云南大学学报（自然科学版），2006，28（5）：374～377　　CN 53 - 1045/ N　ISSN 0258 - 7971
Journal of Yunnan University

Cardinal - Hermite 插值逼近 *

杨柱元[1]，刘永平[2]
(1.云南民族大学 数学与计算机科学学院,云南 昆明　650031;
2.北京师范大学 数学科学学院,北京　100875)

摘要:Sobolev 空间的 Cardinal 样条逼近已有较多研究.在此研究了 Sobolev 空间的 Cardinal-Hermite 插值问题,构造了插值逼近算子,并利用插值算子对多项式的重构性质获得了逼近阶的估计.

关键词:Sobolev 空间;Cardinal - Hermite 插值;逼近
中图分类号:O 174.41　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:0258 - 7971(2006)05 - 0374 - 04

1　预　备

在文献[1]中 I.J. Schoenberg 首先研究了 Cardinal 样条的插值问题. P. R. Lipow 和 I.J. Schoenberg 在文献[2]中进一步研究了 Cardinal Hermite 插值问题,证明了插值问题的存在唯一性并得到了解的表达式,我们将在后面予以列出.但文献[2]和此后的相关文献[3～9]都没有给出其插值的误差估计,而这对理论和应用而言都是很重要的.我们在文献[10,11]中,研究了 Sobolev 空间的 Cardinal 样条逼近,本文进一步考虑 Cardinal Hermite 插值在 $L_p(R)$ 尺度下的逼近性质,得到了理想的逼近阶.下面我们先给出相关定义和符号.

令 $k = 2m$ 为偶数,自然数 $r \le m$. $S_{2m,r}$ 表示全体节点在整点 v 且重数是 r 的 $2m-1$ 阶样条函数类,即 $S_{2m,r} \subset C^{2m-r-1}$. 所谓 Cardinal Hermite 插值问题(参见文献[2])是指:

给定 r 个序列

$$y = (y_v),\ y' = (y'_v),\ \cdots,\ y^{(r-1)} = (y_v^{(r-1)}),\ v \in Z.$$

我们期望找到函数 $F(x)$,满足对所有的 $v \in Z$,有

$$F(v) = y_v,\ F'(v) = y'_v,\ \cdots,\ F^{(r-1)}(v) = y_v^{(r-1)},$$

且 $F(x)$ 属于某预先指定的线性空间 Φ. 我们把这一问题记为

$$C.\ H.\ I.\ P(y, y', \cdots, y^{(r-1)}, \Phi).$$

定义

$$F_{\gamma,r} = \{F(x): F(x) \in C^{r-1}, F^{(s)}(x) = O(|x|^{\gamma}), x \to \pm\infty, s = 0,1,\cdots,r-1\},$$

$$Y_\gamma = \{y = (y_v): y_v = O(|v|^{\gamma}), v \to \pm\infty\},$$

$$\mathbf{L}_{p,r} = \{F(x): F(x) \in C^{r-1}, F^{(s)}(x) \in L_p(R), s = 0,1,\cdots,r-1\},$$

其中 $L_p(R)$ 表示 R 上的全体 p - 幂可积函数.

下面的几个命题可以在文献[2]中找到.

命题 1　① $C.\ H.\ I.\ P(y, y', \cdots, y^{(r-1)}, S_{2m,r} \cap F_{\gamma,r})$ 有解当且仅当 $y^{(s)} \in Y_\gamma, s = 0,1,\cdots,r-1$,

---

* **收稿日期**:2005 - 11 - 24
基金项目:国家自然科学基金项目(10471010);云南省教育厅基金资助项目(03Z533D);北京师范大学"985 项目".
作者简介:杨柱元(1964 -　),男,博士,副教授,主要从事逼近理论方面的研究.

且此时解唯一.

②若 $1 \le p \le \pm\infty$ 则 $C.H.I.P(y, y', \cdots, y^{(r-1)}, S_{2m,r} \cap \mathbf{L}_{p,r})$ 有解当且仅当 $y^{(s)} \in l_p, s = 0,1, \cdots, r-1$,且此时解唯一.

命题 2　① 存在样条函数 $L_{2m,r,s}(x) \in S_{2m,r} \cap \mathbf{L}_{1,r}$ 满足 $L_{2m,r,s}^{(\rho)}(v) = \delta_v \delta_{\rho-s}$, 其中 $\delta_v = \begin{cases} 1, v = 0, \\ 0, v \ne 0 \end{cases}$ $\rho = 0,1, \cdots, r-1$.

②存在仅依赖于 m 和 r 的正常数 A 和 δ,满足对所有的 $x \in R$,有

$$|L_{2m,r,s}^{(\rho)}(x)| \le A\exp(-\delta|x|), s, \rho = 0,1, \cdots, r-1.$$

为书写方便,记 $L_s(x) = L_{2m,r,s}(x), s = 0,1, \cdots, r-1$.

命题 3　① $C.H.I.P(y, y', \cdots, y^{(r-1)}, S_{2m,r} \cap F_{\gamma,r}\})$ 的唯一解样条函数 $S(x)$ 由 Lagrange - Hermite 展式给出,即

$$S(x) = \sum_{v \in Z}[y_v L_0(x-v) + y'_v L_1(x-v) + \cdots + y_v^{(r-1)} L_{r-1}(x-v)], \qquad (*)$$

且右端级数在 R 的任一紧子集上一致收敛.

②若 $y_v^{(\rho)} = O(|v|^{\gamma}), \rho = 0,1, \cdots, r-1$,则$(*)$在 R 的任一紧子集上一致收敛,且和函数满足 $S^{(\rho)}(x) = O(|x|^{\gamma}), \rho = 0,1, \cdots, r-1$.

若$(y_v^{(\rho)}) \in l_p, \rho = 0,1, \cdots, r-1, \gamma \ge 0, 1 \le p \le \pm\infty$,则$(*)$在 R 的任一紧子集上一致收敛,且和函数满足 $S^{(\rho)}(x) \in L_p(R), \rho = 0,1, \cdots, r-1, \gamma \ge 0$.

③Lagrange - Hermite 公式对次数不超过 $2m-1$ 的多项式 $P(x) \in \prod_{2m-1}$ 精确成立,即 $P(x) = \sum_{v \in Z}[P(v) L_0(x-v) + P'(v) L_1(x-v) + \cdots + P^{(r-1)}(v) L_{r-1}(x-v)]$.

2　定理及其证明

定义 Sobolev 空间 $W_p^r(R) := \{f \in L_p(R) : f^{(k)} \in L_p(R), k \le r\}$. 设

$$J_{m,h}(f,x) = \sum_{v \in Z}[f(hv) L_0(xh^{-1}-v) + hf'(hv) L_1(xh^{-1}-v) + \cdots + h^{r-1} f^{(r-1)}(hv) L_{r-1}(xh^{-1}-v)].$$

定理 1　若 $f \in W_p^r(R), 1 \le p \le \pm\infty, h > 0, r < 2m$,则

$$\|f - J_{m,h}(f)\|_p \le Ch^r \|f^r\|_p,$$

其中 C 独立于 f 和 h.

证明　令 $G_{\alpha,h} = (\alpha + [0,1])h, \alpha \in Z$. 先对 $x \in G_{\alpha,h}$ 估计 $|f(x) - J_{m,h}(x)|$. 暂固定 α 和 $x \in G_{\alpha,h}$. 设 $p(\cdot)$ 为 $f(\cdot)$ 在 x 的 $r-1$ 阶 Taylor 多项式. 则有 $f(x) = p(x)$. 由命题 3 ③,有

$$p(x) = \sum_{v \in Z}[p(hv) L_0(xh^{-1}-v) + hp'(hv) L_1(xh^{-1}-v) + \cdots + h^{r-1} p^{(r-1)}(hv) L_{r-1}(xh^{-1}-v)].$$

从而

$$\begin{aligned} f(x) - J_{m,h}(x) = &\sum_{v \in Z}\{[p(hv) - f(hv)]L_0(xh^{-1}-v) + h[p'(hv) - f'(hv)]L_1(xh^{-1}-v) + \\ &\cdots + h^{r-1}[p^{(r-1)}(hv) - f^{(r-1)}(hv)]L_{r-1}(xh^{-1}-v)\} = \\ &\sum_{v \in Z}\{[p(h\alpha + hv) - f(h\alpha + hv)]L_0(xh^{-1} - \alpha - v) + h[p'(h\alpha + hv) - \\ &f'(h\alpha + hv)]L_1(xh^{-1} - \alpha - v) + \\ &\cdots + h^{r-1}[p^{(r-1)}(h\alpha + hv) - f^{(r-1)}(h\alpha + hv)]L_{r-1}(xh^{-1} - \alpha - v)\}. \end{aligned}$$

注意到对 $x \in G_{\alpha,h}, xh^{-1} - \alpha \in [0,1]$,并对 $x \in R$ 有 $|L_s(xh^{-1} - \alpha - v)| \le A\exp[-\delta(1+|v|)]$, $s = 0,1, \cdots, r-1$,可利用 Taylor 公式来估计 $|f^{(s)}(h\alpha + hv) - p^{(s)}(h\alpha + hv)|, s = 0,1, \cdots, r-1$.

$$f^{(s)}(h\alpha+hv)-p^{(s)}(h\alpha+hv)=\frac{1}{(r-1-s)!}\int_x^{h\alpha+hv}(h\alpha+hv-t)^{r-1-s}f^{(r)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

注意到对 $x\in G_{\alpha,h}$, $|h\alpha+hv-t|\le h(1+|v|)$,**所以**

$$|f^{(s)}(h\alpha+hv)-p^{(s)}(h\alpha+hv)|\le c_1h^{r-1-s}(1+|v|)^{r-1-s}\int_{h\alpha}^{h\alpha+h|v|}|f^{(r)}(t)|\,\mathrm{d}t.$$

因此对 $x\in G_{\alpha,h}$,**有**

$$|f(x)-J_{m,h}(f,x)|\le C_1h^{r-1}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{v\in Z}(1+|v|)^{r-1-s}\exp[-\delta(1+|v|)]\int_{h\alpha}^{h\alpha+h|v|}|f^{(r)}(t)|\,\mathrm{d}t.$$

$p=\infty$**的情形估计是显然的**.

对于 $1\le p<\infty$,**利用** Hölder **不等式**,**我们有** $(1/q+1/p=1)$,

$$|f(x)-J_{m,h}(f,x)|\le C_1h^{r-1}\sum_{s=0}^{r-1}\left\{\sum_{v\in Z}(1+|v|)^{r-1-s}\exp[-\delta(1+|v|)]\right\}^{1/q}\cdot$$
$$\left\{\sum_{v\in Z}(1+|v|)^{r-1-s}\exp[-\delta(1+|v|)]\int_{h\alpha}^{h\alpha+h|v|}|f^{(r)}(t)|\,\mathrm{d}t]^p\right\}^{1/p}.$$

再次使用 Hölder **不等式**

$$\int_{h\alpha}^{h\alpha+h|v|}|f^{r}(t)|\,\mathrm{d}t\le h^{1/q}(1+|v|)^{1/q}\left[\int_{h\alpha}^{h\alpha+h|v|}|f^{(r)}(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{1/p}.$$

从而对于 $x\in G_{\alpha,h}$,

$$|f(x)-J_{m,h}(f,x)|\le C_2h^{r-1+1/q}\sum_{s=0}^{r-1}\left\{\sum_{v\in Z}(1+|v|)^{r-1-s+p/q}\cdot\right.$$
$$\left.\exp[-\delta(1+|v|)]\int_{h\alpha}^{h\alpha+h|v|}|f^{(r)}(t)|^p\mathrm{d}t\right\}^{1/p}.$$

由 $mesG_{\alpha,h}=h$,

$$\|f-J_{m,h}(f)\|_p^p=\sum_{\alpha\in Z}\int_{G_{\alpha,h}}|f(x)-J_{m,h}(f,x)|^p\mathrm{d}x\le C_2{}^p h^{(r-1+1/q)p}\cdot r^p\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{v\in Z}(1+|v|)^{r-1-s+p/q}\cdot$$
$$\exp[-\delta(1+|v|)]\sum_{\alpha\in Z}\int_{G_{\alpha,h}}\int_{h\alpha}^{h\alpha+h|v|}|f^{(r)}(t)|^p\mathrm{d}t\mathrm{d}x\le$$
$$C_3h^{(r-1+1/q)p}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{v\in Z}(1+|v|)^{r-1-s+p/q}\exp[-\delta(1+|v|)]\sum_{\alpha\in Z}h\int_{h\alpha}^{h\alpha+h|v|}|f^{(r)}(t)|^p\mathrm{d}t=$$
$$C_3h^{rp}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{v\in Z}(1+|v|)^{r-1-s+p/q}\exp[-\delta(1+|v|)]\sum_{\alpha\in Z}\Big(\int_{h\alpha}^{h\alpha+h}+\int_{h\alpha+h}^{h\alpha+2h}+$$
$$\cdots+\int_{h\alpha+h(|v|-1)}^{h\alpha+h|v|}\Big)|f^{(r)}(t)|^p\mathrm{d}t\le$$
$$C_3h^{rp}\sum_{s=0}^{r-1}\sum_{v\in Z}(1+|v|)^{r-1-s+p/q}\exp[-\delta(1+|v|)](1+|v|)\,\|f^{(r)}\|_p^p\le$$
$$C_4h^{rp}\|f^{(r)}\|_p^p.$$

从而 $\|f-J_{m,h}(f)\|_p\le C_5h^r\|f^{(r)}\|_p$. **证毕**.

注　本文中的常数 c_i **和** C_i **独立于** f **和** h.

参考文献:

[1] SChOENBERG I J. Cardinal interpolation and splinefunctions (Ⅱ):interpolation of data of power growth[J]. itJournal of Approximation theory,1972,6:404-420.

[2] LIPOW P R,SCHOENBERG I J. Cardinal interpolation and splinefunctions (Ⅲ):cardinal Hermite interpolation[J]. Linear-Algebra and Its Applications 1973,6:273-304

[3] DEVOR R A,RIEMENSCHNEIDER SD,SHARPLEY R C. Weak interpolation in Banach spaces[J]. Journal fo Functional

analysis ,1979 ,33(1) :58-94.

[4] MADYCH W R ,NELSON S A. Polyharmonic cardinal aplines[J].J approximation Theory ,1990 ,60(2) :141-156.

[5] JIA Rong-qing ,LEI Jun-jiang. Approximation by multi-ineger translates of functions having global support[J].J Aproximation Theory ,1993 ,72(1) :2-23.

[6] LIU Yong-ping. Approximation of smooth functions by polyharmonic cardinal splines in $L_p(R^n)$ space[J]. Acta Math Appl Sinica ,1998 ,14(2) :157-164.

[7] MADYCH W R. Polyharmonic splines ,multiscale anysis and entire functions[M]/ / Whaussmann ,Jetter K Multivariate Approximation Interpolations eds. Basel :Birkhauser Verlag ,1990 ,205-216.

[8] 王林 ,徐裕光. 广义 Lipschitz Φ - 伪压缩映射不动点的 Mann 迭代逼近[J]. 云南大学学报:自然科学版 ,2004 ,26(增刊) :35-38.

[9] 杨柱元 ,刘永平. Lipschitz 空间 Cardinal 样条逼近[J]. 云南大学学报:自然科学版 ,2006 ,28(4) :281-284.

[10] 杨柱元 ,刘永平. Cardinal 样条逼近[J]. 北京师范大学学报:自然科学版 ,2001 ,37(5) :592-595.

[11] 杨柱元 ,刘永平. 多元 Cardinal 样条逼近[J]. 北京师范大学学报:自然科学版 ,2006 ,42(3) :221-223.

Approximation by Cardinal-Hermite interpolation

YANG Zhu-yuan[1] , LIU Yong-ping[2]

(1. School of Mathematics and Computer Science , Yunnan Nationalities University , Kunming 650031 ,China ;

2. Department of Mathematics ,Beijing Normal University ,Beijing 100875 ,China)

Abstract : The cardinal spline approximation of Sobolev spaces is studied in many papers by the authors. Here the approximation of Cardinal-Hermite intepolation is considered and the approximation operator is constructed and the approximation order is obtained by using the property of reproducing polynomials of the operator.

Key words : Sobolev spaces ; Cardinal-Hermite interpolation splines ; approximation