待定系数法解常系数齐次分数阶微分方程组

代 群, 李辉来
(吉林大学 数学研究所, 长春 130012)

摘要: 用 Jordan 标准型方法研究常系数齐次分数阶微分方程组的基本解矩阵, 得到了方程组的基本解系. 结果表明, 可以用待定系数法解常系数齐次分数阶微分方程组, 并且该结果蕴含常系数线性一阶微分方程组.

关键词: 分数阶微分方程; 待定系数法; 常系数; 方程组
中图分类号: O175.1　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1671-5489(2012)03-0377-04

Solving Systems of Linear Fractional Differential Equations with Constant Coefficients by the Method of Undetermined Coefficients

DAI Qun, LI Hui-lai
(*Institute of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*)

Abstract: The authors investigated the solution matrix of the systems of the linear fractional differential equations with constant coefficients, and obtained some exact solutions of the systems of linear equations using Jordan canonical matrix. We can solve the systems of linear fractional differential equations with constant coefficients using the method of undetermined coefficients, and the results contain the solution of linear first-order differential equations with constant coefficients.

Key words: fractional differential equations; undetermined coefficients method; invariable coefficient; systems

分数阶微分方程在黏性力学、神经元的分数阶模型、金融数学、地下水模拟和生物系统中应用广泛, 关于其解性质的研究目前已取得了许多成果. Atanackovic 等[1]将分数阶微分方程组引入到一端固定、另一端负荷的一个弹性柱侧向运动分析中; Ahmad[2]研究了高阶分数阶微分方程解的存在性和唯一性; Hadid[3]研究了分数阶微分方程解的局部和整体存在性; Hadid 等[4-5]利用不动点定理相继研究了解的存在性定理以及分数阶微分方程上下解的存在定理; Lin[6]研究了分数阶微分方程的混沌控制和整体解的存在定理; Ibtahim 等[7]研究了一类分数阶微分方程解的存在性和唯一性. 分数阶导数的定义有多种, 常用的定义是由 Riemann-Liouville 和 Caputo 给出的[8-10].

考虑常系数齐次线性方程组:

$$D_t^{\alpha}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

其中: $\boldsymbol{x}$ 为 n 维向量; $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 常矩阵; $0<\alpha\leqslant 1$; D_t^{α} 为 Caputo 分数阶导算子. 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r}, \tag{2}$$

其中: $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$; $\lambda_i\neq\lambda_j\,(i\neq j)$. 则存在 n 阶非奇异常数矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得

收稿日期: 2011-10-09.
作者简介: 代 群(1981—), 女, 汉族, 博士, 从事微分方程的研究, E-mail: daiqun08@mail.jlu.edu.cn. 通讯作者: 李辉来(1962—), 男, 汉族, 博士, 教授, 博士生导师, 从事微分方程的研究, E-mail: lihuilai@mail.jlu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10771085).

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{TJT}^{-1}, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型, 即

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}. \tag{4}$$

其中: $i = 1, 2, \cdots, r$; $\boldsymbol{J}_i$ 为 n_i 阶矩阵, $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.

定义函数

$$f(\lambda t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{ka}}{\Gamma(ka+1)}, \quad f_k(\lambda t) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{C}_n^k \frac{(\lambda t)^{(n-k)a}}{\Gamma(ka+1)}.$$

因为

$$\boldsymbol{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i \boldsymbol{E} + \boldsymbol{Z}, \quad \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

所以

$$f(\boldsymbol{J}_i t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{ak} \boldsymbol{J}_i^k}{\Gamma(ak+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{ak} (\lambda_i \boldsymbol{E} + \boldsymbol{Z})^k}{\Gamma(ak+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{\mathrm{C}_k^l (\lambda_i \boldsymbol{E})^{k-l} t^{ak} \boldsymbol{Z}^l}{\Gamma(ak+1)} =$$

$$f(\lambda_i t)\boldsymbol{E} + t^a f_1(\lambda_i t)\boldsymbol{Z} + \cdots + t^{(n_i-1)a} f_{n_i-1}(\lambda_i t)\boldsymbol{Z}^{n_i-1} =$$

$$\begin{pmatrix} f(\lambda_i t) & t^a f_1(\lambda_i t) & t^{2a} f_2(\lambda_i t) & \cdots & \cdots & t^{(n_i-1)a} f_{n_i-1}(\lambda_i t) \\ & f(\lambda_i t) & t^a f_1(\lambda_i t) & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & t^{2a} f_2(\lambda_i t) \\ & & & & \ddots & t^a f_1(\lambda_i t) \\ & & & & & f(\lambda_i t) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

从而

$$f(\boldsymbol{A}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{ak} \boldsymbol{A}^k}{\Gamma(ak+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{ak} (\boldsymbol{TJT}^{-1})^k}{\Gamma(ak+1)} = \boldsymbol{T} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{ak} \boldsymbol{J}^k}{\Gamma(ak+1)} \right) \boldsymbol{T}^{-1} =$$

$$\boldsymbol{T} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_r^k \end{pmatrix} \frac{t^{ak}}{\Gamma(ak+1)} \right] \boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{J}_1 t) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\boldsymbol{J}_r t) \end{pmatrix} \boldsymbol{T}^{-1}. \tag{6}$$

定理 1 如果方程组(1)系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$ 的分解式为式(2), $\boldsymbol{T}$ 是化 $\boldsymbol{A}$ 为 Jordan 标准型 $\boldsymbol{J}$ 的 n 阶非奇异矩阵, 满足式(3), $\boldsymbol{J}$ 如式(4), 则

$$\boldsymbol{T}\mathrm{diag}(f(\boldsymbol{J}_1 t), \cdots, f(\boldsymbol{J}_r t)) = \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{J}_1 t) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\boldsymbol{J}_r t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

是方程组(1)的基本解矩阵, 其中 $f(\boldsymbol{J}_k t)$ 的结构如式(5).

证明: 取 $\boldsymbol{x}(t) = f(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{T}$, 则

$$D_t^a \boldsymbol{x}(t) = D_t^a f(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k D_t^a (t^{ka})}{\Gamma(ka+1)} \boldsymbol{T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^{k+1} t^{ka}}{\Gamma(ka+1)} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{A} f(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t).$$

因为 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{T}$ 非奇异, 所以 $f(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{T}$ 是方程组(1)的基本解矩阵. 又由式(6)知, $f(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{T}$ 即为式(7).

定理 2 如果方程组(1)系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$ 的分解式为式(2), 则对 $\boldsymbol{A}$ 的每个

特征根 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,r)$, 方程组(1)有形如

$$h_0 f(\lambda_i t)+h_1 t^{a} f_1(\lambda_i t)+\cdots+h_{n_i-1} t^{(n_i-1)a} f_{n_i-1}(\lambda_i t), \tag{8}$$

且只要对每个 λ_i 能求出 n_i 个形如式(8)的线性无关的解, 其中 $h_0,\cdots,h_{n_i-1}$ 均为 n 维常向量, 把这些解合在一起即为方程组(1)的一个基本解组.

证明: 由定理 1 知, 方程组(1)的基本解矩阵可表示为 $\boldsymbol{T}\mathrm{diag}(f(\boldsymbol{J}_1 t),\cdots,f(\boldsymbol{J}_r t))$, 并且由式(5)可知定理的前一个结论成立. 下面证后一个结论. 设对每个 λ_i 已经求出 n_i 个形如式(8)的线性无关的解, 由于 $n_1+\cdots+n_i=n$, 因此只需证明把它们合在一起还是线性无关的即可, 证明类似于定理 1 的相应部分. 证毕.

假设方程组(1)系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 的分解式为式(2), 则由定理 2 知, 对应于每个特征根 λ_i, 方程组(1)有 n_i 个形如式(8)的线性无关解, 其中 $h_0,\cdots,h_{n_i-1}$ 均为待定的 n 维常向量. 为确定这些系数, 将式(8)代入方程组(1)的两边, 并比较 t 的同次幂系数, 有

$$\begin{cases}
\boldsymbol{A}h_0=\lambda_i h_0+h_1, & (9)\\
\boldsymbol{A}h_0\lambda_i+\boldsymbol{A}h_1=\lambda_i^2 h_0+h_1\mathrm{C}_2^1\lambda_i+h_2, & (10)\\
\cdots\cdots & \\
\boldsymbol{A}h_0\lambda_i^{k-1}+\boldsymbol{A}h_1\mathrm{C}_{k-1}^1\lambda_i^{k-2}+\cdots+\boldsymbol{A}h_{k-1}\mathrm{C}_{k-1}^{k-1}=h_0\lambda_i^k+h_1\mathrm{C}_k^1\lambda_i^{k-1}+\cdots+h_{k-1}\mathrm{C}_k^{k-1}\lambda_i+h_k\mathrm{C}_k^k, & (11)\\
\boldsymbol{A}h_0\lambda_i^{k}+\boldsymbol{A}h_1\mathrm{C}_{k}^1\lambda_i^{k-1}+\cdots+\boldsymbol{A}h_{k}\mathrm{C}_{k}^{k}=h_0\lambda_i^{k+1}+h_1\mathrm{C}_{k+1}^1\lambda_i^{k}+\cdots+h_{k}\mathrm{C}_{k+1}^{k}\lambda_i+h_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}^{k+1}, & (12)\\
\cdots\cdots & \\
\boldsymbol{A}h_0\lambda_i^{n_i-1}+\boldsymbol{A}h_1\mathrm{C}_{n_i-1}^1\lambda_i^{n_i-2}+\cdots+\boldsymbol{A}h_{n_i-1}\mathrm{C}_{n_i-1}^{n_i-1}=h_0\lambda_i^{n_i}+h_1\mathrm{C}_{n_i}^1\lambda_i^{n_i-1}+\cdots+h_{n_i-1}\mathrm{C}_{n_i}^{n_i-1}\lambda_i. & (13)
\end{cases}$$

由式(9)得, $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})h_0=h_1$. 由式(10) $-\lambda\times$式(9)得, $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})h_1=h_2$. 由式(12) $-\lambda_i^k\times$式(9) $-\mathrm{C}_k^1\lambda_i^{k-1}\times$式(10) $-\cdots-\mathrm{C}_k^{k-1}\lambda_i\times$式(11)得, $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})h_k=h_{k+1}$, 其中 $k=1,2,\cdots,n_i-2$. 整理得

$$\begin{cases}
h_1=(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})h_0,\\
h_2=(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})h_1=(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^2h_0,\\
\cdots\cdots\\
h_{n_i-1}=(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})h_{n_i-2}=(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^{n_i-1}h_0,\\
(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^{n_i}h_0=0.
\end{cases}$$

例 1　求方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ 的一个基本解组.

解: 由 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2$ 知其特征根为 3, 重数为 2, 故该方程有如下形式的两个线性无关的解: $\boldsymbol{x}(t)=h_0 f(3t)+h_1 t^{a} f_1(3t)$, 其中: $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})h_0=h_1$; $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^2h_0=0$; 并且 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^2=0$. 任取 3 个线性无关的 h_0, 不妨设 h_0: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. 求出相对应的 h_1: $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. 于是, 得到基本解组:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}f(3t)+\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}t^{a}f_1(3t),\qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}f(3t)+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t^{a}f_1(3t).$$

例 2　求方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的一个基本解组.

解: 由

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}4-\lambda & -1 & 0\\ 3 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^3$$

知其特征根为2, 重数为3, 故该方程有如下形式的3个线性无关的解:

$$\boldsymbol{x}(t)=h_0 f(2t)+h_1 t^a f_1(2t)+h_2 t^{2a} f_2(2t),$$

其中: $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})h_0=h_1$; $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^2 h_0=h_2$; $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^3 h_0=0$; 并且

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^3=0.$$

任取3个线性无关的 h_0, 不妨设 h_0: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 求出相对应的 h_1 和 h_2:

$$h_1:\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix};\qquad h_2:\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

于是, 得到基本解系

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}f(3t)+\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}t^a f_1(3t)+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}t^{2a}f_2(2t),$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}f(3t)+\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}t^a f_1(3t)+\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}t^{2a}f_2(2t),$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}f(3t)+\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}t^a f_1(3t)+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}t^{2a}f_2(2t).$$

参 考 文 献

[1] Atanackovic T M, Stankovic B. On a System of Differential Equations with Fractional Derivatives Arising in Rod Theory [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2004, 37(4): 1241-1250.

[2] Ahmad A. Existence and Uniqueness Theorems of Higher Order Fractional Differential Equations [J]. Journal of Applied Sciences, 2010, 10(18): 2132-2135.

[3] Hadid S B. Local and Global Existence Theorems on Differential Equations of Non-integer Order [J]. J Fract Calc, 1995(7): 101-105.

[4] Hadid S B, Momany S, Taani A. Some Existence on Fractional Equations of Generalized Order through a Fix-Point Theorem [J]. J Fract Calc, 1996(9): 45-49.

[5] Hadid S B, Momany S, Masaedeh B. On the Existence of Maximal and Minimal Solutions of Differential Equaions of Non Integer Order [J]. J Fract Calc, 1996(9): 41-44.

[6] LIN Wei. Global Existence Theory and Chaos Control of Fractional Differential Equations [J]. J Math Anal Appl, 2007, 332(1): 709-726.

[7] Ibtahim R W, Momani S. On the Existence and Uniqueness of Solutions of a Class of Fractional Differential Equations [J]. J Math Anal Appl, 2007, 334(1): 1-10.

[8] Podlubny I. Fractional Differential Equation [M]. New York: Academic Press, 1999.

[9] He J H. Some Applications of Nonlinear Fractional Differential Equations and Their Approximations [J]. Bull Sci Technol, 1999, 15(2): 86-90.

[10] Podlubny I. Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integratiation and Fractional Differential [J]. Fract Calculus Appl Anal, 2002, 5(4): 367-386.

(责任编辑: 赵立芹)