粗糙曲面上各向异性介质层散射问题的适定性

栾 天[1,2], 马富明[1]
(1. 吉林大学 数学研究所, 长春 130012; 2. 北华大学 数学学院, 吉林 吉林 132013)

摘要: 考虑时谐声波在无界粗糙声软界面上各项异性介质中散射问题的数学模型, 先将问题转化为变分形式, 验证了双线性形式满足 inf-sup 条件, 通过建立 Rellich 型恒等式, 并应用广义 Lax-Milgram 定理, 证明了变分问题对任意波数都是唯一可解的, 同时给出了解的先验估计. 所得结果也适合于更一般的介质问题, 不再局限于各项同性介质.

关键词: 散射问题; Helmholtz 方程; 粗糙曲面
中图分类号: O29 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2012)02-0213-06

Well-Posedness of Anisotropic Layers Scattering above Rough Surfaces

LUAN Tian[1,2], MA Fu-ming[1]
(1. *Institute of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*;
2. *College of Mathematics*, *Beihua University*, *Jilin* 132013, *Jilin Province*, *China*)

Abstract: We considered the mathematical model of scattering problem for time harmonic acoustic waves in anisotropic media above an unbounded sound soft rough surface. We gave a variational form of the problem and established the inf-sup condition of the sesquilinear form. By means of a Rellich-like identity and the generalized Lax-Milgram theorem, we proved that the variational problem is uniquely solvable for arbitrary wave number and we also gave a priori estimation. These results are available for more general media besides isotropic ones.

Key words: scattering problem; Helmholtz equation; rough surface

0 引 言

考虑 Helmholtz 方程的一类边值问题, 它模拟时谐声波被位于某一粗糙曲面上的无界层散射问题. 本文考虑这类问题中的一个典型情况, 它模拟时谐声波被无界声软粗糙曲面上的各向异性层的散射问题. 目前, 解决该问题的大多数方法是求解常系数 Helmholtz 方程的 Dirichlet 边值问题[1-5]. 本文基于文献[1,5], 通过建立 Rellich 类型恒等式导出 Helmholtz 方程解的估计, 从而证明双线性形式的 inf-sup 条件成立, 进而得到问题的适定性. 但文献[1]仅考虑了层内是各向同性介质的情况, 而文献[5]研究了有界障碍体的散射问题. 本文针对各向异性无界层的情况进行研究, 所得结果进一步推广了文献[1,5]中的相关结果.

对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n(n=2,3)$, 令 $\tilde{\boldsymbol{x}}=(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$, 则 $\boldsymbol{x}=(\tilde{\boldsymbol{x}},x_n)$. 设 $H\in\mathbb{R}$, 记 $U_H:=\{\boldsymbol{x}\,|\,x_n>H\}$, $\Gamma_H:=\{\boldsymbol{x}\,|\,x_n=H\}$. 设 D 是一个连通的开集, 满足对常数 $f_-<f_+$, 有

收稿日期: 2011-09-31.
作者简介: 栾 天(1980—), 女, 汉族, 博士研究生, 讲师, 从事数学物理反问题和计算方法的研究, E-mail: luantian@163.com.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10971083).

$$U_{f_+} \subset D \subset U_{f_-}, \quad \boldsymbol{x} + s\boldsymbol{e}_n \in D, \quad \forall s > 0, \quad \boldsymbol{x} \in D, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{e}_n$ 表示 x_n 方向的单位向量. 记 $\Gamma = \partial D$, $S_H := D \backslash \overline{U}_H$, 其中 $H \geqslant f_+$.

Hilbert 空间 V_H 定义如下:

$$V_H = \{\phi|_{S_H}: \phi \in H_0^1(D)\},$$

其中 $H \geqslant f_+$, 采用与波数 $k_0 > 0$ 相关的标量内积

$$(u,v)_{V_H} := \int_{S_H} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} + k_0^2 u \bar{v}) \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

导出范数为

$$\| u \|_{V_H} = \left[\int_{S_H} (|\nabla u|^2 + k_0^2 |u|^2) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right]^{1/2}.$$

对 $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\Gamma_H)$ 表示通常的 Soblev 空间[6], 其范数为

$$\| \phi \|_{H^s(\Gamma_H)} = \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (k_0^2 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^s |\mathscr{F}\phi(\boldsymbol{\xi})|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \right]^{1/2},$$

这里将 Γ_H 与 $\mathbb{R}^{n-1}$ 等同, $\mathscr{F}$是傅里叶变换.

1 边值问题与等价变分形式

时谐声波被声软无界粗糙曲面上的各向异性介质层散射问题可以建模为如下边值问题: 给定源 $g \in L^2(D)$, 在 S_H 具有紧支集, 其中 $H \geqslant f_+$. 求散射场 u: $D \to \mathbb{C}$, 满足对任意的 $a > f_+$, 有 $u|_{S_a} \in V_a$, 且

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \nabla u) + k_0^2 u = g, \quad \text{在 } D \text{ 内}, \tag{2}$$

$$u = 0, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \tag{3}$$

在分布的意义下成立, 其中 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 且 $a_{ij} \in L^\infty(S_H)$, 具有如下分块结构:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & 0 \\ 0 & a_n^2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中: $\boldsymbol{A}_{n-1} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$是对称子阵; 常数 $a_n > 0$. 进一步, 假设当 $\boldsymbol{x} \in U_H$ 时, $\boldsymbol{A} = a_0^2 \boldsymbol{I}$, 其中: $a_0 > 0$; $\boldsymbol{I}$ 为单位阵; 且 $\boldsymbol{A}|_{\Gamma_H} = a_0^2 \boldsymbol{I}$. 此外, 假设二范数 $\| \boldsymbol{A} \|_2$ 有界, $\boldsymbol{A}$ 是椭圆的, $\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_n}$是半负定的, 即存在常数 $c_0 > 0$, 使得

$$\boldsymbol{\xi}^* \boldsymbol{A} \boldsymbol{\xi} \geqslant c_0^2 |\boldsymbol{\xi}|^2, \quad \boldsymbol{\xi}^* \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_n} \boldsymbol{\xi} \leqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}.$$

特别地, 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对角常值矩阵时, 即 $\boldsymbol{A} = d\boldsymbol{I}$, $d > 0$, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 显然满足以上假设条件, 此即对应层内是均匀各向同性的介质情况. 另一方面, 作为边值问题的一部分, 采用如下辐射条件:

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp\left(\mathrm{i}\left[(x_n - H) \sqrt{\frac{k_0^2}{a_0^2} - |\boldsymbol{\xi}|^2} + \tilde{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\xi} \right] \right) \hat{F}_H(\boldsymbol{\xi}) \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}, \tag{5}$$

其中 $\hat{F}_H(\boldsymbol{\xi})$ 表示 $F_H := u|_{\Gamma_H}$的傅里叶变换. 该辐射条件表明了在粗糙曲面 Γ 和 g 的支集上, 散射场可以用积分的形式表示成向上传播的平面波和倏逝波的叠加[6-7].

对 $a > H \geqslant f_+$, 存在连续嵌入算子[8], 即迹算子

$$\gamma_+: H^1(U_H \backslash U_a) \to H^{1/2}(\Gamma_H); \qquad \gamma_-: V_H \to H^{1/2}(\Gamma_H).$$

Γ_H 上的 Dirichlet-to-Neumann 算子 T 定义为

$$T := \mathscr{F}^{-1} M_z \mathscr{F},$$

其中 M_z 是乘子为

$$z(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} -\mathrm{i} \sqrt{\dfrac{k_0^2}{a_0^2} - |\boldsymbol{\xi}|^2}, & |\boldsymbol{\xi}| \leqslant \dfrac{k_0}{a_0}, \\ \sqrt{|\boldsymbol{\xi}|^2 - \dfrac{k_0^2}{a_0^2}}, & |\boldsymbol{\xi}| > \dfrac{k_0}{a_0} \end{cases}$$

的算子. 由 T 的定义和 Soblev 范数可知，T 是从 $H^{1/2}(\Gamma_H)$ 到 $H^{-1/2}(\Gamma_H)$ 的映射，且

$$\|T\| = \max_{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\left|\sqrt{k_0^2/a_0^2 - |\boldsymbol{\xi}|^2}\right|}{\left|\sqrt{k_0^2 + |\boldsymbol{\xi}|^2}\right|} = \frac{1}{a_0}.$$

引理 1[2]　对 $\phi\in H^{1/2}(\Gamma_H)$，有

$$\mathrm{Re}\int_{\Gamma_H}\bar{\phi}T\phi\mathrm{d}s \geqslant 0,\qquad \mathrm{Im}\int_{\Gamma_H}\bar{\phi}T\phi\ \mathrm{d}s \leqslant 0.$$

引理 2[2]　若式(5)成立，$F_H\in H^{1/2}(\Gamma_H)$，则 $\gamma_+ u = F_H$，且

$$\int_{\Gamma_a}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|^2 - |\nabla_{\tilde{x}} u|^2 + \frac{k_0^2}{a_0^2}|u|^2\right)\mathrm{d}s \leqslant 2\frac{k_0}{a_0}\mathrm{Im}\int_{\Gamma_a}\bar{u}\frac{\partial u}{\partial x_n}\mathrm{d}s, \tag{6}$$

$$\int_{U_H} a_0^2\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}\boldsymbol{x} - a_0^2\int_{\Gamma_H}\bar{v}T\gamma_+ u\mathrm{d}s - k_0^2\int_{U_H}u\bar{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0,\qquad \forall v\in C_0^\infty(D), \tag{7}$$

其中 $a\geqslant H$.

引理 3[2]　对 $u\in V_H$，有

$$\|\gamma_- u\|_{H^{1/2}(\Gamma_H)} \leqslant \|u\|_{V_H},\qquad \|u\| \leqslant \frac{H-f_-}{\sqrt{2}}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\|, \tag{8}$$

这里 $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(S_H)$ 上标量内积 $(\cdot,\cdot)$ 的导出范数.

引入双线性形式 b：$V_H\times V_H\to\mathbb{C}$，定义为

$$b(u,v) = (\boldsymbol{A}\nabla u,\nabla v) - k_0^2(u,v) + a_0^2\int_{\Gamma_H}\gamma_-\bar{v}T\gamma_- u\mathrm{d}s, \tag{9}$$

则所考虑的变分问题为：求 $u\in V_H$，使得

$$b(u,v) = -(g,v),\qquad \forall v\in V_H. \tag{10}$$

仿照文献[1]中过程可以类似地证明边值问题(2)-(3)-(5)与变分问题(10)等价，这样即可通过分析变分问题的适定性得到边值问题的唯一可解性. 即有：

定理 1　若 u 是边值问题(2)-(3)-(5)的解，则 $u|_{S_H}$ 也满足变分问题(10). 反之，若 u 是变分问题(10)的解，令 $F_H := \gamma_- u$，定义 $g=0$，$\boldsymbol{A}=a_0^2\boldsymbol{I}$，且用式(5)定义 u，当 $\boldsymbol{x}\in U_H$ 时，则延拓后 u 满足边值问题(2)-(3)-(5).

2　问题的适定性分析

下面应用广义 Lax-Milgram 定理，通过建立双线性形式的 inf-sup 条件证明变分问题的唯一可解性. 证明过程依赖于解的一个先验估计及光滑区域逼近非光滑区域的结果.

引理 4[9]　若有界双线性形式 b 满足 inf-sup 条件：

$$\beta := \inf_{0\neq u\in V_H}\sup_{0\neq v\in V_H}\frac{|b(u,v)|}{\|u\|_{V_H}\|v\|_{V_H}} > 0, \tag{11}$$

及转置 inf-sup 条件：

$$\sup_{0\neq u\in V_H}\frac{|b(u,v)|}{\|u\|_{V_H}} > 0,\qquad \forall v\in V_H\backslash\{0\}, \tag{12}$$

则变分问题(10)只有唯一解 $u\in V_H$，并且满足

$$\|u\|_{V_H} \leqslant \beta^{-1}\|g\|. \tag{13}$$

定理 2　设 D 满足条件(1)，则变分问题(10)存在唯一解 $u\in V_H$，并且

$$\|u\|_{V_H} \leqslant \frac{H-f_-}{2a_n c_0}(c_0+1)(K_0+1)(K_0+3)\|g\|, \tag{14}$$

其中 $K_0 = k_0(H-f_-)$.

由双线性形式 $b(\cdot,\cdot)$ 的定义、Cauchy-Schwarz 不等式和引理 3 可知 b 是有界的，事实上，

$$|b(u,v)| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|_2\|\nabla u\|\ \|\nabla v\| + k_0^2\|u\|\ \|v\| +$$

$$a_0^2\|\gamma_- u\|_{H^{1/2}(\Gamma_H)}\ \|\ \|T\|\ \|\gamma_- v\|_{H^{1/2}(\Gamma_H)}\leqslant$$
$$(\|A\|_2+1+a_0)\|u\|_{V_H}\|v\|_{V_H}.$$

而转置 inf-sup 条件可由 inf-sup 条件导出[1]，于是只需证明式(11)成立. 又由文献[1]中的引理4.4、引理4.5、引理4.10和引理4.11知，证明 inf-sup 条件可转化为证明边界 Γ 充分光滑时解的先验估计. 因此只需证明如下结论:

定理3 设 $\Gamma=\{(\tilde{\boldsymbol{x}},x_n)\mid x_n=f(\tilde{\boldsymbol{x}}),\ \tilde{\boldsymbol{x}}\in\mathbb{R}^{n-1}\}$，其中 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. 若 $g\in L^2(S_H)$，且 $w\in V_H$，$H>f_+$，满足

$$b(w,\phi)=-(g,\phi),\qquad \forall\,\phi\in V_H,$$

则

$$\|w\|_{V_H}\leqslant\frac{H-f_-}{2a_nc_0}(c_0+1)(K_0+1)(K_0+3)\|g\|.\tag{15}$$

证明：先建立变分问题的解所满足的 Rellich 类型等式. 令 $r=|\tilde{\boldsymbol{x}}|$，设 $L\geqslant1$，$\phi_L\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $0\leqslant\phi_L\leqslant1$，且当 $r<L$ 时，$\phi_L(r)=1$；当 $r\geqslant L+1$ 时，$\phi_L=0$. $\|\phi_L'\|_\infty\leqslant M$，其中 $M>0$ 与 L 无关. 由定理1知，若 w 用式(5)延拓到 D，取 $F_H:=\gamma_- w$，且当 $x\in U_H$ 时，定义 $g=0$，则延拓后的 w 满足边值问题. 又由于边界 Γ 充分光滑，因此根据局部正则性结果[10]可知，$u\in H^2_{\mathrm{loc}}(D)$. 于是有

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Re}\int_{S_H}\phi_L(r)(x_n-f_-)g\frac{\partial\overline{w}}{\partial x_n}\mathrm{d}\boldsymbol{x}&=2\mathrm{Re}\int_{S_H}\phi_L(r)(x_n-f_-)[\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\nabla w)+k_0^2w]\frac{\partial\overline{w}}{\partial x_n}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\\
&2\mathrm{Re}\int_{S_H}\nabla\cdot\Big[\phi_L(r)(x_n-f_-)\frac{\partial\overline{w}}{\partial x_n}\boldsymbol{A}\nabla w\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{S_H}2\phi_L(r)a_n^2\left|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\\
&\int_{S_H}\Big\{(x_n-f_-)\phi_L(r)2\mathrm{Re}\Big[\nabla\Big(\frac{\partial\overline{w}}{\partial x_n}\Big)\cdot\boldsymbol{A}\nabla w\Big]+\\
&k_0^2(x_n-f_-)\phi_L(r)\frac{\partial|w|^2}{\partial x_n}\Big\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\\
&\int_{S_H}2\phi_L'(r)(x_n-f_-)\frac{\tilde{\boldsymbol{x}}}{|\tilde{\boldsymbol{x}}|}\cdot\mathrm{Re}\Big(\boldsymbol{A}_{n-1}\nabla_{\tilde{x}}w\frac{\partial\overline{w}}{\partial x_n}\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{x},
\end{aligned}\tag{16}$$

又因为

$$2\mathrm{Re}\Big[\nabla\Big(\frac{\partial\overline{w}}{\partial x_n}\Big)\cdot\boldsymbol{A}\nabla w\Big]=\frac{\partial}{\partial x_n}[(\nabla w)^*\boldsymbol{A}\nabla w]-(\nabla w)^*\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x_n}\nabla w,$$

所以利用散度定理和分部积分公式进一步可得

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Re}\int_{S_H}\phi_L(r)(x_n-f_-)g\frac{\partial\overline{w}}{\partial x_n}\mathrm{d}\boldsymbol{x}&=(H-f_-)\int_{\Gamma_H}\phi_L(r)\Big(a_0^2\left|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right|^2-a_0^2|\nabla_{\tilde{x}}w|+k_0^2|w|^2\Big)\mathrm{d}s+\\
&2\mathrm{Re}\int_\Gamma(x_n-f_-)\phi_L(r)\frac{\partial\overline{w}}{\partial x_n}\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{A}\nabla w\mathrm{d}s-\\
&\int_\Gamma(x_n-f_-)\phi_L(r)\nu_n(\nabla w)^*\boldsymbol{A}\nabla w\mathrm{d}s+\\
&\int_{S_H}\Big\{\phi_L(r)\Big[(\nabla w)^*\boldsymbol{A}\nabla w-k_0^2|w|^2-2a_n^2\left|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right|^2\Big]-\\
&2\phi_L'(r)(x_n-f_-)\mathrm{Re}\Big(\frac{\tilde{\boldsymbol{x}}}{|\tilde{\boldsymbol{x}}|}\boldsymbol{A}_{n-1}\nabla_{\tilde{x}}w\frac{\partial\overline{w}}{\partial x_n}\Big)+\\
&(x_n-f_-)\phi_L(r)(\nabla w)^*\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x_n}\nabla w\Big\}\mathrm{d}\boldsymbol{x},
\end{aligned}\tag{17}$$

这里 $\boldsymbol{\nu}$ 表示 Γ 的单位外法向量. 又当 $\boldsymbol{x}\in\Gamma$ 时，$w=0$，从而 $\nabla w=\frac{\partial w}{\partial\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\nu}$. 进而

$$\frac{\partial w}{\partial x_n}=\boldsymbol{e}_n\cdot\nabla w=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{\nu}\frac{\partial w}{\partial\boldsymbol{\nu}}=\nu_n\frac{\partial w}{\partial\boldsymbol{\nu}},\tag{18}$$

其中 $\nu_n = \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{\nu}$. 将式(18)代入式(17)，并整理得

$$\int_{S_H}\left[-(x_n-f_-)\phi_L(r)(\nabla w)^*\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_n}\nabla w+2\phi_L(r)a_n^2\left|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right|^2\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}-$$

$$\int_{\Gamma}(x_n-f_-)\phi_L(r)\nu_n\left|\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|^2\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}s=$$

$$(H-f_-)\int_{\Gamma_H}\phi_L(r)\left(a_0^2\left|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right|^2-a_0^2|\nabla_{\tilde{x}}w|+k_0^2|w|^2\right)\mathrm{d}s+$$

$$\int_{S_H}\phi_L(r)\left[(\nabla w)^*\boldsymbol{A}\nabla w-k_0^2|w|^2-2\mathrm{Re}\,\phi_L(r)(x_n-f_-)g\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_n}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}-$$

$$\int_{S_H}2\phi_L'(r)(x_n-f_-)\mathrm{Re}\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{x}}}{|\tilde{\boldsymbol{x}}|}\boldsymbol{A}_{n-1}\nabla_{\tilde{x}}w\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_n}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{19}$$

下面估计上面等式中的一些积分项. 令 $S_H^b=\{\boldsymbol{x}\in S_H : |\tilde{\boldsymbol{x}}|<b\}$，因为 $w\in H^1(S_H)$，所以

$$\left|\int_{S_H}2\phi_L'(r)(x_n-f_-)\mathrm{Re}\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{x}}}{|\tilde{\boldsymbol{x}}|}\boldsymbol{A}_{n-1}\nabla_{\tilde{x}}w\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_n}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right|\leqslant$$

$$2M(H-f_-)\|\boldsymbol{A}_{n-1}\|_2\int_{S_H^{L+1}\setminus \bar{S}_H^L}|\nabla w|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\to 0,$$

当 $L\to\infty$ 时，由于 $w\in H^2(U_H\setminus U_{f_+})$[11]，于是 $\nabla w\in H^{1/2}(\Gamma_H)$. 因此当 $L\to\infty$ 时，式(19)可化为

$$\int_{S_H}\left[-(x_n-f_-)(\nabla w)^*\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_n}\nabla w+2a_n^2\left|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right|^2\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{\Gamma}(x_n-f_-)\nu_n\left|\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|^2\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}s=$$

$$(H-f_-)\int_{\Gamma_H}\left(a_0^2\left|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right|^2-a_0^2|\nabla_{\tilde{x}}w|+k_0^2|w|^2\right)\mathrm{d}s+$$

$$\int_{S_H}[(\nabla w)^*\boldsymbol{A}\nabla w-k_0^2|w|^2]\mathrm{d}\boldsymbol{x}-2\mathrm{Re}\int_{S_H}(x_n-f_-)g\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_n}\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{20}$$

此外，由引理 2 得

$$\int_{\Gamma_H}\left(a_0^2\left|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right|^2-a_0^2|\nabla_{\tilde{x}}w|^2+k_0^2|w|^2\right)\mathrm{d}s\leqslant 2k_0\mathrm{Im}\int_{\Gamma_H}\bar{w}\frac{\partial w}{\partial x_n}\mathrm{d}s=-2k_0\mathrm{Im}\int_{\Gamma_H}\gamma_-\bar{w}T\gamma_-w\mathrm{d}s. \tag{21}$$

而且 w 是变分问题的解，于是

$$\int_{S_H}[(\nabla w)^*\boldsymbol{A}\nabla w-k_0^2|w|^2]\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\int_{\Gamma_H}\gamma_-\bar{w}T\gamma_-w\mathrm{d}s-\int_{S_H}g\bar{w}\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

又由引理 1，得

$$\int_{S_H}[(\nabla w)^*\boldsymbol{A}\nabla w-k_0^2|w|^2]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant-\mathrm{Re}\int_{S_H}g\bar{w}\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{22}$$

且

$$-2k_0\mathrm{Im}\int_{\Gamma_H}\gamma_-\bar{w}T\gamma_-w\mathrm{d}s=2k_0\mathrm{Im}\int_{S_H}g\bar{w}\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

从而由式(20)及式(22)，可得

$$\int_{S_H}\left[-(x_n-f_-)(\nabla w)^*\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_n}\nabla w\mathrm{d}\boldsymbol{x}+2a_n^2\left|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right|^2\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{\Gamma}(x_n-f_-)\nu_n\left|\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|^2\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}s\leqslant$$

$$2(H-f_-)k_0\mathrm{Im}\int_{S_H}g\bar{w}\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\mathrm{Re}\int_{S_H}\left[g\bar{w}+2(x_n-f_-)g\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_n}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由定理假设 $\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x_n}$ 是半负定的，$\boldsymbol{A}$ 是椭圆的，且 $\nu_n<0$，于是有

$$\int_{S_H}2a_n^2\left|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant 2(H-f_-)k_0\mathrm{Im}\int_{S_H}g\bar{w}\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\mathrm{Re}\int_{S_H}\left[g\bar{w}+2(x_n-f_-)g\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_n}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

再利用 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$2a_n^2\left\|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right\|^2\leqslant\left[2K_0\|w\|+\|w\|+2(H-f_-)\left\|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right\|\right]\|g\|.$$

进而由引理3, 可得

$$\left\|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right\| \leqslant \frac{(H-f_-)}{a_n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}K_0+\frac{1}{2\sqrt{2}}+1\right)\|g\|,$$

从而

$$\|w\| \leqslant \frac{(H-f_-)^2}{a_n^2}\left(\frac{1}{2}K_0+\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\|g\|.$$

于是, 由式(22)可得

$$c_0^2\|w\|_{V_H}^2 \leqslant (c_0^2+1)k_0^2\|w\|^2+\|g\|\|w\| \leqslant \frac{(H-f_-)^2}{4a_n^2}(c_0+1)^2(K_0+1)^2(K_0+3)^2\|g\|^2,$$

因此,

$$\|w\|_{V_H} \leqslant \frac{H-f_-}{2a_nc_0}(c_0+1)(K_0+1)(K_0+3)\|g\|.$$

从而完成了时谐声波被声软曲面上的各向异性介质散射问题解的存在唯一性证明, 同时也得到了解的先验误差估计, 该误差估计反映了先验界与波数的具体依赖关系. 本文的结果适用于更一般的介质情况, 而不再局限于各向同性的介质.

参 考 文 献

[1] Chandler-Wilde S N, Monk P. Existence, Uniqueness, and Variational Methods for Scattering by Unbounded Rough Surfaces [J]. SIAM J Math Anal, 2005, 37(2): 598-618.

[2] Chandler-Wilde S N, Monk P, Thomas Martin. The Mathematics of Scattering by Unbounded, Rough, Inhomogeneous Layers [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 204(2): 549-559.

[3] Saillard M, Sentenac A. Rigorous Solution for Electromagnetic Scattering from Rough Surfaces [J]. Waves Rondom Media, 2001, 11(3): 103-137.

[4] ZHANG Bo, Chandler-Wilde S N. Integral Equation Methods for Scattering by Infinite Rough Surfaces [J]. Math Methods Appl, 2003, 26(6): 463-488.

[5] Melenk J M. On Generalized Finite Element Methods [D]: [Ph D Thesis]. Maryland: Maryland University, 1995.

[6] Clemmow P. The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields [M]. New York: Oxford University Press, 1996.

[7] Arens T, Hohage T. On Radiation Conditions for Rough Surface Scattering Problem [J]. IMA J Appl Math, 2005, 70: 839-847.

[8] Adams R A, Fourier J F. Soblev Space [M]. 2nd ed. New York: Elsevier, 2003: 55-61.

[9] Ihlenburg F. Finite Element Analysis of Acoustic Scattering [M]. New York: Springer, 1998: 135-136.

[10] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order [M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 1983: 89-91.

[11] Lechleiter A, Ritterbusch S. A Variational Method for Wave Scattering from Penetrable Rough Layers [J]. IMA J Appl Math, 2010, 75(3): 366-391.

(责任编辑: 赵立芹)