第50卷 第3期 吉林大学学报(理学版) Vol. 50 No. 3
2012年5月 Journal of Jilin University (Science Edition) May 2012

一维 Lagrange 四次元有限体积法的超收敛性

李莎莎[1,2], 左 平[3]
(1. 吉林大学 数学研究所, 长春 130012; 2. 大庆师范学院 数学科学学院, 黑龙江 大庆 163712;
3. 空军航空大学 基础部, 长春 130022)

摘要: 通过取等距节点四次 Lagrange 插值的导数超收敛点作为对偶单元的节点, 取 Lagrange 型四次有限元空间为试探函数空间, 取相应于对偶剖分的分片常数函数空间为检验函数空间的方法, 得到了求解两点边值问题的四次元有限体积法, 证明了该方法具有最优的 H^1 模和 L^2 模误差估计, 并讨论了对偶单元节点的导数超收敛估计. 数值实验验证了理论分析结果.

关键词: 两点边值问题; 四次有限体积元法; 导数超收敛点; 误差估计
中图分类号: O241.82 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2012)03-0397-07

Superconvergence of One Dimension Lagrange Fourth-Order Finite Volume Element Method

LI Sha-sha[1,2], ZUO Ping[3]
(1. *Institute of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*;
2. *Department of Mathematics*, *Daqing Normol University*, *Daqing* 163712, *Heilongjiang Province*, *China*;
3. *Department of Foundation*, *Aviation University of Air Force*, *Changchun* 130022, *China*)

Abstract: We chose fourth order Lagrange interpolated function associated with the nodes as trial function, piecewise constant function as test function, and derivative superconvergent points as dual partition nodes so that a new kind of Lagrange fourth order finite volume element method was obtained for solving two-point boundary value problems. It was proved that the method has optimal H^1 and L^2 error estimates. The superconvergence of numerical derivatives was discussed. Finally, the numerical experiments show the results of theoretical analysis.

Key words: two-point boundary value problem; fourth order finite volume element method; derivative superconvergent point; error estimate

有限体积元法(FVEM)[1]综合了有限差分法和有限元法的优点, 其作为求解偏微分方程的一种有效数值方法应用广泛. 文献[2-3]研究了两点边值问题的有限体积元法; 文献[4-6]给出了一次有限体积元格式的各种模和超收敛的误差估计. 由插值理论可知, r 次 Lagrange 插值对一阶导数的逼近一般只有 r 阶精度, 但并不排除在个别点处能达到更高的精度. 文献[7-8]研究了基于应力佳点的超收敛有限元法; 文献[9-10]给出了两点边值问题基于二、三次插值应力佳点的高精度有限体积元格式, 并给出了各种模和超收敛的误差估计. 本文利用等距节点四次 Lagrange 插值的导数超收敛点作为对偶单元的节点, 构造一种新的 Lagrange 型四次有限体积元法, 定义了四次有限体积元格式, 研究了 H^1,L^2 模的误差估计, 分析了超收敛性, 并结合数值算例, 验证了新方法的有效性和理论结果的正确性.

收稿日期: 2011-11-16.
作者简介: 李莎莎(1982—), 女, 汉族, 博士研究生, 讲师, 从事偏微分方程有限体积法的研究, E-mail: lishashasha@sina.com.
基金项目: 黑龙江省青年自然科学基金(批准号: QC2011C103)和大庆师范学院青年基金(批准号: 09ZQ02).

1 四次 Lagrange 插值的导数超收敛点

在$[-h,h]$上, 应用5个等距节点$-h,-h/2,0,h/2,h$, 对未知函数u作四次 Lagrange 插值, 插值函数记为$\Pi_h u$. 令$\xi=x/h$, 则

$$\Pi_h u=\frac{2}{3}\left(\xi^2-\frac{1}{4}\right)(\xi-1)\xi u(-h)-\frac{8}{3}(\xi^2-1)\left(\xi-\frac{1}{2}\right)\xi u\left(-\frac{h}{2}\right)+4(\xi^2-1)\left(\xi-\frac{1}{4}\right)\xi u(0)-\frac{8}{3}(\xi^2-1)\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\xi u\left(\frac{h}{2}\right)+\frac{2}{3}\left(\xi^2-\frac{1}{4}\right)(\xi+1)\xi u(h),\tag{1}$$

于是

$$(\Pi_h u')(x_0)=\frac{1}{6h^4}\Big[(16x_0^3-12x_0^2h-2x_0h^2+h^3)u(-h)-8(8x_0^3-3x_0^2h-4x_0h^2+h^3)u\left(-\frac{h}{2}\right)+6(16x_0^3-10x_0h^2)u(0)-8(8x_0^3+3x_0^2h-4x_0h^2-h^3)u\left(\frac{h}{2}\right)+(16x_0^3+12x_0^2h-2x_0h^2-h^3)u(h)\Big].\tag{2}$$

将$u(-h),u(-h/2),u(0),u(h/2),u(h)$在$x_0$做 Taylor 展开, 代入式(2)得

$$(\Pi_h u')(x_0)=u'(x_0)+\frac{1}{480}(-20x_0^4+15x_0^2h^2-h^4)u^{(5)}(x_0)+\frac{1}{4\,320}(-105x_0^3h^2+36x_0^5+4x_0h^4)u^{(6)}(x_0)+o(h^6),\tag{3}$$

则当$x_0=\pm\sqrt{(15\pm\sqrt{145})/40}\,h$时, 有

$$(\Pi_h u')(x_0)=u'(x_0)+o(h^5).\tag{4}$$

因此, 对单元$[-1,1]$, 4个点$\pm\sqrt{(15+\sqrt{145})/40}$, $\pm\sqrt{(15-\sqrt{145})/40}$才是等距节点四次 Lagrange 插值的导数超收敛点.

2 两点边值问题的四次 Lagrange 插值超收敛有限体积元法

考虑两点边值问题:

$$\begin{cases}Lu=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+qu=f, & a<x<b,\\ u(a)=0, \quad u'(b)=0,\end{cases}\tag{5}$$

其中: $p\in C^1(I)$, $p(x)\geqslant p_{\min}>0$; $q\in C^1(I)$, $q(x)\geqslant 0$; $f\in L^2(I)$.

下面通过选取试探函数空间为 Lagrange 型四次元空间, 检验函数空间为分段常数函数空间, 导出式(5)的四次元差分格式, 并进行数值分析.

2.1 试探函数空间与检验函数空间

首先, 对区间$I=[a,b]$做剖分I_h, 剖分单元为$I_i=[x_{4(i-1)},x_{4i}]$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 每个单元均匀剖分成4等分, 步长为h_i, 剖分节点为$x_{4i-4}<x_{4i-3}<x_{4i-2}<x_{4i-1}<x_{4i}$, 并设$h=\max h_i$. 其次, 对于区间$[x_{4i-4},x_{4i}]$ $(i=1,2,\cdots,n)$上基于5个等距节点的四次 Lagrange 插值的导数超收敛点为$x_{4i-2-\sqrt{150+10\sqrt{145}}/10}$, $x_{4i-2-\sqrt{150-10\sqrt{145}}/10}$, $x_{4i-2+\sqrt{150-10\sqrt{145}}/10}$, $x_{4i-2+\sqrt{150+10\sqrt{145}}/10}$.

令$k_1=\sqrt{150+10\sqrt{145}}/10$, $k_2=\sqrt{150-10\sqrt{145}}/10$. 记$I_i^*=[x_{4i-2-k_1},x_{4i-2-k_2}]$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $I_i^{**}=[x_{4i-2-k_2},x_{4i-2+k_2}]$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $I_i^{***}=[x_{4i-2+k_2},x_{4i-2+k_1}]$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $I_i^{****}=[x_{4i-2+k_1},x_{4(i+1)-2-k_1}]$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$, $I_n^{****}=[x_{4n-2+k_1},x_{4n}]$. 则所有$I_i^*,I_i^{**},I_i^{***},I_i^{****},I_n^{****},I_0^{****}$构成$I_h$的对偶剖分$I_h^*,I_i^*,I_i^{**},I_i^{***},I_i^{****},I_n^{****},I_0^{****}$称为控制体积.

取试探函数空间U_h为相应于I_h的 Lagrange 型四次有限元空间, 构造$[-1,1]$上的四次 Lagrange 插值基函数

$$N_{-1}(\xi)=\frac{2}{3}\left(\xi^2-\frac{1}{4}\right)(\xi-1)\xi,\quad N_{-1/2}(\xi)=-\frac{8}{3}(\xi^2-1)\left(\xi-\frac{1}{2}\right)\xi,\quad N_0(\xi)=4(\xi^2-1)\left(\xi^2-\frac{1}{4}\right),$$
$$N_{1/2}(\xi)=-\frac{8}{3}(\xi^2-1)\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\xi,\quad N_1(\xi)=\frac{2}{3}\left(\xi^2-\frac{1}{4}\right)(\xi+1)\xi.$$

设 $u_i=u_h(x_i)$，令 $\xi=(x-x_{4i-2})/(2h_i)$，则 $x\in I_i$，对应 $\xi\in[-1,1]$．令 $\phi_{4i-4}(x)=N_{-1}(\xi)$，$\phi_{4i-3}(x)=N_{-1/2}(\xi)$，$\phi_{4i-2}(x)=N_0(\xi)$，$\phi_{4i-1}(x)=N_{1/2}(\xi)$，$\phi_{4i}(x)=N_1(\xi)$，则可得关于节点 $x_{4i-4},x_{4i-3},x_{4i-2},x_{4i-1},x_{4i}$的插值函数$\{\phi_{4i-4}(x),\phi_{4i-3}(x),\phi_{4i-2}(x),\phi_{4i-1}(x),\phi_{4i}(x);1\leqslant i\leqslant n\}$，其构成 U_h 的基底，从而对任意的 $u_h\in U_h$ 可表示为

$$u_h(x)=\sum_{i=1}^{n}[u_{4i}\phi_{4i}(x)+u_{4i-1}\phi_{4i-1}(x)+u_{4i-2}\phi_{4i-2}(x)+u_{4i-3}\phi_{4i-3}(x)+u_{4i-4}\phi_{4i-4}(x)],$$

其中：$u_{4i}=u_h(x_{4i})$；$u_{4i-1}=u_h(x_{4i-1})$；$u_{4i-2}=u_h(x_{4i-2})$；$u_{4i-3}=u_h(x_{4i-3})$；$u_{4i-4}=u_h(x_{4i-4})$．在单元 $I_i=[x_{4i-4},x_{4i}]$上，令 $\xi=(x-x_{4i-2})/(2h_i)$，则其上的四次插值函数为

$$\begin{aligned}u_h=&\frac{1}{3}\Big[2\left(\xi^2-\frac{1}{4}\right)(\xi-1)\xi u_{4i-4}-8(\xi^2-1)\left(\xi-\frac{1}{2}\right)\xi u_{4i-3}+12(\xi^2-1)\left(\xi^2-\frac{1}{4}\right)u_{4i-3}-\\&8(\xi^2-1)\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\xi u_{4i-1}+2\left(\xi^2-\frac{1}{4}\right)(\xi+1)\xi u_{4i}\Big]=\\&\frac{1}{3}(\xi^4,\xi^3,\xi^2,\xi,1)\begin{pmatrix}2&-8&12&-8&2\\-2&4&0&-4&2\\-1/2&8&-15&8&-1/2\\1/2&-4&0&4&-1/2\\0&0&3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{4i-4}\\u_{4i-3}\\u_{4i-2}\\u_{4i-1}\\u_{4i}\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{6}$$

因此

$$\begin{aligned}u_h'=&\frac{1}{h_i}\Big[\left(\frac{4}{3}\xi^3-\xi^2-\frac{1}{6}\xi+\frac{1}{12}\right)u_{4i-4}+\left(-\frac{16}{3}\xi^3+2\xi^2+\frac{8}{3}\xi-\frac{2}{3}\right)u_{4i-3}+(8\xi^3-5\xi)u_{4i-2}-\\&8(\xi^2-1)\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\xi u_{4i-1}+2\left(\xi^2-\frac{1}{4}\right)(\xi+1)\xi u_{4i}\Big]=\\&(\xi^3,\xi^2,\xi,1)\begin{pmatrix}-4/3&4&-4&4/3\\1&-1&-1&1\\1/6&-5/2&5/2&-1/6\\-1/12&7/12&7/12&-1/12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(u_{4i-3}-u_{4i-4})/h_i\\(u_{4i-2}-u_{4i-3})/h_i\\(u_{4i-1}-u_{4i-2})/h_i\\(u_{4i}-u_{4i-1})/h_i\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{7}$$

检验函数空间 V_h 取为相应于 I_h^* 的分片常数函数空间，令其关于节点 $x_{4i-3},x_{4i-2},x_{4i-1},x_{4i}$的基函数为 $\boldsymbol{\Psi}_{4i}(x),\boldsymbol{\Psi}_{4i-1}(x),\boldsymbol{\Psi}_{4i-2}(x),\boldsymbol{\Psi}_{4i-3}(x)$，则 $\forall v_h\in V_h$ 可表示为

$$v_h=\sum_{i=1}^{n}[v_{4i}\boldsymbol{\Psi}_{4i}(x)+v_{4i-1}\boldsymbol{\Psi}_{4i-1}(x)+v_{4i-2}\boldsymbol{\Psi}_{4i-2}(x)+v_{4i-3}\boldsymbol{\Psi}_{4i-3}(x)].$$

采用上述的 U_h,V_h，相应的四次元差分格式为：求 $u_h\in U_h$，使得下式成立：

$$\begin{cases}a(u_h,\boldsymbol{\Psi}_{4i-3})=(f,\boldsymbol{\Psi}_{4i-3}), & i=1,2,\cdots,n,\\a(u_h,\boldsymbol{\Psi}_{4i-2})=(f,\boldsymbol{\Psi}_{4i-2}), & i=1,2,\cdots,n,\\a(u_h,\boldsymbol{\Psi}_{4i-1})=(f,\boldsymbol{\Psi}_{4i-1}), & i=1,2,\cdots,n,\\a(u_h,\boldsymbol{\Psi}_{4i})=(f,\boldsymbol{\Psi}_{4i}), & i=1,2,\cdots,n.\end{cases}\tag{8}$$

2.2　$\boldsymbol{H}^1$ 模估计

由式(5)，(6)，引入如下离散范数：

$$|u_h|_{0,h}=\sum_{i=1}^{n}[h_i(u_{4i-4}^2+u_{4i-3}^2+u_{4i-2}^2+u_{4i-1}^2+u_{4i}^2)]^{1/2},$$

$$|u_h|_{1,h}=\sum_{i=1}^{n}\{[(u_{4i-3}-u_{4i-4})^2+(u_{4i-2}-u_{4i-3})^2+(u_{4i-1}-u_{4i-2})^2+(u_{4i}-u_{4i-1})^2]/h_i\}^{1/2}.$$

参考文献[4]中第二章第三节的证明易得:

引理1 在 U_h 中, $|\cdot|_{0,h}$ 与 $|\cdot|_0$ 等价, 即存在与 u_h 无关的常数 $C_1,C_2,C_3,C_4>0$, 使得

$$C_1|u_h|_{0,h} \leqslant |u_h|_0 \leqslant C_2|u_h|_{0,h}, \qquad \forall u_h \in U_h,$$

$$C_3|u_h|_{1,h} \leqslant |u_h|_1 \leqslant C_4|u_h|_{1,h}, \qquad \forall u_h \in U_h.$$

引理2 当 h 充分小时, $a(u_h,\Pi_h^* u_h)$ 是正定的, 即存在与子空间 U_h 无关的常数 $\beta>0$, 使得

$$a(u_h,\Pi_h^* u_h) \geqslant \beta|u_h|_1^2, \qquad \forall u_h \in U_h.$$

定理1 设问题(5)的解为 $u\in H_E^1(I)\cap H^5(I)$, u_h 是四次元差分格式(8)的解, 则有误差估计: $|u-u_h|_1\leqslant ch^4|u|_5$.

证明: 由于 $a(u,v_h)=(f,v_h)$, $a(u_h,v_h)=(f,v_h)$, $\forall u_h\in U_h$, 因此 $a(u-u_h,v_h)=0$, $\forall u_h\in U_h$. 设 $\Pi_h^* u$ 是 u 向试探函数空间 U_h 的插值投影, 则由引理2, 有

$$|u_h-\Pi_h u|_1 \leqslant \frac{1}{\beta}\sup_{\omega\in U_h}\frac{|a(u_h-\Pi_h u,\Pi_h^*\omega_h)|}{|\omega_h|_1}, \tag{9}$$

从而

$$\begin{aligned}|a(u_h-\Pi_h u,\Pi_h^*\omega_h)| = \sum_{i=1}^{n}\Big\{&\omega_{4i-3}\Big[p_{4i-2-k_1}(u-\Pi_h u)'(x_{4i-2-k_1})-p_{4i-2-k_2}(u-\Pi_h u)'(x_{4i-2-k_2})+\\ &\int_{I_i^*}q(u-\Pi_h u)\mathrm{d}x\Big]+\\ &\omega_{4i-2}\Big[p_{4i-2-k_2}(u-\Pi_h u)'(x_{4i-2-k_2})-p_{4i-2+k_2}(u-\Pi_h u)'(x_{4i-2+k_2})+\int_{I_i^{**}}q(u-\Pi_h u)\mathrm{d}x\Big]+\\ &\omega_{4i-1}\Big[p_{4i-2+k_2}(u-\Pi_h u)'(x_{4i-2+k_2})-p_{4i-2+k_1}(u-\Pi_h u)'(x_{4i-2+k_1})+\int_{I_i^{***}}q(u-\Pi_h u)\mathrm{d}x\Big]\Big\}+\\ &\sum_{i=1}^{n-1}\Big\{\omega_{4i}\Big[p_{4i-2+k_1}(u-\Pi_h u)'(x_{4i-2+k_1})-p_{4(i+1)-2-k_1}(u-\Pi_h u)'(x_{4(i+1)-2-k_1})+\int_{I_i^{****}}q(u-\Pi_h u)\mathrm{d}x\Big]+\\ &\omega_{4n}\Big[p_{4n-2+k_1}(u-\Pi_h u)'(x_{4i-2+k_1})+\int_{I_i^{****}}q(u-\Pi_h u)\mathrm{d}x\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

利用 Cauchy 不等式及引理1和引理2, 得

$$\begin{aligned}|a(u_h-\Pi_h u,\Pi_h^*\omega_h)|\leqslant |p_{\max}|\Big\{&\sum_{i=1}^{n}[((u-\Pi_h u)'(x_{4i-2-k_1}))^2+((u-\Pi_h u)'(x_{4i-2-k_2}))^2+\\ &((u-\Pi_h u)'(x_{4i-2+k_1}))^2]h_i\Big\}^{1/2}+\\ &\Big\{\sum_{i=1}^{n}[(\omega_{4i-3}-\omega_{4i-4})^2+(\omega_{4i-2}-\omega_{4i-3})^2+(\omega_{4i-1}-\omega_{4i-2})^2+(\omega_{4i}-\omega_{4i-1})^2]\frac{1}{h_i}\Big\}^{1/2}+\\ &|q_{\max}|\Big\{\sum_{i=1}^{n}\Big[\Big(\int_{I_i^*}|u-\Pi_h u|\mathrm{d}x\Big)^2+\Big(\int_{I_i^{**}}|u-\Pi_h u|\mathrm{d}x\Big)^2+\Big(\int_{I_i^{***}}|u-\Pi_h u|\mathrm{d}x\Big)^2+\\ &\Big(\int_{I_i^{*****}}|u-\Pi_h u|\mathrm{d}x\Big)^2+\Big(\int_{I_n^{****}}|u-\Pi_h u|\mathrm{d}x\Big)^2\Big]\Big\}^{1/2}\Big[\sum_{i=1}^{n}(\omega_{4i-4}^2+\omega_{4i-3}^2+\omega_{4i-2}^2+\omega_{4i-1}^2+\omega_{4i}^2)\Big]^{1/2}\triangleq\\ &I_1+I_2.\end{aligned} \tag{10}$$

一方面, 当 $u\in H_E^1(I)\cap H^5(I)$, 有

$$\begin{aligned}I_1\leqslant ch^{1/2}\Big\{&\sum_{i=1}^{n}[((u-\Pi_h u)'(x_{4i-2-k_1}))^2+((u-\Pi_h u)'(x_{4i-2-k_2}))^2+\\ &((u-\Pi_h u)'(x_{4i-2+k_2}))^2+((u-\Pi_h u)'(x_{4i-2+k_1}))^2]\Big\}\leqslant ch^4|u|_5|\omega_h|_1.\end{aligned} \tag{11}$$

事实上, 由插值的意义, 当 $x=x_{4i-4},x_{4i-3},x_{4i-2},x_{4i-1},x_{4i}$ 时, 有 $u-\Pi_h u=0$, 由 Rolle 定理, 存在 $\eta_1\in(x_{4i-4},x_{4i-3})$, $\eta_2\in(x_{4i-3},x_{4i-2})$, $\eta_3\in(x_{4i-2},x_{4i-1})$, $\eta_4\in(\eta_{4i-1},\eta_{4i})$, $\eta_5\in(\eta_1,\eta_2)$, $\eta_6\in(\eta_2,\eta_3)$, $\eta_7\in(\eta_3,\eta_4)$, $\eta_8\in(\eta_5,\eta_6)$, $\eta_9\in(\eta_6,\eta_7)$, $\eta_{10}\in(\eta_8,\eta_9)$, 使得

$$(u-\Pi_h u)'(\eta_i)=0,\quad i=1,2,3,4;\quad (u-\Pi_h u)''(\eta_i)=0,\quad i=5,6,7;$$
$$(u-\Pi_h u)'''(\eta_i)=0,\quad i=8,9;\quad (u-\Pi_h u)^{(4)}(\eta_i)=0,\quad i=10.$$

于是

$$(u-\Pi_h u)'(x_{4i-2-k})=\int_{\eta_1}^{x_{4i-2-k}}(u-\Pi_h u)''\mathrm{d}x=\int_{\eta_1}^{x_{4i-2-k}}\Big(\int_{\eta_5}^{x}(u-\Pi_h u)'''\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\eta_1}^{x_{4i-2-k}}\int_{\eta_5}^{x}\int_{\eta_8}^{x}\Big(\int_{\eta_{10}}^{x}(u-\Pi_h u)^{(5)}\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}x\mathrm{d}x,$$

从而

$$|(u-\Pi_h u)'(x_{4i-2-k})|\leqslant 4h\int_{x_{4i-4}}^{x_{4i}}|u^{(5)}|\mathrm{d}x\leqslant 4h^{7/2}\Big(\int_{x_{4i-4}}^{x_{4i}}|u^{(5)}|^2\Big)^{1/2}\mathrm{d}x.$$

同理

$$|(u-\Pi_h u)'(x_{4i-2-k_2})|\leqslant ch^{7/2}\Big(\int|u^{(5)}|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2},\qquad |(u-\Pi_h u)'(x_{4i-2+k_2})|\leqslant ch^{7/2}\Big(\int|u^{(5)}|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2},$$
$$|(u-\Pi_h u)'(x_{4i-2+k_1})|\leqslant ch^{7/2}\Big(\int|u^{(5)}|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

另一方面，

$$I_2\leqslant ch^{-1/2}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\Big[\Big(\int_{I_i^*}|u-\Pi_h u|\mathrm{d}x\Big)^2+\Big(\int_{I_i^{**}}|u-\Pi_h u|\mathrm{d}x\Big)^2+\Big(\int_{I_i^{***}}|u-\Pi_h u|\mathrm{d}x\Big)^2+$$
$$\Big(\int_{I_i^{****}}|u-\Pi_h u|\mathrm{d}x\Big)^2+\Big(\int_{I_n^{****}}|u-\Pi_h u|\mathrm{d}x\Big)^2\Big]\Big\}^{1/2}|\omega_h|_1\leqslant$$
$$ch^{-1/2}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\Big[\int_{I_i^*}|u-\Pi_h u|^2\mathrm{d}x+\int_{I_i^{**}}|u-\Pi_h u|^2\mathrm{d}x+\int_{I_i^{***}}|u-\Pi_h u|^2\mathrm{d}x+$$
$$\int_{I_i^{*****}}|u-\Pi_h u|^2\mathrm{d}x+\int_{I_n^{****}}|u-\Pi_h u|^2\mathrm{d}x\Big]\Big\}^{1/2}|\omega_h|_1\leqslant$$
$$ch^{-1/2}h^{1/2}|u-\Pi_h u|_0|\omega_h|_1\leqslant ch^5|u|_5|\omega_h|_1,\tag{12}$$

将式(11)，(12)代入式(10)，有 $|a(u_h-\Pi_h u,\Pi_h^*\omega_h)|\leqslant ch^4|u|_5|\omega_h|_1$，又由式(9)可得 $|u_h-\Pi_h u|_1\leqslant ch^4|u|_5$．当 $u\in H_E^1(I)\cap H^5(I)$ 时，由逼近论可知 $|u-\Pi_h u|_1\leqslant ch^4|u|_5$．因此 $|u-u_h|_1\leqslant ch^4|u|_5$．证毕.

2.3　超收敛分析和 L^2 误差估计

引理 3[4]　设 u,u_h 分别为边值问题及其广义差分格式的解，相应于广义差分格式的双线性形式满足如下插值弱估计：

$$|a(u_h-\Pi_h u,\Pi_h^*\omega_h)|\leqslant ch^{k+1}\|u\|_{k+2}\|\omega_h\|_1,\qquad\forall\omega_h\in U_h,$$

则有 $\|a(\Pi_h u-u_h)\|_1\leqslant ch^{k+1}\|u\|_{k+2}$．令 N_k 为插值应力佳点集：对于 $x_0\in N_k$，有

$$|\overline{\nabla}(u-\Pi_h u)(x_0)|\leqslant ch^{k+1-N/2}\|u\|_{k+2},$$

则

$$\Big[\frac{1}{r}\sum_{x_0\in N_k}|\overline{\nabla}(u-\Pi_h u)(x_0)|^2\Big]^{1/2}\leqslant ch^{k+1}\|u\|_{k+2},$$

其中 r 为 N_k 的点数.

定理 2　对于两点边值问题的四次元差分格式(5)，有如下插值弱估计：

$$|a(u_h-\Pi_h u,\Pi_h^*\omega_h)|\leqslant ch^5|u|_6|\omega_h|_1,\quad\forall u\in H^6(I),\quad\omega_h\in U_h.$$

证明：首先，有

$$|a(u_h-\Pi_h u,\Pi_h^*\omega_h)|\leqslant c\Big[\sum_{i=1}^{n}|u_h-\Pi_h u|'_{4i-2-k_1}(\omega_{4i-3}-\omega_{4i-4})+\sum_{i=1}^{n}|u_h-\Pi_h u|'_{4i-2-k_2}(\omega_{4i-2}-\omega_{4i-3})+$$
$$\sum_{i=1}^{n}|u_h-\Pi_h u|'_{4i-2+k_2}(\omega_{4i-1}-\omega_{4i-2})+\sum_{i=1}^{n}|u_h-\Pi_h u|'_{4i-2+k_1}(\omega_{4i}-\omega_{4i-1})\Big]+ch^5|u|_5|\omega_h|_1=$$

$$c\sum_{i=1}^{4}E_i + ch^5|u|_5|\omega_h|_1.$$

下面讨论 E_1 的估计，在区间 $I_i=[x_{4i-4},x_{4i}]$上，

$$(\Pi_h u)'_{x_{4i-2-k_1}} = \frac{1}{h_i}\Big[\Big(\frac{4}{3}(-k_1)^3-k_1^2+\frac{1}{6}k_1+\frac{1}{12}\Big)u_{4i-4}+\Big(\frac{-16}{3}(-k_1)^3+2k_1^2-\frac{8}{3}k_1-\frac{2}{3}\Big)u_{4i-3}+$$
$$(8(-k_1)^3+5k_1)u_{4i-2}+\Big(\frac{-16}{3}(-k_1)^3-2k_1^2-\frac{8}{3}k_1+\frac{2}{3}\Big)u_{4i-1}+\Big(\frac{4}{3}(-k_1)^3+k_1^2+\frac{1}{6}k_1-\frac{1}{12}\Big)u_{4i}\Big].$$

利用带积分余项的 Taylor 公式，有

$$u(x)=u_{4i-2-k_1}+(x-x_{4i-2-k_1})u'_{4i-2-k_1}+\frac{(x-x_{4i-2-k_1})^2}{2}u''_{4i-2-k_1}+\cdots+\frac{(x-x_{4i-2-k_1})^5}{5!}u^{(5)}_{4i-2-k_1}+\int_{x_{4i-2-k_1}}^{x}\frac{(x-t)^5}{5!}u^{(6)}\mathrm{d}t,$$

于是

$$(\Pi_h u)'_{x_{4i-2-k_1}} = u'_{4i-2-k_1}+\frac{1}{h_i}\Big[\Big(\frac{4}{3}(-k_1)^3-k_1^2+\frac{1}{6}k_1+\frac{1}{12}\Big)\int_{x_{4i-2-k_1}}^{x_{4i-4}}\frac{(x_{4i-4}-t)^5}{5!}u^{(6)}\mathrm{d}t+$$
$$\Big(\frac{-16}{3}(-k_1)^3+2k_1^2-\frac{8}{3}k_1-\frac{2}{3}\Big)\int_{x_{4i-2-k_1}}^{x_{4i-3}}\frac{(x_{4i-3}-t)^5}{5!}u^{(6)}\mathrm{d}t+(8(-k_1)^3+5k_1)+$$
$$\int_{x_{4i-2-k_1}}^{x_{4i-2}}\frac{(x_{4i-2}-t)^5}{5!}u^{(6)}\mathrm{d}t+\Big(\frac{-16}{3}(-k_1)^3-2k_1^2-\frac{8}{3}k_1+\frac{2}{3}\Big)\int_{x_{4i-2-k_1}}^{x_{4i-1}}\frac{(x_{4i-1}-t)^5}{5!}u^{(6)}\mathrm{d}t+$$
$$\Big(\frac{4}{3}(-k_1)^3+k_1^2+\frac{1}{6}k_1-\frac{1}{12}\Big)\int_{x_{4i-2-k_1}}^{x_{4i}}\frac{(x_{4i}-t)^5}{5!}u^{(6)}\mathrm{d}t\Big],$$

因此

$$(u-\Pi_h u)'_{x_{4i-2-k_1}} = -\Big\{\frac{1}{h_i}\Big[\Big(\frac{4}{3}(-k_1)^3-k_1^2+\frac{1}{6}k_1+\frac{1}{12}\Big)\int_{x_{4i-2-k_1}}^{x_{4i-4}}\frac{(x_{4i-4}-t)^5}{5!}u^{(6)}\mathrm{d}t+$$
$$\Big(\frac{-16}{3}(-k_1)^3+2k_1^2-\frac{8}{3}k_1-\frac{2}{3}\Big)\int_{x_{4i-2-k_1}}^{x_{4i-3}}\frac{(x_{4i-3}-t)^5}{5!}u^{(6)}\mathrm{d}t+(8(-k_1)^3+5k_1)+$$
$$\int_{x_{4i-2-k_1}}^{x_{4i-2}}\frac{(x_{4i-2}-t)^5}{5!}u^{(6)}\mathrm{d}t+\Big(\frac{-16}{3}(-k_1)^3-2k_1^2-\frac{8}{3}k_1+\frac{2}{3}\Big)\int_{x_{4i-2-k_1}}^{x_{4i-1}}\frac{(x_{4i-1}-t)^5}{5!}u^{(6)}\mathrm{d}t+$$
$$\Big(\frac{4}{3}(-k_1)^3+k_1^2+\frac{1}{6}k_1-\frac{1}{12}\Big)\int_{x_{4i-2-k_1}}^{x_{4i}}\frac{(x_{4i}-t)^5}{5!}u^{(6)}\mathrm{d}t\Big]\Big\},$$

从而

$$E_1=\sum_{i=1}^{n}|(u-\Pi_h u)'_{x_{4i-2-k_1}}(\omega_{4i-3}-\omega_{4i-4})|\leqslant \sum_{i=1}^{n}ch_i^4\Big|\int_{x_{4i-4}}^{x_{4i}}u^{(6)}(t)(\omega_{4i-3}-\omega_{4i-4})\mathrm{d}t\Big|\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}ch_i^4\|u\|_6[(\omega_{4i-3}-\omega_{4i-4})^2h_i]^{1/2}=\sum_{i=1}^{n}ch_i^5\|u\|_6[(\omega_{4i-3}-\omega_{4i-4})/h_i]^{1/2}\leqslant ch^5\|u\|_6\|\omega_h\|_1.$$

同理 $E_i\leqslant ch^5\|u\|_6\|\omega_h\|_1$，$i=1,2,3,4$. 证毕.

结合引理3 与定理2 可得：

定理 3 设问题(5)的解 $u\in H_E^1(I)\cap H^6(I)$，u_h 是四次元差分格式(8)的解，则有

$$\|\Pi_h u-u_h\|_1\leqslant ch^5\|u\|_6,\qquad \Big[\frac{1}{r}\sum_{x_0\in N_k}|\overline{\nabla}(u-u_h)(x_0)|^2\Big]^{1/2}\leqslant ch^5\|u\|_6.$$

下面讨论 L^2 误差估计.

定理 4 设问题(5)的解 $u\in H_E{}^1(I)\cap H^6(I)$，$u_h$ 是四次元差分格式(8)的解，则有 L^2 误差估计：

$$\|u-u_h\|_0\leqslant ch^5\|u\|_6.$$

证明：由$(\Pi_h u-u_h)(a)=0$ 可知，$\|\Pi_h u-u_h\|_1$ 与$|\Pi_h u-u_h|_1$ 等价. 由插值的性质及定理3，有

$$\|u-u_h\|_0\leqslant\|u-\Pi_h u\|_0+\|\Pi_h u-u_h\|_1\leqslant\|u-\Pi_h u\|_0+c|\Pi_h u-u_h|_1\leqslant ch^5|u|_5+ch^5|u|_6^5\|u\|_6.$$

证毕.

2.4 数值算例

为了证明格式的有效性，考虑如下两点边值问题：

例 1

$$\begin{cases} -u'' + \dfrac{25\pi^2}{4}u = \dfrac{25\pi^2}{2}\sin\dfrac{5\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u'(1) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

真解为 $\sin(5\pi x/2)$. 表 1 列出了用本文方法得到例 1 的收敛阶. 由表 1 可见：节点处具有超收敛性，与理论分析结果一致；导数超收敛点的收敛阶约为 6，具有强收敛性.

表 1　对例 1 用本文方法得到的收敛阶

Table 1　Convergence orders calculated by means of the method in this paper for example 1

N	$\Vert u-u_h\Vert_0$	收敛阶	$\vert u-u_h\vert_1$	收敛阶	节点导数平均值	收敛阶
4	2.9824×10^{-4}	—	1.7097×10^{-2}	—	4.9431×10^{-4}	—
8	9.9251×10^{-6}	4.909 2	1.0991×10^{-3}	3.959 3	6.7497×10^{-6}	6.194 4
16	3.1403×10^{-7}	4.982 1	6.9202×10^{-5}	3.989 4	9.8522×10^{-8}	6.098 2
32	9.8413×10^{-9}	4.995 9	4.3331×10^{-6}	3.997 3	1.5083×10^{-9}	6.029 4
64	3.0776×10^{-10}	4.999 0	2.7094×10^{-7}	3.999 3	2.3349×10^{-11}	6.013 5

参考文献

[1] LI Rong-hua, CHEN Zhong-ying, WEI Wu. Generalized Difference Methods for Differential Equations-Numerical Analysis of Finite Volume Methods [M]. Boca Raton: CRC Press, 2000.

[2] LI Rong-hua. Generalized Difference Methods for Two-Point Boundary Value Problem [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Jilinensis, 1982(1): 26-40.（李荣华. 两点边值问题的广义差分法 [J]. 吉林大学自然科学学报，1982(1): 26-40.）

[3] WANG Tong-ke. High Accuracy Finite Volume Element Method for Two-Point Boundary Value Problem of Second Ordinary Differential Equation [J]. Numerical Mathematics: A Journal of Chinese Universities, 2002, 11(2): 197-212.

[4] LI Rong-hua, CHEN Zhong-ying. Generalized Difference Methods for Partial Differential Equation [M]. Changchun: Publishing House of Jilin University, 1994.

[5] 朱起定，林群. 有限元超收敛理论 [M]. 长沙：湖南科技出版社，1989.

[6] CHEN Zhong-ying. L_2-Error Estimates for Generalized Difference Method [J]. Acta Sci Natur Univ Sunyatseni, 1994, 33(4): 22-28.（陈仲英. 广义差分法一次元格式的 L_2 估计 [J]. 中山大学学报：自然科学版，1994，33(4): 22-28.）

[7] YU Chang-hua, LI Yong-hai. Biquadratic Element Finite Volume Method Based on Optimal Stress Points for Solving Poisson Equations [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2010, 32(1): 59-74.（于长华，李永海. 解 Poisson 方程的基于应力佳点的双二次元有限体积法 [J]. 计算数学，2010，32(1): 59-74.）

[8] YU Chang-hua, LI Yong-hai. Quadratic Finite Volume Element Method Based on Optimal Stress Points for Solving Two-Point Boundary Value Problems [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2009, 47(4): 639-648.（于长华，李永海. 解两点边值问题的基于应力佳点的二次有限体积元法 [J]. 吉林大学学报：理学版，2009，47(4): 639-648.）

[9] GUO Wei-li, WANG Tong-ke. A Kind of Quadratic Finite Volume Element Method Based on Optimal Stress Points for Two-Point Boundary Value Problems [J]. Mathematica Applicata, 2008, 21(4): 748-756.（郭伟利，王同科. 两点边值问题基于应力佳点的一类二次有限体积元方法 [J]. 应用数学，2008，21(4): 748-756.）

[10] GAO Guang-hua. Cubic Superconvergent Finite Volume Element Method for One-Dimensional Elliptic and Parabolic Equations [D]: [Master's Degree Thesis]. Tianjin: Tianjin Normal University, 2009: 1-22.（高广花. 一维椭圆和抛物型方程的三次超收敛有限体积元方法 [D]：[硕士学位论文]. 天津：天津师范大学，2009：1-22.）

（责任编辑：赵立芹）