-n+14)]$；当 $n=2^{k+1}$ 时，取 $x_n=[RP(2^k+1,2^{k-1}-7;2^{k-1}+7)]$；当 $2^{k+1}+2\leqslant n\leqslant 2^{k+2}-10$ 时，取 $x_n=[RP(2^{k+1}-9,n-2^{k+1}-2;12)]$；当 $n=2^{k+2}-8$，$2^{k+2}-6$，$2^{k+2}-4$，$2^{k+2}-2$ 时，分别取 $x_n=[RP(2^{k+1}-13,2^{k+1}-8;14)]$，$[RP(2^{k+1}-9,2^{k+1}-8;12)]$，$[RP(2^{k+1}-9,2^{k+1}-6;12)]$，$[RP(2^{k+1}-9,2^{k+1}-4;12)]$. 由引理 1 知，$x_n$ 是不可分解的，由引理 5 知，$x_n\in J_{n,k}^{2^k+7}$.

5）$n\geqslant 2^{k+2}$. 由文献[6]中引理 3.1 知，存在不可分解元 $x_n\in J_{n,k}^{2^k+7}$.

**引理 8**　对 $k=5$，$n\geqslant 41$，$n$ 为奇数且 $n\neq 2^u-1$，则存在不可分解元 $x_n\in J_{n,k}^{2^k+7}$.

证明：1）$n=41$. 取 $x_n=[RP(20;22)]$. 由引理 1 知 $x_n$ 是不可分解的. 在 $RP(20)$ 上建立 $(Z_2)^3$ 作用，使得不动点集为 7 个 $RP(2)$，令 $(Z_2)^0$ 作用在其余因子上是恒同. 又 $2^3+2^k-11<2^k$，由引理 2 知，$x_n$ 的不动点集是 2 维的. 所以余维数为 $r=39$，即 $x_n\in J_{n,5}^{39}$.

2）$n=43$. 取 21 维的不可分解元 $\alpha_{21}$，由文献[5]中 $J_{*,k}^{2^k+2}$ 的构成知，$\alpha_{21}\in J_{21,4}^{18}$，故存在 $\alpha_{21}$ 的代表元 $M^{21}$ 及其上的可换对合 $T_1',T_2',T_3',T_4'$，使得其不动点集 $F'$ 的维数为 3，考虑广义 Dold 流形 $P(1,M)=S^1\times M^{21}\times M^{21}/T$，在 $S^1\times M^{21}\times M^{21}/T$ 上定义可换对合 $T_1,T_2,T_3,T_4,T_5$ 如下：

$$T_1(u,x,y)=(-u,x,y),\quad T_2(u,x,y)=(u,T_1'(x),T_1'(y)),\quad T_3(u,x,y)=(u,T_2'(x),T_2'(y)),$$
$$T_4(u,x,y)=(u,T_3'(x),T_3'(y)),\qquad T_5(u,x,y)=(u,T_4'(x),T_4'(y)).$$

$T_i$ 均与 $T$ 可换, 因此在 $P(1,M^{21})$ 上导出相应的对合, 其不动点集为 $F=S^1\times\Delta(F'\times F')/T$, 是4维的, 其中 $\Delta(F'\times F')=\{(x,x)\mid x\in F'\}$ 为对角线集, 且 $P(1,M^{21})$ 的维数为43; 又因 $M^{21}$ 是不可分解的, 且 $\begin{pmatrix}1+21-1\\1-1\end{pmatrix}\equiv 1 \bmod 2$. 由引理3知, $P(1,M^{21})$ 是不可分解的. 综上可知 $[P(1,M^{21})]\in J^{39}_{n,5}$.

3) $n=45,47$. 分别取 $x_n=[RP(20;26)],[RP(20,2;26)]$, 由引理1知, $x_n$ 是不可分解的, 由引理4知, $x_n\in J^{39}_{n,5}$.

4) 当 $49\leqslant n<63$ 时, 取 $x_n=[RP(17,n-47;31)]$(可列入 $k\geqslant 5$ 内); 当 $65\leqslant n<127$ 时, 取 $x_n=[RP(49,n-63;15)]$(可列入 $k\geqslant 5$ 内), 由引理1知, $x_n$ 是不可分解的, 由引理5知, $x_n\in J^{39}_{*,k}$.

5) $n\geqslant 2^{5+2}+1=129$. 由文献[6]中引理3.1知, 存在不可分解元 $x_n\in J^{39}_{n,k}$.

**引理9** 对 $k=5$, $n\geqslant 40$, $n$ 为偶数, 存在不可分解元 $x_n\in J^{2^k+7}_{n,k}$.

证明: 1) $n=40$. 取 $x_n=[RP(31;10)]$, 由引理1知, $x_n$ 是不可分解的. 在 $RP(31)$ 上建立 $(Z_2)^4$ 作用, 使得不动点集为16个 $RP(1)$, 令 $(Z_2)^0$ 作用在其余因子上是恒同, 由引理2知, $x_n$ 的不动点集是1维的. 所以余维数为 $r=39$, 即 $x_n\in J^{39}_{n,5}$.

2) $n=42$. 取 $x_n=[RP(15;28)]$, 由引理1得, $x_n$ 是不可分解的. 在 $RP(15)$ 上建立 $(Z_2)^2$ 作用, 使得不动点集为4个 $RP(3)$. 令 $(Z_2)^0$ 作用在其余因子上是恒同, 由引理2知, $x_n$ 的不动点集是3维的. 所以余维数为 $r=39$, 即 $x_n\in J^{39}_{n,5}$.

3) $n=44,46$. 分别取 $x_n=[RP(17;28)],[RP(23;24)]$, 由引理1知, $x_n$ 是不可分解的, 由引理4知, $x_n\in J^{39}_{n,5}$.

4) 当 $48\leqslant n\leqslant 62$ 时, 取 $x_n=[RP(2n-77;78-n)]$; 当 $n=64$ 时, 取 $x_n=[RP(33,9;23)]$; 当 $66\leqslant n\leqslant 126$ 时, 取 $x_n=[RP(55,n-66;12)]$. 由引理1知, $x_n$ 是不可分解的, 由引理5知, $x_n\in J^{39}_{n,k}$.

5) $n\geqslant 2^{5+2}=128$. 由文献[6]中引理3.1知, 存在不可分解元 $x_n\in J^{39}_{n,k}$.

**引理10** 对 $k=4$, $n\geqslant 33$, $n$ 为奇数且 $n\neq 2^u-1$, 则存在不可分解元 $x_n\in J^{2^k+7}_{n,k}$.

证明: 1) $n=33,35$. 分别取 $x_n=[RP(17,2;15)],[RP(17,4;15)]$, 由引理1知 $x_n$ 是不可分解的, 由引理4知 $x_n\in J^{23}_{n,k}$.

2) $37\leqslant n<63$. 取 $x_n=[RP(17,n-31;15)]$, 由引理1知 $x_n$ 是不可分解的, 由引理5知, $x_n\in J^{23}_{n,k}$.

**引理11** 对 $k=4$, $n\geqslant 32$, $n$ 为偶数, 存在不可分解元 $x_n\in J^{2^k+7}_{n,k}$.

证明: 1) $n=32$. 取 $x_n=[RP(17,1;15)]$. 由引理1知 $x_n$ 是不可分解的, 由引理4知 $x_n\in J^{23}_{n,k}$.

2) 当 $34\leqslant n\leqslant 54$ 时, 取 $x_n=[RP(2^5-9,n-2^5-2;12)]=[RP(23,n-34;12)]$; 当 $n=56,58,60,62$ 时, 分别取 $x_n=[RP(19,24;14)],[RP(23,24;12)],[RP(19,28;14)],[RP(21,29;13)]$, 由引理1知 $x_n$ 是不可分解的. 由引理5知 $x_n\in J^{23}_{n,k}$.

3) $n\geqslant 2^{4+2}$. 由文献[6]中引理3.1知, 存在不可分解元 $x_n\in J^{23}_{n,4}$.

下面证明定理1. 由文献[2]中引理2.1知, $J^{2^k+7}_{n,k}\subseteq MO_n\cap\operatorname{Ker}\chi$. 下面通过选取 $MO_*$ 的生成元证明 $MO_n\cap\operatorname{Ker}\chi\subseteq J^{2^k+7}_{n,k}$.

(i) 取 $x_2=[RP(2)]$, 则 $\chi(x_2)=1$. 又因为 $\chi(x_2^i)=1$, 因此有 $x_2\in J^2_{*,k}$, 且 $x_2^i\notin J^{2^k+7}_{*,k}$.

(ii) 对 $3\leqslant n\leqslant 2^k+1$, 且 $n\neq 2^u-1$, 选取不可分解元 $x_n$, 使得 $\chi(x_n)=0$(否则用 $x_n+x_2^{n/2}$ 取代 $x_n$). 由文献[2]中命题5.1知, 对 $2\leqslant r\leqslant\min(n,2^k-1)$, 有 $x_n\in J^r_{*,k}$; 由文献[3]中命题知, 对 $i\geqslant 1$, 有 $x_{2^k+i}\in J^{2^k}_{*,k}$.

(iii) 对 $n=2^k+2$ 或 $n=2^k+3$, 由文献[4]中 $J^{2^k+1}_{n,k}$ 的构成知, 存在不可分解元 $x_n\in J^{2^k+1}_{*,k}$, 且 $\chi(x_n)=0$.

(iv) 对 $n=2^k+4$ 或 $n=2^k+5$, 由文献[6]中 $J^{2^k+3}_{n,k}$ 的构成知, 存在不可分解元 $x_n\in J^{2^k+3}_{*,k}$, 且 $\chi(x_n)=0$.

(v) 对 $n=2^k+6$ 或 $n=2^k+7$, 由文献[8]中 $J_{n,k}^{2^k+5}$ 的构成知, 存在不可分解元 $x_n\in J_{*,k}^{2^k+5}$, 且 $\chi(x_n)=0$.

(vi) 对 $n\geqslant 2^k+8$, 且 $n\neq 2^u-1$, 取 $x_n$ 是引理6~引理9中的不可分解元, 则有 $x_n\in J_{*,k}^{2^k+7}$.

上述 $x_n$ 形成了 $MO_*$ 的生成元, 因为 $J_{*,k}^{2^k+7}$ 是 $MO_*$ 的一个理想, 为了证明定理1, 只需考虑形状为 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}(\neq x_2^m)$, 其中 $\sum_{j=1}^m i_j\geqslant 2^k+7$, $2\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_m\leqslant 2^k+7$ 的元素.

1) $i_1+i_2+\cdots+i_m>2^k+7$.

① 若 $i_m\geqslant 2^k+6$, 则由(v)知, $x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k+5}$, 又由(i)和(ii)知 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{m-1}}\in J_{*,k}^2$, 因此 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in J_{*,k}^2J_{*,k}^{2^k+5}\subset J_{*,k}^{2^k+7}$.

② 若 $i_m=2^k+5$, 此时 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-1}>2$, 因为 $2\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_m$. 所以 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-1}\geqslant 4$, 由(iv)知, $x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k+3}$, 又由(ii)知, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{m-1}}\in J_{*,k}^4$, 因此 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in J_{*,k}^4J_{*,k}^{2^k+3}\subset J_{*,k}^{2^k+7}$.

③ 若 $i_m=2^k+4$, 则 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-1}>3$, 因为 $2\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_m$, 所以此时有 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-1}\geqslant 4$. 由(iv)知, $x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k+3}$, 又由(ii)知, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{m-1}}\in J_{*,k}^4$, 因此 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in J_{*,k}^4J_{*,k}^{2^k+3}\subset J_{*,k}^{2^k+7}$.

④ 若 $i_m=2^k+3$, 则 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-1}>4$, 若 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-1}\geqslant 6$, 由(iii)知, $x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k+1}$, 又由(ii)知, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{m-1}}\in J_{*,k}^6$, 因此 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in J_{*,k}^6J_{*,k}^{2^k+1}\subset J_{*,k}^{2^k+7}$. 若 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-1}=5$, 则 $m=2$, 即考虑 $x_5x_{2^k+3}$. 由(ii)知, $x_5\in J_{*,k}^5$, 由文献[5]中定理1知, $x_{2^k+3}\in J_{*,k}^{2^k+2}$, 所以 $x_5x_{2^k+3}\in J_{*,k}^{2^k+7}$.

⑤ 若 $i_m=2^k+2$, 则 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-1}>5$, 因为 $2\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_m$. 所以 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-1}\geqslant 6$. 由(iii)知, $x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k+1}$, 又由(ii)知, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{m-1}}\in J_{*,k}^6$, 因此 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in J_{*,k}^6J_{*,k}^{2^k+1}\subset J_{*,k}^{2^k+7}$.

⑥ 若 $i_m=2^k+1$, 则 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-1}>6$.

(a) 若存在 $i_j\geqslant 3$, 则由(ii)知, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{m-1}}\in J_{*,k}^7$, $x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k}$, 因此 $x_{i_1}x_{i_2}\in J_{*,k}^7J_{*,k}^{2^k}\subset J_{*,k}^{2^k+7}$.

(b) 若不存在 $i_j\geqslant 3$, 即 $i_1=i_2=\cdots=i_{m-1}=2$, 因为 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-1}>6$, 因此 $m\geqslant 5$, 即存在 $i_1=i_2=i_3=i_4=2$, 则由(ii)知, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{m-1}}\in J_{*,k}^8$, $x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k-1}$, 因此 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in J_{*,k}^8J_{*,k}^{2^k-1}\subset J_{*,k}^{2^k+7}$.

⑦ 若 $i_m=2^k$, 则 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-1}>7$. 则由(ii)知, $x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k-1}$, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{m-1}}\in J_{*,k}^8$, 因此 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in J_{*,k}^8J_{*,k}^{2^k-1}\subset J_{*,k}^{2^k+7}$.

⑧ 若 $8\leqslant i_{m-1}\leqslant i_m\leqslant 2^k-1$, 则 $2^k+7-i_m<i_1+i_2+\cdots+i_{m-1}$, 且 $2^k+7-i_m\leqslant 2^k-1$. 由(ii)知, $x_{i_m}\in J_{*,k}^{i_m}$, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{m-1}}\in J_{*,k}^{2^k+7-i_m}$, 因此 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k+7-i_m}J_{*,k}^{i_m}\subset J_{*,k}^{2^k+7}$.

⑨ 若 $7=i_{m-1}\leqslant i_m\leqslant 2^k-1$, 则 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-2}+i_m>2^k+7-i_{m-1}=2^k$. 由文献[3]中 $J_{*,k}^{2^k}$ 的构成知, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{m-2}}x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k}$, 而 $x_{i_{m-1}}\in J_{*,k}^{i_{m-1}}=J_{*,k}^7$, 因此 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k}J_{*,k}^7\subset J_{*,k}^{2^k+7}$.

⑩ 若 $6=i_{m-1}\leqslant i_m\leqslant 2^k-1$, 则 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-2}+i_m>2^k+7-i_{m-1}=2^k+1$. 由文献[4]中 $J_{*,k}^{2^k+1}$ 的构成知, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{m-2}}x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k+1}$, 而 $x_{i_{m-1}}\in J_{*,k}^{i_{m-1}}=J_{*,k}^6$, 因此 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k+1}J_{*,k}^6\subset J_{*,k}^{2^k+7}$.

⑪ 若 $5=i_{m-1}\leqslant i_m\leqslant 2^k-1$, 则 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-2}+i_m>2^k+7-i_{m-1}=2^k+2$. 由文献[5]中 $J_{*,k}^{2^k+2}$ 的构成知, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{m-2}}x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k+2}$, 而 $x_{i_{m-1}}\in J_{*,k}^{i_{m-1}}=J_{*,k}^5$, 因此 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k+2}J_{*,k}^5\subset J_{*,k}^{2^k+7}$.

⑫ 若 $4=i_{m-1}\leqslant i_m\leqslant 2^k-1$, 则 $i_1+i_2+\cdots+i_{m-2}+i_m>2^k+7-i_{m-1}=2^k+3$. 由文献[4]中 $J_{*,k}^{2^k+3}$ 的构成知, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{m-2}}x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k+3}$, 而 $x_{i_{m-1}}\in J_{*,k}^{i_{m-1}}=J_{*,k}^4$, 因此 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k+3}J_{*,k}^4\subset J_{*,k}^{2^k+7}$.

⑬ 若 $2=i_{m-1}\leqslant i_m\leqslant 2^k-1$, 则 $i_1=i_2=\cdots=i_{m-1}=2$. 因为 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\neq x_2^m$, 所以此时 $i_m\geqslant 3$. 又因为 $i_1+i_2+\cdots+i_m>2^k+7$, 所以 $i_m>2^k+7-2(m-1)$, 又由 $i_m\leqslant 2^k-1$, 即 $2^k+7-2(m-1)<i_m\leqslant 2^k-1$ 知, $2^k+7-2(m-1)<2^k-1$, 从而 $m\geqslant 6$. 所以存在 $i_1=i_2=i_3=i_4=i_5=2$, 于是 $2^k+7-i_1-i_2-i_3-i_4-i_5<i_6+i_7+\cdots+i_m$, 即 $2^k+7-10<i_6+i_7+\cdots+i_m$. 由(ii)知, $x_{i_6}x_{i_7}\cdots x_{i_{m-1}}x_{i_m}\in J_{*,k}^{2^k-3}$, 又因为 $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}=x_2^5\in J_{*,k}^{2+2+2+2+2}=J_{*,k}^{10}$, 因此 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in J_{*,k}^{10}J_{*,k}^{2^k-3}\subset J_{*,k}^{2^k+7}$.

综上可知, 当 $k\geqslant 5$, $n\geqslant 2^k+8$ 时, $J_{n,k}^{2^k+7}=MO_n\cap\operatorname{Ker}\chi$.

2) $i_1+i_2+\cdots+i_m=2^k+7$.

① 若 $i_m=2^k+7$, 则由文献[12]中命题4.2知, $x_{2^k+7}\notin J^{2^k+7}_{2^k+7,k}$.

② 若 $i_m=2^k+6$, 因为 $2\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_m$, 所以不存在分解式中含有 $2^k+6$ 的 $2^k+7$ 维可分解协边类.

③ 若 $i_m=2^k+5$, 则所考虑的可分解元为 $x_2x_{2^k+5}$, 由文献[12]中命题4.2知, $x_2x_{2^k+5}\notin J^{2^k+7}_{*,k}$.

④ 若 $i_m=2^k+4$, 因为 $2\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_m$, 且 $i_j\neq 2^u-1$, 所以不存在分解式中含有 $2^k+4$ 的 $2^k+7$ 维可分解协边类.

⑤ 若 $i_m=2^k+3$, 则所考虑的可分解元为 $x_4x_{2^k+3}$, $x_2^2x_{2^k+3}$, 由文献[12]中命题4.2知, $x_4x_{2^k+3}$, $x_2^2x_{2^k+3}\notin J^{2^k+7}_{*,k}$, 并且 $x_4x_{2^k+3}+x_2^2x_{2^k+3}\notin J^{2^k+7}_{*,k}$.

⑥ 若 $i_m=2^k+2$, 则所考虑的可分解元为 $x_5x_{2^k+2}$, 由文献[12]中命题4.2知, $x_5x_{2^k+2}\notin J^{2^k+7}_{*,k}$.

⑦ 若 $i_m=2^k+1$, 则所考虑的可分解元为 $x_6x_{2^k+1}, x_2x_4x_{2^k+1}, x_2^3x_{2^k+1}$, 由文献[12]中命题4.2知, $x_6x_{2^k+1}$, $x_2x_4x_{2^k+1}$, $x_2^3x_{2^k+1}\notin J^{2^k+7}_{*,k}$, 并且 $x_6x_{2^k+1}+x_2x_4x_{2^k+1}$, $x_6x_{2^k+1}+x_2^3x_{2^k+1}$, $x_2x_4x_{2^k+1}+x_2^3x_{2^k+1}$, $x_6x_{2^k+1}+x_2x_4x_{2^k+1}+x_2^3x_{2^k+1}\notin J^{2^k+7}_{*,k}$.

⑧ 若 $i_m=2^k$, 则所考虑的可分解元为 $x_7x_{2^k}, x_2x_5x_{2^k}$, 由文献[12]中命题4.2知, $x_7x_{2^k}, x_2x_5x_{2^k}, x_7x_{2^k}+x_2x_5x_{2^k}\notin J^{2^k+7}_{*,k}$.

⑨ 若 $i_m<2^k$, 由(ii)知, $x_{i_r}\in J^{i_r}_{*,k}$, $r=1,2,\cdots,m$, 因此 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in J^{i_1}_{*,k}J^{i_2}_{*,k}\cdots J^{i_m}_{*,k}\subset J^{2^k+7}_{*,k}$.

综上可知, $J^{2^k+7}_{2^k+7,k}$ 由所有适合条件: 分解式中每个因子的维数都小于 $2^k$ 的可分解元构成. 证毕.

类似定理1的证明, 利用引理10和引理11可得定理2的证明.

## 参 考 文 献


[1] Pergher P L Q. $(Z_2)^k$-Actions with Fixed Point Set of Constant Codimension [J]. Topology and Its Appl, 1992, 46(1): 55-64.

[2] Shaker R J, Jr. Constant Codimension Fixed Point Sets of Commuting Involutions [J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 121(1): 275-281.

[3] Shaker R J, Jr. Dold Manifolds with $(Z_2)^k$-Action [J]. Proc Amer Math Soc, 1995, 123(3): 955-958.

[4] WANG Yan-ying, WU Zhen-de, MA Kai. $(Z_2)^k$-Actions with Fixed Point Set of Constant Codimension $2^k+1$ [J]. Proc Amer Math Soc, 2000, 128(5): 1515-1521.

[5] LIU Zuo, WU Zhen-de. $(Z_2)^k$-Action with Fixed Point Set of Constant Codimension $2^k+2$ [J]. Acta Math Sinica: English Series, 2005, 21(2): 409-412.

[6] WANG Yan-ying, WU Zhen-de, DING Yan-hong. Commuting Involutions with Fixed Point Set of Constant Codimension [J]. Acta Math Sinica: English Series, 1999, 15(2): 181-186.

[7] LI Ri-cheng, MA Kai, WU Zhen-de. $(Z_2)^k$-Actions with Fixed Point Set of Codimension $2^k+4$ [J]. Journal of Math Research and Exposition, 2005, 25(4): 659-664. (李日成, 马凯, 吴振德. 具有常余维数 $2^k+4$ 不动点集的 $(Z_2)^k$ 作用[J]. 数学研究与评论, 2005, 25(4): 659-664.)

[8] FENG Xing-fang. $(Z_2)^k$-Actions of Fixed Point Set with Constant Codimension $2^k+5$ [D]: [Master's Degree Thesis]. Shijiazhuang: Hebei Normal University, 2006. (冯杏芳. 具有常余维数 $2^k+5$ 不动点集的 $(Z_2)^k$ 作用 [D]: [硕士学位论文]. 石家庄: 河北师范大学, 2006.)

[9] GENG Juan. $(Z_2)^k$-Actions of Fixed Point Set with Constant Codimension $2^k+6$ [D]: [Master's Degree Thesis]. Shijiazhuang: Hebei Normal University, 2006. (耿娟. 具有常余维数 $2^k+6$ 不动点集的 $(Z_2)^k$ 作用 [D]: [硕士学位论文]. 石家庄: 河北师范大学, 2006.)

[10] Stong R E. On Fibering of Cobordism Classes [J]. Trans Amer Math Soc, 1973, 178: 431-447.

[11] Richard L W B. Immersions and Embeddings up to Cobordism [J]. Can J Math, 1971, ⅩⅩⅢ(6): 1102-1115.

[12] Kosniowski C, Stong R E. $(Z_2)^k$-Actions and Characteristic Numbers [J]. Indiana Univ Math J, 1979, 28(5): 725-743.


(责任编辑: 赵立芹)