第50卷 第3期 吉林大学学报(理学版) Vol. 50 No. 3
2012年5月 Journal of Jilin University (Science Edition) May 2012

$\widetilde{\phi}$-混合随机变量序列线性形式的强稳定性

谭希丽, 徐冬梅
(北华大学 数学学院, 吉林 吉林 132013)

摘要: 利用随机变量的截尾术及强大数定律, 得到了 $\widetilde{\phi}$-混合随机变量序列具有线性形式强稳定性的充分条件.

关键词: 强稳定性; 线性形式; $\widetilde{\phi}$-混合随机变量序列
中图分类号: O211.4 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2012)03-0417-04

Strong Stability of Linear Forms of $\widetilde{\phi}$-Mixing Random Variables

TAN Xi-li, XU Dong-mei
(*College of Mathematics*, *Beihua University*, *Jilin* 132013, *Jilin Province*, *China*)

Abstract: We got sufficient conditions of strong stability of linear forms in $\widetilde{\phi}$-mixing random variables sequence via terminating random variables and strong large number law.

Key words: strong stability; linear form; $\widetilde{\phi}$-mixing random variables sequence

0 引 言

设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量序列, $\mathscr{F}_S=\sigma(X_i,i\in S\subset N)$ 是 σ-域, 在 $\mathscr{F}$ 中给定 σ-域 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{R}$, 令

$$\phi(\mathscr{H},\mathscr{R}) = \sup\{|P(B|A)-P(B)|: A\in\mathscr{H},\ B\in\mathscr{R},\ P(A)>0\}.$$

对 $k\geqslant 0$, 令

$$\widetilde{\phi}(k) = \sup\{\phi(\mathscr{F}_S,\mathscr{F}_T): \text{有限子集 } S,T\subset N, \text{且 } \mathrm{dist}(S,T)\geqslant k\}, \tag{1}$$

其中 $\mathrm{dist}(S,T)$ 表示集合 S 和 T 的距离.

定义1 若存在 $k\in N$, 使得 $\widetilde{\phi}(k)<1$, 则称 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 为 $\widetilde{\phi}$-混合序列.

文献[1]讨论了各种混合序列, 认为 $\widetilde{\phi}$-混合与通常的 ϕ-混合类似, 但并不相同, 它们互不包含. 事实上, 在通常的 ϕ-混合系数 $\phi(k)$ 中, 式(1)中的 S,T 分别为 $[1,n]$ 和 $(n+k,\infty)$ 中的子集. 此外, $\widetilde{\phi}$-混合只要求存在某个 $k\in N$, 使得 $\widetilde{\phi}(k)<1$, 比 ϕ-混合的要求 $\phi(n)\to 0\ (n\to\infty)$ 弱很多, 因此, $\widetilde{\phi}$-混合是一类较广泛的相依混合序列. 文献[2]研究了 $\widetilde{\phi}$-混合随机变量序列的几乎处处收敛性; 文献[3]讨论了 $\widetilde{\phi}$-混合序列的完全收敛性和强收敛性; 文献[4]研究了 $\widetilde{\phi}$-混合序列的性质, 得到了矩条件下 $\widetilde{\phi}$-混合序列的一类强极限定理和强大数律, 并给出了一些简单应用, 推广了若干经典的强大数定律. 文献[5]讨论了独立同分布随机变量序列线性形式的强稳定性; 文献[6]研究了两两 NQD 序列线性形式的强稳定性; 文献[7]讨论了 ϕ-混合随机变量序列线性形式的强稳定性. 本文研究 $\widetilde{\phi}$-混合随机变量序列线性形式的强稳定性.

定义2 如果存在两列常数 $\{b_n\}$ 和 $\{d_n\}$, $0<b_n\uparrow\infty$, 使得 $b_n^{-1}X_n-d_n\to 0$ a.s., 则称随机变量序列

收稿日期: 2011-07-13.
作者简介: 谭希丽(1974—), 女, 汉族, 博士, 副教授, 从事概率极限理论的研究, E-mail: tanxl0832@sina.com.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10926169; 11171003)和吉林省教育厅科研基金(批准号: 2012-158).

$\{X_n, n\geqslant 1\}$是强稳定的.

定义3 如果存在常数 $C>0$, 使得 $P(|X_n|>t)\leqslant CP(X>t)$, $\forall t>0$, $\forall n\geqslant 1$, 则称随机变量序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$被非负随机变量 X 所控制, 记为$\{X_n\}\prec X$.

引理1[4] 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是均值为0的$\tilde{\phi}$-混合序列, $\{a_n, n\geqslant 1\}$为一正常数序列, 且满足 $0<a_n\uparrow\infty$, 如果存在某个 $p\in[1,2]$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{E|X_n|^p}{a_n^p}<\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=0$ a. s.

引理2[7] 设$\{a_n, n\geqslant 1\}$和$\{b_n, n\geqslant 1\}$是两个正数序列, $c_n=b_n/a_n$, $b_n\uparrow\infty$, $\{c_n, n\geqslant 1\}$严格递增, $\{X_n, n\geqslant 1\}$为零均值随机变量序列, 且满足$\{X_n\}\prec X$, 其中 X 为一非负随机变量. 对任意的 $x>0$, 定义 $N(x)=\operatorname{card}\{n: c_n\leqslant x\}$, 若: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>c_n)<\infty$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_1^{\infty}P(|X_n|>sc_n)\mathrm{d}s<\infty$ 或 1′) $EN(X)<\infty$; 2′) $\int_1^{\infty}EN\left(\dfrac{X}{s}\right)\mathrm{d}s<\infty$, 则

$$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iEX_iI_{(|X_i|\leqslant c_i)}\to 0\quad(n\to\infty).$$

引理3[8] 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是任意随机变量序列, 若存在某个随机变量 X, 使得对任意的 $x>0$ 及 $n\geqslant 1$, 有 $P(|X_n|\geqslant t)\leqslant CP(|X|\geqslant t)$, 则对$\forall\beta>0$及$\forall t>0$, 有

$$E|X_n|^{\beta}I_{(|X_n|\leqslant t)}\leqslant C[E|X|^{\beta}I_{(|X|\leqslant t)}+t^{\beta}P(|X|\geqslant t)].$$

1 主要结果

定理1 设$\{a_n, n\geqslant 1\}$和$\{b_n, n\geqslant 1\}$是两个正数序列, $c_n=b_n/a_n$, $b_n\uparrow\infty$, $\{c_n, n\geqslant 1\}$严格递增, $\{X_n, n\geqslant 1\}$是$\tilde{\phi}$-混合随机变量序列, 且满足$\{X_n\}\prec X$, 其中 X 为一非负随机变量. 对任意的 $x>0$, 定义$N(x)=\operatorname{card}\{n: c_n\leqslant x\}$, 若:

1) $EN(X)<\infty$;

2) $\int_0^{\infty}t^{p-1}P(X>t)\int_t^{\infty}\dfrac{N(y)}{y^{p+1}}\mathrm{d}y\mathrm{d}t<\infty$, 其中 $1\leqslant p\leqslant 2$.

则存在$\{d_n, n\geqslant 1\}$, 使得

$$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iX_i-d_n\to 0\ \text{a. s.}$$

证明: 令 $Y_n=X_nI_{(|X_n|\leqslant c_n)}$, $n\geqslant 1$. 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(X_n\neq Y_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>c_n)\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}P(X>c_n)\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}P(N(X)\geqslant N(c_n))=$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}P(N(X)\geqslant n)\leqslant CEN(X)<\infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理, 对数列$\{d_n, n\geqslant 1\}$, 为证 $b_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i-d_n\to 0$ a. s., 只需证 $b_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}a_iY_i-d_n\to 0$ a. s. 若能证明 $b_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(Y_i-EY_i)\to 0$ a. s., 则可取 $d_n=b_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}a_iEY_i$. 由于$\{a_n(Y_n-EY_n), n\geqslant 1\}$是均值为0的$\tilde{\phi}$-混合序列, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|a_n(Y_n-EY_n)|^p}{b_n^p}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{-p}E|Y_n|^p=C\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{-p}\cdot p\int_0^{\infty}t^{p-1}P(|X_n|>t,\ |X_n|\leqslant c_n)\mathrm{d}t\leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{-p}\cdot p\int_0^{c_n}t^{p-1}P(|X_n|>t)\mathrm{d}t\leqslant C\int_0^{\infty}t^{p-1}P(X>t)\cdot\sum_{\{n:\ c_n>t\}}c_n^{-p}\mathrm{d}t\leqslant$$
$$C\int_0^{\infty}t^{p-1}P(X>t)\cdot\int_t^{\infty}\frac{N(y)}{y^{p+1}}\mathrm{d}y\mathrm{d}t.\tag{2}$$

式(2)最后一个不等式成立基于以下事实：

$$\sum_{\{n:\ c_n>t\}} c_n^{-p} = \lim_{s\to\infty}\sum_{\{n:\ t<c_n<s\}} c_n^{-p} = \lim_{s\to\infty}\int_t^s y^{-p}\mathrm{d}N(y) = \lim_{s\to\infty}\left[s^{-p}N(s) - t^{-p}N(t) + p\int_{t<y\leqslant s}\frac{N(y)}{y^{p+1}}\,\mathrm{d}y\right],$$

并且

$$s^{-p}N(s) \leqslant p\int_s^\infty \frac{N(y)}{y^{p+1}}\,\mathrm{d}y \to 0 \quad (s\to\infty),$$

由条件 2)知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{E|a_n(Y_n-EY_n)|^p}{b_n^p} < \infty$，再由引理 1 知 $b_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(Y_i-EY_i)\to 0$ a. s.

由定理 1 和引理 2，可得：

推论 1　在定理 1 的条件下，$EX_n=0(n\geqslant 1)$，$\int_1^\infty EN(X/s)\mathrm{d}s < \infty$，则 $b_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i\to 0$ a. s.

定理 2　设$\{a_n,n\geqslant 1\}$和$\{b_n,n\geqslant 1\}$是两个正数序列，$c_n=b_n/a_n$，$b_n\uparrow\infty$，$\{c_n,n\geqslant 1\}$严格递增，$\{X_n,n\geqslant 1\}$是零均值 $\tilde{\phi}$-混合随机变量序列，且满足$\{X_n\}\prec X$，其中 X 为一非负随机变量. 对任意的 $x>0$，定义 $N(x)=\mathrm{card}\{n:\ c_n\leqslant x\}$，若：

1) $EN(X)<\infty$；

2) $\int_1^\infty EN(X/s)\mathrm{d}s < \infty$；

3) $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} c_j^p\sum\limits_{j=n}^{\infty}c_j^{-p} = O(n)$.

则

$$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\to 0 \text{ a. s.}$$

证明：令 $Y_n=X_nI_{(|X_n|\leqslant c_n)}$，$n\geqslant 1$. 类似于定理 1 的证明，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(X_n\neq Y_n) < \infty$，因此由 Borel-Cantelli 引理，为证 $b_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i\to 0$ a. s.，只需证 $b_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}a_iY_i\to 0$ a. s. 注意到

$$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iY_i = b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i(Y_i-EY_i) + b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iEY_i,$$

由引理 2，$b_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}a_iEY_i\to 0$ a. s.，因此只需证明

$$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i(Y_i-EY_i)\to 0 \text{ a. s.}$$

再注意到$\{a_n(Y_n-EY_n),n\geqslant 1\}$是均值为 0 的 $\tilde{\phi}$-混合序列，并且由引理 3，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|a_n(Y_n-EY_n)|^p}{b_n^p} &\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{-p}E|X_n|^pI_{(|X_n|\leqslant c_n)} \leqslant \\ &C\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{-p}\cdot c_n^pP(X\geqslant c_n) + C\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{-p}EX^pI_{(X\leqslant c_n)} = \\ &C\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geqslant c_n) + C\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{-p}EX^pI_{(X\leqslant c_n)} = I_1+I_2.\end{aligned}\tag{3}$$

从而

$$I_1\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}P(N(X)\geqslant N(c_n)) = C\sum_{n=1}^{\infty}P(N(X)\geqslant n)\leqslant CEN(X) < \infty.\tag{4}$$

令 $c_0=0$，由条件 1)，3)有

$$I_2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}c_n^{-p}EX^pI_{(c_{j-1}<X\leqslant c_j)} = \sum_{j=1}^{\infty}EX^pI_{(c_{j-1}<X\leqslant c_j)}\cdot\sum_{n=j}^{\infty}c_n^{-p}\leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(c_{j-1} < X \leqslant c_j) \cdot c_j^p \cdot \sum_{n=j}^{\infty} c_n^{-p} \leqslant C\sum_{j=1}^{\infty} jP(c_{j-1} < X \leqslant c_j) =$$

$$C\sum_{j=0}^{\infty} P(X > c_j) \leqslant C\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} P(X > c_j)\Big) \leqslant C(1 + EN(X)) < \infty, \tag{5}$$

由式(3)~(5), 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E|a_n(Y_n - EY_n)|^p}{b_n^p} < \infty.$$

因此由引理1知结论成立.

下面令 $\alpha(x): R^+ \to R^+$ 是一个正的、非增的函数, $a_n = \alpha(n)$, $b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $c_n = \frac{b_n}{a_n}$, $n \geqslant 1$, 且:

(i) $b_n \uparrow \infty$;

(ii) $0 < \liminf_{n\to\infty} n^{-1} c_n \alpha(\log c_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} n^{-1} c_n \alpha(\log c_n) < \infty$;

(iii) $x\alpha(\log^+ x)$是非降函数, $x > 0$.

定理3 设$\{X_n, n \geqslant 1\}$是一列同分布$\tilde{\phi}$-混合随机变量, 如果$E|X_1|\alpha(\log^+ |X_1|) < \infty$, 则$\exists\, d_n \in R$, $n = 1, 2, \cdots$, 使得 $b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i X_i - d_n \to 0$ a. s.

如果$\{X_n, n \geqslant 1\}$不是同分布的, 则有:

定理4 设$\{X_n, n \geqslant 1\}$是一列$\tilde{\phi}$-混合随机变量, 存在$1 \leqslant p \leqslant 2$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} E|X_n \alpha(\log^+ |X_n|)|^p < \infty,$$

则存在 $d_n \in R(n = 1, 2, \cdots)$, 使得 $b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i X_i - d_n \to 0$ a. s.

定理3和定理4的证明分别类似于文献[7]中定理3和定理4的证明, 故略.

参 考 文 献

[1] 陆传荣, 林正炎. 混合相依变量的极限理论[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

[2] WU Qun-ying. Almost Sure Convergence for $\tilde{\phi}$ Mixing Random Variable Sequences [J]. Math Appl, 2008, 21(4): 629-634.

[3] WU Qun-ying, LIN Liang. Convergence Properties of $\tilde{\phi}$-Mixing Random Sequences [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2004, 21(1): 75-80. (吴群英, 林亮. $\tilde{\phi}$混合序列的完全收敛性和强收敛性[J]. 工程数学学报, 2004, 21(1): 75-80.)

[4] WANG Xue-jun, HU Shu-he, SHEN Yan. Convergence Properties about the Partial Sum of $\tilde{\phi}$-Mixing Random Variable Sequences [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2009, 26(1): 183-186. (王学军, 胡舒合, 沈燕. $\tilde{\phi}$-混合序列部分和的收敛性质[J]. 工程数学学报, 2009, 26(1): 183-186.)

[5] Jamison B, Orey S, Pruitt W. Convergence of Weighted Averages of Independent Random Variables [J]. Mathematics and Statistics, 1965, 4(1): 40-44.

[6] WAN Cheng-gao, CHEN Fen. Strong Stability of Linear Forms with Pairwise NQD Random Sequences [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2009, 25(2): 192-200. (万成高, 陈芬. 两两NQD序列线性形式的强稳定性[J]. 应用概率统计, 2009, 25(2): 192-200.)

[7] GAN Shi-xing. Strong Stability of Linear Forms in ϕ-Mixing Random Variables [J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 2009, 14(1): 6-10.

[8] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

(责任编辑: 赵立芹)