广义函数空间上 Wilson 型函数方程的稳定性

李林松，崔丽英
(延边大学 理学院数学系，吉林 延吉 133002)

摘要：利用热方程的核，通过广义函数正则化的方法给出 Wilson 函数方程在广义函数空间(包括缓增广义函数空间、傅里叶超函数空间和 Gelfand-Shilov 广义函数空间)上的 Hyers-Ulam稳定性，并证明了在广义函数空间上 Wilson 函数方程的稳定性具有与一般函数空间上类似的结果.

关键词：Wilson 函数方程；广义函数；热方程的核；Hyers-Ulam 稳定性
中图分类号：O178；O177.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2012)03-0425-08

Stability of Wilson Functional Equation in the Spaces of Generalized Functions

LI Lin-song, CUI Li-ying
(*Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002, *Jilin Province, China*)

Abstract: By means of heat kernel and the approach of regularizing generalized functions, Hyers-Ulam stability of Wilson functional equation was mainly studied in the spaces of generalized functions such as the Schwartz tempered distributions, Fourier hyperfunctions and Gelfand-shilov generalized functions, showing that the result of the stability of Wilson functional equation in generalized functions is similar to that in the usual functional spaces.

Key words: Wilson functional equation; generalized functions; heat kernel; Hyers-Ulam stability

0 引　言

目前，对一类乘积函数方程的 Hyers-Ulam 型函数方程稳定性研究已取得许多成果[1-4]. 文献[5-7]将这类函数方程的稳定性推广到更一般的广义函数空间上，并得到了一系列重要结果. 文献[8]讨论了 Wilson 关于 D'Alembert 函数方程的推广形式，即 Wilson 函数方程的 Hyers-Ulam 型稳定性：

$$|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-h(\boldsymbol{x})k(\boldsymbol{y})|\leq\epsilon,\tag{1}$$

其中：$\epsilon>0$；f,g,h,k 为 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的函数.

本文在此基础上，借鉴文献[5-7]的方法，利用热方程的核，通过对广义函数正则化的方法，讨论 Wilson 函数方程在广义函数空间上的 Hyers-Ulam 型稳定性. 由于 f,g,h,k 为广义函数时，不等式(1)没有意义，因此首先将不等式(1)在广义函数空间上重新定义. 设 A,B 为

$$A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\quad B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n,$$

则不等式(1)可重新描述为如下形式：

收稿日期：2011-07-28.
作者简介：李林松(1968—)，男，朝鲜族，博士，副教授，从事应用泛函分析的研究，E-mail：lils@ybu.edu.cn.
基金项目：教育部回国留学人员科研启动基金(批准号：教外司留[2008]890号).

$$\| u \circ A + v \circ B - \omega \otimes \nu \| \leq \epsilon, \tag{2}$$

其中: $\omega \otimes \nu$ 表示广义函数 ω, ν 的张量积; $u \circ A, v \circ B$ 分别为广义函数 u, v 关于函数 A, B 的拉回(pullback); $\| \nu \| \leq \epsilon$. 对任意的基本函数 φ, $|\langle \nu, \varphi \rangle| \leq \epsilon \| \varphi \|_{L^1}$.

1 广义函数

下面简单介绍 Schwartz 缓增广义函数空间 $\mathscr{S}'$、傅里叶超函数空间 $\mathscr{F}'$ 和 Gelfand-Shilov 广义函数空间$(\mathscr{S}_{1/2}^{1/2})'$, 详细内容可参考文献[9-13]. 先给出一些记号: $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\boldsymbol{\alpha}! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $\boldsymbol{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, 其中$\mathbb{N}_0$ 表示非负整数集, $\partial_j = \partial / \partial x_j$.

定义 1[9] 若 $\mathbb{R}^n$ 上的无穷可微函数 φ, 满足不等式

$$\| \varphi \|_{\alpha,\beta} = \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} |\boldsymbol{x}^\alpha \partial^\beta \varphi(\boldsymbol{x})| < \infty, \qquad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^n,$$

则称 φ 为速降函数. 速降函数全体构成的线性空间记为 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 或 $\mathscr{S}$, 拟范数族$\{ \| \varphi \|_{\alpha,\beta}: \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^n \}$ 使 $\mathscr{S}$ 成为拓扑空间. 基本函数空间 $\mathscr{S}$ 上的连续线性泛函全体构成的线性空间记作 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 或 $\mathscr{S}'$, 即 $\mathscr{S}'$ 为 $\mathscr{S}$ 的对偶空间, $\mathscr{S}'$ 中的元素称为 Schwartz 缓增广义函数.

定义 2[10] 若 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且存在 $h, k > 0$, 使得

$$\| \varphi \|_{h,k} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n,\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{|\partial^\alpha \varphi(\boldsymbol{x})| \exp(k |\boldsymbol{x}|)}{h^{|\alpha|} \boldsymbol{\alpha}!} < \infty, \tag{3}$$

则 φ 全体构成的线性空间称为 Sato 空间, 记为 $\mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$ 或 $\mathscr{F}$, 拟范数族$\{ \| \varphi \|_{h,k}: h, k > 0 \}$ 使 $\mathscr{F}$ 成为拓扑空间, 记 $\mathscr{F}$ 的对偶空间为 $\mathscr{F}'$, 并称其元素为傅里叶超函数. 可以证明存在正整数 A, B, 使得式(3)等价于 $\| \varphi \|_{A,B} = \sup\limits_{x,\alpha,\beta} \dfrac{|\boldsymbol{x}^\alpha \partial^\beta \varphi(\boldsymbol{x})|}{A^{|\alpha|} B^{|\beta|} \boldsymbol{\alpha}! \boldsymbol{\beta}!} < \infty$.

Gelfand 和 Shilov[11] 推广了傅里叶超函数空间, 并引入了下面的广义函数空间:

定义 3[11] 记 $\mathscr{S}_{1/2}^{1/2}$ 或 $\mathscr{S}_{1/2}^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ 为 Gelfand-Shilov 基本函数空间, $\forall \varphi \in \mathscr{S}_{1/2}^{1/2}$, 则 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且存在 $A > 0$, $B > 0$, 满足

$$\| \varphi \|_{A,B} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n,\, \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{|\boldsymbol{x}^\alpha \partial^\beta \varphi(\boldsymbol{x})|}{A^{|\alpha|} B^{|\beta|} \boldsymbol{\alpha}!^{1/2} \boldsymbol{\beta}!^{1/2}} < \infty.$$

拟范数族$\{ \| \varphi \|_{A,B}: A, B > 0 \}$ 使 $\mathscr{S}_{1/2}^{1/2}$ 成为拓扑空间, 记$(\mathscr{S}_{1/2}^{1/2})'$ 为 $\mathscr{S}_{1/2}^{1/2}$ 的对偶空间, 其元素称为 Gelfand-Shilov广义函数.

事实上, 空间 $\mathscr{S}_{1/2}^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ 上的任意无穷可微函数 φ 都可以解析延拓成复数域上的整函数, 且存在 $a, b, C > 0$, 满足 $|\varphi(\boldsymbol{x} + \mathrm{i}\boldsymbol{y})| \leq C\exp(-a|\boldsymbol{x}|^2 + b|\boldsymbol{y}|^2)$.

比较上面介绍的 3 个基本空间及其对偶空间的拓扑结构, 易得拓扑包含关系:

$$\mathscr{S}_{1/2}^{1/2} \hookrightarrow \mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{S}, \qquad \mathscr{S}' \hookrightarrow \mathscr{F}' \hookrightarrow (\mathscr{S}_{1/2}^{1/2})'.$$

下面给出广义函数张量积的概念.

定义 4 设 $u_j \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n_j})$ (或 $\mathscr{F}'(\mathbb{R}^{n_j})$, $(\mathscr{S}_{1/2}^{1/2})'(\mathbb{R}^{n_j})$), $j = 1, 2$. 则广义函数 u_1, u_2 的张量积 $u_1 \otimes u_2$ 为: $\forall \varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ (或 $\mathscr{F}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$, $\mathscr{S}_{1/2}^{1/2}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$),

$$\langle u_1 \otimes u_2, \varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \rangle = \langle u_1, \langle u_2, \varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \rangle \rangle.$$

$u_1 \otimes u_2 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$ (或 $\mathscr{F}'(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$, $(\mathscr{S}_{1/2}^{1/2})'(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$). 由文献[12]对于广义函数的 pullback(拉回) $u \circ A, u \circ B$ 有下列运算: 对任意的定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的基本函数 φ, 有

$$\langle u \circ A, \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rangle = \langle u_x, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y} \rangle, \qquad \langle u \circ B, \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rangle = \langle u_x, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y} \rangle.$$

2 相关引理

本文若无特殊说明, 基本函数空间即指 Schwartz 空间 $\mathscr{S}$、Sato 空间 $\mathscr{F}$ 或者 Gelfand-Shilov 空间 $\mathscr{S}_{1/2}^{1/2}$, 而广义函数即指 Schwartz 缓增广义函数, 傅里叶超函数或者 Gelfand-Shilov 广义函数.

下面引入热方程的核 $E_t(\boldsymbol{x})=E(\boldsymbol{x},t)=(4\pi t)^{-n/2}\exp(-|\boldsymbol{x}|^2/4t)$，$t>0$. 因为 $\forall t>0$，$E_t(\boldsymbol{x})$ 属于基本函数空间，因此可以定义广义函数 u 与 $E_t(\boldsymbol{x})$ 的卷积：

$$Gu(\boldsymbol{x},t)=(u*E)(\boldsymbol{x},t)=u_y(E(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\quad t>0,$$

称为广义函数 u 的 Gauss 变换.

引理 1[13]　设 $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$，则其 Gauss 变换 $Gu(\boldsymbol{x},t)$ 是热方程的无穷可微解，且满足：

（i）存在正数 C,M,N，使得

$$|Gu(\boldsymbol{x},t)|\leqslant Ct^{-M}(1+|\boldsymbol{x}|)^N,\qquad \mathbb{R}^n\times(0,\delta);\tag{4}$$

（ii）当 $t\to 0^+$ 时，$Gu(\boldsymbol{x},t)\to u(\mathscr{S}')$. 即对于任意 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，

$$\langle Gu(\cdot,t),\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}Gu(\boldsymbol{x},t)\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\to\langle u,\varphi\rangle,\qquad t\to 0^+.$$

类似地，当 u 为傅里叶超函数时，可得到与引理 1 类似的结果，只需把估计式(4)换为：$\forall\epsilon>0$，存在 $C_\epsilon>0$，使得

$$|Gu(\boldsymbol{x},t)|\leqslant C_\epsilon\exp(\epsilon(|\boldsymbol{x}|+1/t)),\qquad \mathbb{R}^n\times(0,\delta).\tag{5}$$

利用文献[5-7,14-15]的方法，对不等式(2)用热方程的核 $E_t(\boldsymbol{x})$ 做卷积，则根据 $(E_s*E_t)(\boldsymbol{x})=E_{s+t}(\boldsymbol{x})$ 的半群性质，可将不等式(2)转化为定义在 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 上的关于光滑函数 f,g,h,k 的稳定性问题，即

$$|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+s)+g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t+s)-h(\boldsymbol{x},t)k(\boldsymbol{y},s)|\leqslant\epsilon,\tag{6}$$

其中：$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$；$t,s>0$.

引理 2[16]　设 f,g：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为连续函数，且满足：

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-2f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y})=0,\tag{7}$$

则方程(7)的解为

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}A\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})+B\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}), & g(\boldsymbol{x})=\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}),\\ A\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})+B\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}), & g(\boldsymbol{x})=\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}),\\ A+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{x}, & g(\boldsymbol{x})=1,\end{cases}$$

其中：$\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$；$\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_n)\in\mathbb{R}^n$；$\boldsymbol{d}=(d_1,\cdots,d_n)\in\mathbb{R}^n$；$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$.

引理 3[17]　设 f：$\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 为连续函数，且满足：

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+s)+f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t+s)-2f(\boldsymbol{x},t)f(\boldsymbol{y},s)=0,\tag{8}$$

则方程(8)的解为

$$f(\boldsymbol{x},t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}),\\ \mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}),\\ \mathrm{e}^{bt},\end{cases}$$

其中：$\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$；$b\in\mathbb{R}$.

引理 4　设 $f(\boldsymbol{x},t)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 上的实值连续函数，且满足：

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+s)+f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t+s)-2f(\boldsymbol{x},t)g(\boldsymbol{y},s)=0,\tag{9}$$

则

$$f(\boldsymbol{x},t)=\begin{cases}A\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})+B\mathrm{e}^{bt}\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}), & g(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}),\\ A\mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})+B\mathrm{e}^{bt}\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}), & g(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}),\\ A\mathrm{e}^{bt}+\mathrm{e}^{bt}(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{x}), & g(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{e}^{bt}.\end{cases}\tag{10}$$

证明：在式(9)中，令 $\boldsymbol{y}=0$，则有 $f(\boldsymbol{x},t+s)=f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{e}^{bs}$，即 $f(\boldsymbol{x},t+s)\mathrm{e}^{-b(t+s)}=f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{e}^{-bt}$. 因此，$f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{e}^{-bt}$ 与 t 无关. 令 $k(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x},t)\mathrm{e}^{-bt}$，则由式(9)得 $k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-2k(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{y})=0$，从而由引理 2 得

$$k(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} A\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) + B\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}), & h(\boldsymbol{x}) = \cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}), \\ A\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) + B\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}), & h(\boldsymbol{x}) = \cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}), \\ A + \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{x}, & h(\boldsymbol{x}) = 1, \end{cases}$$

因此, 得式(10).

引理5[8] 设$f(\boldsymbol{x})$是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值连续函数, 且满足不等式

$$|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - 2f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y})| \leqslant \epsilon,$$

其中 $g(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}), \\ \cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}), \\ 1, \end{cases}$ 则f或者是有界函数, 或者满足:

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} A\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) + B\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}); \\ A + \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{x}. \end{cases}$$

引理6 设$\epsilon>0$, f,g,h,k 均为 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$上的实值连续函数, 且满足不等式

$$|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+s) + g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t+s) - h(\boldsymbol{x},t)k(\boldsymbol{y},s)| \leqslant \epsilon, \tag{11}$$

则:

1) f,g,h,k 或者都是有界函数, 或者都是无界函数;

2) 当函数f,g,h,k 均为无界函数时, 则有:

(i)
$$|f(\boldsymbol{x},t) + g(0,t) - A_1\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) - B_1\mathrm{e}^{bt}\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) - C_1\mathrm{e}^{bt}| \leqslant \epsilon,$$
$$|g(\boldsymbol{x},t) + f(0,t) - A_2\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) - B_2\mathrm{e}^{bt}\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) - C_2\mathrm{e}^{bt}| \leqslant \epsilon,$$
$$h(\boldsymbol{x}) = A_3\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) + B_3\mathrm{e}^{bt}\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}),$$
$$k(\boldsymbol{x}) = A_4\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) + B_4\mathrm{e}^{bt}\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x});$$

(ii)
$$|f(\boldsymbol{x},t) + g(0,t) - A_1\mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) - B_1\mathrm{e}^{bt}\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) - C_1\mathrm{e}^{bt}| \leqslant \epsilon,$$
$$|g(\boldsymbol{x},t) + f(0,t) - A_2\mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) - B_2\mathrm{e}^{bt}\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) - C_2\mathrm{e}^{bt}| \leqslant \epsilon,$$
$$h(\boldsymbol{x}) = A_3\mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) + B_3\mathrm{e}^{bt}\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}),$$
$$k(\boldsymbol{x}) = A_4\mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) + B_4\mathrm{e}^{bt}\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x});$$

(iii)
$$\left|f(\boldsymbol{x},t) + g(0,t) - \mathrm{e}^{bt}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j - \mathrm{e}^{bt}\sum_{i=1}^n a_ix_i - C_1\mathrm{e}^{bt}\right| \leqslant \epsilon,$$
$$\left|g(\boldsymbol{x},t) + f(0,t) - \mathrm{e}^{bt}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij}x_ix_j - \mathrm{e}^{bt}\sum_{i=1}^n b_ix_i - C_2\mathrm{e}^{bt}\right| \leqslant \epsilon,$$
$$h(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{bt} + C_3\mathrm{e}^{bt},$$
$$k(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{bt} + C_4\mathrm{e}^{bt}.$$

其中: $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\in\mathbb{R}^n$; $b,a_i,b_i(i=1,2,\cdots,n),A_i,B_i,C_i(i=1,2,3,4),a_{ij},b_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$都是给定的实数.

当 $b=0$ 时, 情况(i)不成立, 此时f,g,h,k 为有界函数; 而(ii)和(iii)成立. 当 $b<0$ 时, (i)和(iii)不成立, 此时f,g,h,k 为有界函数; 但(ii)成立.

证明: 先证明2). 这里不考虑函数f,g,h,k 等于零的情形. 因为$h(\boldsymbol{x},t)$是非零函数, 故$\exists(\boldsymbol{x}_0,t_0)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$, 使得$h(\boldsymbol{x}_0,t_0)\neq0$, 则由式(11)有

$$|f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t_0+t+s) + g(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t_0+t+s) - h(\boldsymbol{x}_0,t_0)k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+s)| \leqslant \epsilon,$$
$$|f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t_0+t+s) + g(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t_0+t+s) - h(\boldsymbol{x}_0,t_0)k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t+s)| \leqslant \epsilon,$$
$$|f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t_0+t+s) + g(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t_0+t+s) - h(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y},t_0+s)k(\boldsymbol{x},t)| \leqslant \epsilon,$$
$$|f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t_0+t+s) + g(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t_0+t+s) - h(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y},t_0+s)k(\boldsymbol{x},t)| \leqslant \epsilon.$$

故由三角不等式可得

$$|h(\boldsymbol{x}_0,t_0)[k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+s) + k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t+s)] - k(\boldsymbol{x},t)[h(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y},t_0+s) + h(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y},t_0+s)]| \leqslant 4\epsilon,$$

即

$$|k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+s)+k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t+s)-2k(\boldsymbol{x},t)H(\boldsymbol{y},s)|\leqslant\epsilon_1, \tag{12}$$

其中：$\epsilon_1=4\epsilon/|h(\boldsymbol{x}_0,t_0)|$；$H(\boldsymbol{y},s)=[h(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y},t_0+s)+h(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y},t_0+s)]/[2h(\boldsymbol{x}_0,t_0)]$．由假设$k(\boldsymbol{x},t)$是无界的，故$\exists(\boldsymbol{x}_n,t_n)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}|k(\boldsymbol{x}_n,t_n)|=\infty$．从而由式(12)可得

$$H(\boldsymbol{x},t)=\lim_{n\to\infty}\frac{k(\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{x},t_n+t)+k(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x},t_n+t)}{2k(\boldsymbol{x}_n,t_n)}, \tag{13}$$

即

$$2H(\boldsymbol{x},t)H(\boldsymbol{y},s)=\lim_{n\to\infty}\frac{k(\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{x},t_n+t)H(\boldsymbol{y},s)+k(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x},t_n+t)H(\boldsymbol{y},s)}{k(\boldsymbol{x}_n,t_n)}. \tag{14}$$

又由式(12)，有

$$|k(\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t_n+t+s)+k(\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t_n+t+s)-2k(\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{x},t_n+t)H(\boldsymbol{y},s)|\leqslant\epsilon_1, \tag{15}$$

$$|k(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t_n+t+s)+k(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t_n+t+s)-2k(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x},t_n+t)H(\boldsymbol{y},s)|\leqslant\epsilon_1, \tag{16}$$

从而由式(13)~(16)可得

$$H(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+s)+H(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t+s)-2H(\boldsymbol{x},t)H(\boldsymbol{y},s)=0.$$

因此由引理3，有

$$H(\boldsymbol{x},t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}),\\ \mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}),\\ \mathrm{e}^{bt},\end{cases} \tag{17}$$

其中：$\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$；$b\in\mathbb{R}$．

下面分两种情况讨论.

① 当$b>0$时，式(17)的$H(\boldsymbol{x},t)$在$\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$上无界，故存在$(\boldsymbol{z}_n,r_n)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$，使得$|H(\boldsymbol{z}_n,r_n)|\to\infty$，$n\to\infty$．则由式(12)及三角不等式，有

$$\begin{aligned}&|k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+s)+k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t+s)-2k(\boldsymbol{x},t)H(\boldsymbol{y},s)|=\frac{1}{2H(\boldsymbol{z}_n,r_n)}\times\\&\quad|2k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+s)H(\boldsymbol{z}_n,r_n)+2k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t+s)H(\boldsymbol{z}_n,r_n)-4k(\boldsymbol{x},t)H(\boldsymbol{y},s)H(\boldsymbol{z}_n,r_n)|\leqslant\\&\quad\frac{1}{2H(\boldsymbol{z}_n,r_n)}(|-k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}_n,t+s+r_n)-k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}_n,t+s+r_n)+2k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+s)H(\boldsymbol{z}_n,r_n)|+\\&\quad|-k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}_n,t+s+r_n)-k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}_n,t+s+r_n)+2k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t+s)H(\boldsymbol{z}_n,r_n)|+\\&\quad|k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}_n,t+s+r_n)+k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}_n,t+s+r_n)-2k(\boldsymbol{x},t)H(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}_n,s+r_n)|+\\&\quad|k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}_n,t+s+r_n)+k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}_n,t+s+r_n)-2k(\boldsymbol{x},t)H(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}_n,s+r_n)|+\\&\quad|2k(\boldsymbol{x},t)||H(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}_n,s+r_n)+H(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}_n,s+r_n)-2H(\boldsymbol{y},s)H(\boldsymbol{z}_n,r_n)|)\leqslant\frac{2\epsilon_1}{H(\boldsymbol{z}_n,r_n)},\end{aligned} \tag{18}$$

注意式(18)中$H(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}_n,s+r_n)+H(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}_n,s+r_n)-2H(\boldsymbol{y},s)H(\boldsymbol{z}_n,r_n)=0$，故令$n\to\infty$，即有

$$k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+s)+k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t+s)-2k(\boldsymbol{x},t)H(\boldsymbol{y},s)=0.$$

从而由引理4得

$$k(\boldsymbol{x},t)=\begin{cases}A_4\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})+B_4\mathrm{e}^{bt}\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}),\\ A_4\mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})+B_4\mathrm{e}^{bt}\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}),\\ C_4\mathrm{e}^{bt}+\mathrm{e}^{bt}(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{x}).\end{cases} \tag{19}$$

取$(\boldsymbol{x}_1,t_1)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$，使得$k(\boldsymbol{x}_1,t_1)\neq0$，则类似于上面的方法，有

$$|h(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+s)+h(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t+s)-2h(\boldsymbol{x},t)K(\boldsymbol{y},s)|\leqslant\epsilon_2,$$

其中

$$K(\boldsymbol{x},t)=\frac{k(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x},t_1+t)+k(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x},t_1+t)}{2k(\boldsymbol{x}_1,t_1)}. \tag{20}$$

将式(19)代入(20)易得

$$K(\boldsymbol{x},t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}),\\ \mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}),\\ \mathrm{e}^{bt}.\end{cases}$$

因此，由上面的方法得

$$h(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+s)+h(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t+s)-2h(\boldsymbol{x},t)K(\boldsymbol{y},s)=0.$$

于是有

$$h(\boldsymbol{x},t)=\begin{cases}A_3\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})+B_3\mathrm{e}^{bt}\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}),\\ A_3\mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})+B_3\mathrm{e}^{bt}\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}),\\ C_3\mathrm{e}^{bt}+\mathrm{e}^{bt}(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{x}).\end{cases}\tag{21}$$

在式(11)中，令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，$t=s$，可得 $|f(2\boldsymbol{x},2t)+g(0,2t)-h(\boldsymbol{x},t)k(\boldsymbol{x},t)|\leqslant\epsilon$，从而由式(19)，(21)可得

$$|f(\boldsymbol{x},t)+g(0,t)-A_1\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})-B_1\mathrm{e}^{bt}\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})-C_1\mathrm{e}^{bt}|\leqslant\epsilon,$$

$$|f(\boldsymbol{x},t)+g(0,t)-A_1\mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})-B_1\mathrm{e}^{bt}\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})-C_1\mathrm{e}^{bt}|\leqslant\epsilon,$$

$$\left|f(\boldsymbol{x},t)+g(0,t)-\mathrm{e}^{bt}\sum a_{ij}x_ix_j-\mathrm{e}^{bt}\sum a_ix_i-C_1\mathrm{e}^{bt}\right|\leqslant\epsilon.$$

同理，令 $\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{y}$，$t=s$，可得 $|f(0,2t)+g(2\boldsymbol{x},2t)+h(\boldsymbol{x},t)k(-\boldsymbol{x},t)|\leqslant\epsilon$，即得

$$|g(\boldsymbol{x},t)+f(0,t)-A_2\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})-B_2\mathrm{e}^{bt}\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})-C_2\mathrm{e}^{bt}|\leqslant\epsilon,$$

$$|g(\boldsymbol{x},t)+f(0,t)-A_2\mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})-B_2\mathrm{e}^{bt}\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})-C_2\mathrm{e}^{bt}|\leqslant\epsilon,$$

$$\left|g(x,t)+f(0,t)-\mathrm{e}^{bt}\sum b_{ij}x_ix_j-\mathrm{e}^{bt}\sum b_ix_i-C_2\mathrm{e}^{bt}\right|\leqslant\epsilon.$$

② 当 $b=0$ 时，即

$$H(\boldsymbol{x},t)=\begin{cases}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}),\\ \cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}),\\ 1.\end{cases}$$

由式(12)令 $\boldsymbol{y}=0$，则有 $|k(\boldsymbol{x},t+s)-k(\boldsymbol{x},t)|\leqslant\epsilon_1/2$，故由式(12)，有

$$|k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t)+k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)-2k(\boldsymbol{x},t)H(\boldsymbol{y},t)|\leqslant 2\epsilon_1,$$

从而由引理5得

$$k(\boldsymbol{x},t)=\begin{cases}A\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})+B\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}),\\ A+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{x}.\end{cases}$$

此时，$k(\boldsymbol{x},t)$ 是无界函数，类似于第一种情形即可得到所需的结果.

当 $b<0$ 时，$H(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})$ 为无界函数，完全类似于第一种情形可得到证明.

由上面的证明过程可见，当 h 或 k 为无界函数时，其他函数也必无界；同理易证当 f 或 g 为无界函数时，其他函数也必无界. 因此，当 f,g,k,h 任意一个为有界函数时，其他函数也必有界. 即引理6的结论1)得到证明.

3 主要结果

下面给出 Wilson 函数方程在广义函数空间上的 Hyers-Ulam 型稳定性定理.

定理1 设 u,v,ω,ν 是 Gelfand-Shilov 广义函数，且满足不等式

$$\|u\circ A+v\circ B-\omega\otimes\nu\|\leqslant\epsilon,\tag{22}$$

则 u,v,ω,ν 或者都是有界函数，或者 u,v,ω,ν 是下列形式的函数：

(i) $u=A_1\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})+B_1\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})+C_1+h_1(\boldsymbol{x})$,

$v=A_2\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})+B_2\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})+C_2+h_2(\boldsymbol{x})$,

$\omega=A_3\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})+B_3\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})$,

$\nu=A_4\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})+B_4\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})$;

(ii)　$u = A_1\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) + B_1\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) + C_1 + h_1(\boldsymbol{x})$,

$v = A_2\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) + B_2\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) + C_2 + h_2(\boldsymbol{x})$,

$\omega = A_3\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) + B_3\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})$,

$\nu = A_4\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) + B_4\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})$;

(iii)　$u = \sum_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + C_1 + h_1(\boldsymbol{x})$,

$v = \sum_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} b_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + C_2 + h_2(\boldsymbol{x})$,

$\omega = \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{x} + C_3$,

$\nu = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x} + C_4$.

其中：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\in\mathbb{R}^n$；$a_i,b_i(i=1,2,\cdots,n)$，$A_i,B_i,C_i(i=1,2,3,4)$，$a_{ij},b_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$都是给定的实数，$h_1,h_2$ 是有界可测函数，且 $\|h_1\|_{L^\infty}\leqslant\epsilon$，$|h_2\|_{L^\infty}\leqslant\epsilon$.

证明：对不等式(22)用热方程的核的张量积 $E_t(\boldsymbol{x})E_s(\boldsymbol{y})$ 做卷积，类似于文献[5-7,14-15]的方法可得

$$|Gu(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+s) + Gv(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t+s) - G\omega(\boldsymbol{x},t)G\nu(\boldsymbol{y},s)|\leqslant\epsilon,$$

其中 $Gu,Gv,G\omega,G\nu$ 分别是 u,v,ω,ν 的 Gauss 变换.

因此，由引理 6 知 $Gu,Gv,G\omega,G\nu$ 或者都是有界函数，或者满足：

1)　$|Gu(\boldsymbol{x},t) + Gv(0,t) - A_1\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) - B_1\mathrm{e}^{bt}\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) - C_1\mathrm{e}^{bt}|\leqslant\epsilon$,

$|Gv(\boldsymbol{x},t) + Gu(0,t) - A_2\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) - B_2\mathrm{e}^{bt}\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) - C_2\mathrm{e}^{bt}|\leqslant\epsilon$,

$G\omega(\boldsymbol{x}) = A_3\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) + B_3\mathrm{e}^{bt}\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})$,

$G\nu(\boldsymbol{x}) = A_4\mathrm{e}^{bt}\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) + B_4\mathrm{e}^{bt}\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})$;

2)　$|Gu(\boldsymbol{x},t) + Gv(0,t) - A_1\mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) - B_1\mathrm{e}^{bt}\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) - C_1\mathrm{e}^{bt}|\leqslant\epsilon$,

$|Gv(\boldsymbol{x},t) + Gu(0,t) - A_2\mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) - B_2\mathrm{e}^{bt}\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) - C_2\mathrm{e}^{bt}|\leqslant\epsilon$,

$G\omega(\boldsymbol{x}) = A_3\mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) + B_3\mathrm{e}^{bt}\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})$,

$G\nu(\boldsymbol{x}) = A_4\mathrm{e}^{bt}\cosh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}) + B_4\mathrm{e}^{bt}\sinh(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})$;

3)　$\left|Gu(\boldsymbol{x},t) + Gv(0,t) - \mathrm{e}^{bt}\sum_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j - \mathrm{e}^{bt}\sum_{i=1}^{n} a_ix_i - C_1\mathrm{e}^{bt}\right|\leqslant\epsilon$,

$\left|Gv(\boldsymbol{x},t) + Gu(0,t) - \mathrm{e}^{bt}\sum_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} b_{ij}x_ix_j - \mathrm{e}^{bt}\sum_{i=1}^{n} b_ix_i - C_2\mathrm{e}^{bt}\right|\leqslant\epsilon$,

$G\omega(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{bt} + C_3\mathrm{e}^{bt}$,

$G\nu(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{bt} + C_4\mathrm{e}^{bt}$.

如果 $Gu,Gv,G\omega,G\nu$ 是有界函数，则作为初值的 u,v,ω,ν 一定是有界函数；而当 $Gu,Gv,G\omega,G\nu$ 为无界函数时，令 $t\to 0$，由引理 1 的(ii)即可得所需的结果. 注意当 $t\to 0$ 时，$Gu(0,t)$，$Gv(0,t)$都趋于某个常数，又因为 $u - A_1\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) + B_1\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) + C_1 \in (L^1)' = L^\infty$，所以 $u = A_1\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) + B_1\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) + C_1 + h_1(\boldsymbol{x})$，其中 $h_1(\boldsymbol{x})$是有界可测函数，且 $\|h_1(\boldsymbol{x})\|_{L^\infty}\leqslant\epsilon$，同理可得其他结果.

推论 1　设 u,v,ω,ν 是缓增广义函数或傅里叶超函数，且满足不等式(22)，则 u,v,ω,ν 或者都是有界函数，或者 u,v,ω,ν 是下列形式的函数：

(i)　$u = A_1\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) + B_1\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) + C_1 + h_1(\boldsymbol{x})$,

$v = A_2\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) + B_2\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) + C_2 + h_2(\boldsymbol{x})$,

$\omega = A_3\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) + B_3\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})$,

$\nu = A_4\cos(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) + B_4\sin(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})$;

(ii)　$u = \sum_{1\leqslant i,\,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + C_1 + h_1(\boldsymbol{x})$,

$$v = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + C_2 + h_2(\boldsymbol{x}),$$
$$\omega = \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{x} + C_3,$$
$$\nu = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{x} + C_4.$$

其中：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^n$；$a_i, b_i (i=1,2,\cdots,n), A_i, B_i, C_i (i=1,2,3,4), a_{ij}, b_{ij} (i, j=1,2,\cdots,n)$都是给定的实数；$h_1, h_2$是有界可测函数，且$\| h_1 \|_{L^\infty} \leqslant \epsilon$，$|h_2\|_{L^\infty} \leqslant \epsilon$.

注1 当u,v,ω,ν为缓增广义函数或傅里叶超函数时，由$Gu, Gv, G\omega, G\nu$估计式(4)和(5)知，定理1中的(ii)不成立，只成立(i)和(iii)，证明的其他部分完全类似于定理1.

参 考 文 献

[1] Baker J, Lawrence J, Zorzitto F. The Stability of the Equation $f(x+y)=f(x)f(y)$ [J]. Proc Amer Math Soc, 1979, 74(2): 242-246.

[2] Baker J A. The Stability of the Cosine Equation [J]. Proc Amer Math Soc, 1980, 80(3): 411-416.

[3] Hyers D H, Isac G, Rassias T M. Stability of Functional Equations in Several Variables [M]. Boston: Birkhäuser, 1998.

[4] Rassias T H. On the Stability of Functional Equations in Banach Spaces [J]. J Math Anal Appl, 2000, 251(1): 264-284.

[5] Chung J. Stability of Functional Equations in the Space of Distributions and Hyperfunctions [J]. J Math Anal Appl, 2003, 286(1): 177-186.

[6] Chung J, Chung S Y, Kim D. The Stability of Cauchy Equations in the Space of Schwartz Distributions [J]. J Math Anal Appl, 2004, 295(1): 107-114.

[7] Chung J. A Distributional Version of Functional Equations and Their Stabilities [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Method & Application, 2005, 62(6): 1037-1051.

[8] CUI Li-ying, LI Lin-song. Hyers-Ulam Stability of Wilson Functional Equation [J]. Journal of Yanbian University: Natural Science, 2009, 35(4): 283-286. (崔丽英, 李林松. Wilson函数方程的Hyers-Ulam型稳定性[J]. 延边大学学报: 自然科学版, 2009, 35(4): 283-286.)

[9] Schwartz L. Théorie Des Distributions [M]. Paris: Hermann, 1966.

[10] Chung J, Chung S Y, Kim D. A Characterization for Fourier Hyperfunctions [J]. Publ Res Inst Math Sci, 1994, 30: 203-208.

[11] Gelfand I M, Shilov G E. Generalized Functions Ⅰ: Properties and Operations [M]. New York: Academic Press, 1964.

[12] Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operator Ⅰ: Distribution Theory and Fourier Analysis [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[13] Matsuzawa T. A Calculus Approach to Hyperfunctions Ⅲ [J]. Nagoya Math J, 1990, 118: 133-153.

[14] LI Lin-song, Chung J, Kim D. Stability of Jensen Equations in the Space of Generalized Functions [J]. J Math Anal Appl, 2004, 299: 578-586.

[15] LI Lin-song, Kim D, Chung J. Stability of Functional Equations of Drygas in the Space of Schwartz Distributions [J]. J Math Anal Appl, 2006, 320(1): 163-173.

[16] Aczél J. Lectures on Functional Equations and Their Applications [M]. New York: Academic Press, 1966.

[17] Chung J, Lee S Y. Some Functional Equations in the Spaces of Generalized Functions [J]. Aeq Math, 2003, 65(3): 267-279.

(责任编辑：赵立芹)