第49卷 第3期 吉林大学学报(理学版) Vol.49 No.3
2011年5月 Journal of Jilin University (Science Edition) May 2011

# Heisenberg 超代数的导子代数

周 佳[1], 陈良云[2]
(1. 吉林农业大学 信息技术学院, 长春 130118; 2. 东北师范大学 数学与统计学院, 长春 130024)

**摘要**: 以 Heisenberg 超代数 $H$ 的导子在基底上的表示矩阵为工具, 得到了关于复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维 Heisenberg 超代数 $H$ 的导子代数和全形的结论: $H$ 的导子代数 Der $H$ 是单完备的李超代数, 而 $H$ 的全形 $h(H)$ 不是完备李超代数.

**关键词**: Heisenberg 超代数; 导子代数; 完备李超代数; 全形
**中图分类号**: O152.5 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)03-0419-05

## Derivation Algebra of Heisenberg Superalgebra

ZHOU Jia[1], CHEN Liang-yun[2]
(1. *School of Information and Technology*, *Jilin Agricultural University*, *Changchun* 130118, *China*;
2. *School of Mathematics and Statistics*, *Northeast Normal University*, *Changchun* 130024, *China*)

**Abstract**: With matrix of the derivation of Heisenberg superalgebra $H$ relative to the basis of $H$ as a tool, we obtained some properties of the derivation algebra and holomorph of the finite dimensional Heisenberg superalgebra over the complex field $\mathbb{C}$. The derivation algebra of $H$ is simple complete, while the holomorph of $H$ is not complete Liesuperalgebras.

**Key words**: Heisenberg superalgebras; derivation algebra; complete Liesuperalgebras; holomorph

Kac[1]给出了特征零域上有限维单李超代数的分类; Jacobson[2]给出了完备李代数的定义. 近年, 完备李代数的理论得到迅速发展[3-6], 有限维完备李代数的同构、分类和表示问题已经解决[3]. 孟道骥等[3]证明了 Heisenberg 代数的导子代数是单完备的李代数, 但其全形不是完备的. 文献[7]研究了满足$[H,H]=C(H)=H_{\bar{0}}$, $\dim C(H)=1$ 的 Heisenberg 超代数, 得到其导子代数是单完备的李超代数, 但其全形不是完备的. 本文推广了文献[7]的结果, 证明满足$[H,H]=C(H)\subseteq H_{\bar{0}}$, $\dim C(H)=1$的 Heisenberg 超代数, 得到其导子代数 Der $H$ 是单完备的李超代数, 但全形 $h(H)$不是完备的.

**定义 1**[1] 如果对任意的$a\in H_{\alpha}$, $b\in H_{\beta}$, $\alpha,\beta\in Z_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$满足$[a,b]\in H_{\alpha+\beta}$, 则称$H=H_{\bar{0}}\oplus H_{\bar{1}}$为一个超代数. 如果 $H$ 关于二元运算$[\,,]$构成一个超代数, 且对任意的$a\in H_{\alpha}$, $b\in H_{\beta}$, $c\in H$, $\alpha,\beta\in Z_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$都满足如下条件:

1) $[a,b]=-(-1)^{\alpha\beta}[b,a]$(阶化反对称);

2) $[a,[b,c]]=[[a,b],c]+(-1)^{\alpha\beta}[b,[a,c]]$(阶化 Jacobi 等式).

则称 $H$ 为李超代数.

**定义 2**[7] 如果一个李超代数 $H$ 满足$[H,H]=C(H)\subseteq H_{\bar{0}}$, 且 $\dim C(H)=1$, 则称 $H$ 为 Heisenberg

**收稿日期**: 2010-07-07.

**作者简介**: 周 佳(1982—), 女, 汉族, 硕士, 讲师, 从事李代数的研究, E-mail: 330989050@qq.com. 通讯作者: 陈良云(1972—), 男, 汉族, 博士, 副教授, 从事李代数的研究, E-mail: chenly640@nenu.edu.cn.

**基金项目**: 国家自然科学基金(批准号: 10701019; 10871057)、教育部留学归国人员科研启动基金和中央高校基本科研业务费专项基金.

超代数.

**注1** 由 Heisenberg 超代数定义 $\dim C(H)=1$, 易知 $C(H)=\mathbb{C}c$, 其中 $c$ 是 $H_{\bar{0}}$ 中的非零元. 由 $[H,H]=C(H)\subseteq H_{\bar{0}}$, 易知存在一个 $H$ 上的阶化反对称双线性函数 $\psi$, 使得 $[x,y]=\psi(x,y)c$.

**定义3**[4] 如果 $\forall\beta\in Z_2$, $\boldsymbol{D}(H_\alpha)\subseteq H_{\beta+\alpha}$, 则称 $\boldsymbol{D}\in \mathrm{End}\ H$ 为 $\alpha$ 阶线性映射.

**定义4**[4] 如果一个 $\alpha$ 阶线性映射 $\boldsymbol{D}$ 满足 $\boldsymbol{D}[x,y]=[\boldsymbol{D}x,y]+(-1)^{\alpha\beta}[x,\boldsymbol{D}y]$, $\forall y\in H$, $x\in H_\beta$, 则称 $\boldsymbol{D}$ 为 $\alpha$ 阶导子.

如果 $\alpha=\bar{0}$, 则 $\boldsymbol{D}$ 是偶导子; 如果 $\alpha=\bar{1}$, 则 $\boldsymbol{D}$ 是奇导子.

**定义5**[5] 如果李超代数 $H$ 满足 $C(H)=\{0\}$ 和 $\mathrm{ad}\ H=\mathrm{Der}\ H$, 则称 $H$ 是完备李超代数.

**定义6**[6] 设 $H$ 是一个完备李超代数, 如果 $H$ 的任一非平凡理想都不是完备的, 则称 $H$ 是单完备的.

**引理1**[3] Heisenberg 代数是奇数维的.

**引理2** 令 $H=H_{\bar{0}}\dotplus H_{\bar{1}}$ 是 Heisenberg 超代数.

1) 若 $H$ 是奇数维的, 则存在一组阶化基 $\{s_1,s_2,\cdots,s_n,t_1,t_2,\cdots,t_n,x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_m,c\}$, 使得 $\psi$ 关于这组基底的矩阵为

$$\boldsymbol{M}(\psi)=\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{I}_n & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{I}_n & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I}_m & 0\\ 0 & 0 & -\boldsymbol{I}_m & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中: $x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_m,c\in H_{\bar{0}}$; $s_1,s_2,\cdots,s_n,t_1,t_2,\cdots,t_n\in H_{\bar{1}}$; $\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{I}_n$ 分别是 $m,n$ 阶单位矩阵.

2) 若 $H$ 是偶数维的, 则存在一组阶化基 $\{t_1,t_2,\cdots,t_n,s_1,s_2,\cdots,s_n,z,x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_m,c\}$, 使得 $\psi$ 在这组基底下的矩阵为

$$\boldsymbol{M}(\psi)=\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{I}_n & 0 & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{I}_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I}_m & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{I}_m & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

其中: $x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_m,c\in H_{\bar{0}}$; $s_1,s_2,\cdots,s_n,t_1,t_2,\cdots,t_n,z\in H_{\bar{1}}$; $\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{I}_n$ 分别是 $m,n$ 阶单位矩阵.

证明: 显然 $H_{\bar{0}}$ 是 Heisenberg 代数. 由引理1可得 $H_{\bar{0}}$ 是奇数维的, 不妨设 $\dim H_{\bar{0}}=2m+1$.

1) 由注1, 可取 $H_{\bar{1}}$ 的一组基为 $\{s_1,s_2,\cdots,s_n,t_1,t_2,\cdots,t_n\}$, $H_{\bar{0}}$ 的一组基为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_m,c\}$, 则二者构成了 $H$ 的一组阶化基, 使得

$$\psi(s_i,t_j)=[s_i,t_j]=[t_j,s_i]=\psi(t_j,s_i)=\delta_{ij},\tag{1}$$

$$\psi(x_i,y_j)=[x_i,y_j]=-[y_j,x_i]=-\psi(y_j,x_i)=\delta_{ij},\tag{2}$$

其余为0, 即得到矩阵 $\boldsymbol{M}(\psi)$.

2) 由注1, 取 $H_{\bar{1}}$ 的一组基为 $\{s_1,s_2,\cdots,s_n,t_1,t_2,\cdots,t_n,z\}$, $H_{\bar{0}}$ 的一组基为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_m,c\}$, 则二者构成了 $H$ 的一组阶化基, 使得式(1),(2)成立, 且

$$\psi(z,z)=1,$$

其余为0, 即得到矩阵 $\boldsymbol{M}(\psi)$.

下面记奇数维的 Heisenberg 超代数为 $H=H_{\bar{0}}\oplus H_{\bar{1}}$, 偶数维的 Heisenberg 超代数为 $H'=H'_{\bar{0}}\oplus H'_{\bar{1}}$. 考虑 $H'$ 的性质, $H$ 类似可得.

**引理3** 1) $\boldsymbol{D}\in(\mathrm{Der}\ H')_{\bar{0}}$ 当且仅当 $\boldsymbol{D}$ 在上述阶化基底下的表示阵 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})$ 为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{C} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{D}_3 & \lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{D}_1' & \boldsymbol{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\boldsymbol{E}' & -\boldsymbol{C}' & \dfrac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{D}_4 & \boldsymbol{D}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{D}_6 & \lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{D}_4' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

其中：$\boldsymbol{D}_1 \sim \boldsymbol{D}_3$ 是 $n$ 阶矩阵；$\boldsymbol{D}_4 \sim \boldsymbol{D}_6$ 是 $m$ 阶矩阵；并且 $\boldsymbol{D}_2 = -\boldsymbol{D}_2'$；$\boldsymbol{D}_3 = -\boldsymbol{D}_3'$；$\boldsymbol{D}_5 = \boldsymbol{D}_5'$；$\boldsymbol{D}_6 = \boldsymbol{D}_6'$；$\boldsymbol{D}'$是 $\boldsymbol{D}$ 的转置；$\boldsymbol{C},\boldsymbol{E}$ 是 $1\times n$ 阶矩阵.

2）$\boldsymbol{D} \in (\mathrm{Der}\ H')_{\bar{1}}$ 当且仅当 $\boldsymbol{D}$ 在上述阶化基底下的表示阵 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})$ 为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中：$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $1\times n$ 阶矩阵；$\boldsymbol{C}$ 是 1 阶矩阵.

证明：1）设 $x,y \in H$，则 $\boldsymbol{D} \in (\mathrm{Der}\ H')_{\bar{0}}$ 当且仅当

$$\boldsymbol{D}[x,y] = [\boldsymbol{D}x,y] + [x,\boldsymbol{D}y],$$

易得

$$\psi(x,y)\boldsymbol{D}c = \psi(\boldsymbol{D}x,y)c + \psi(x,\boldsymbol{D}y)c,$$

即有 $\boldsymbol{D}c = \lambda c$. 故

$$\lambda \boldsymbol{M}(\psi) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})'\boldsymbol{M}(\psi) + \boldsymbol{M}(\psi)\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D}). \tag{3}$$

根据 $\bar{0}$ 阶线性映射的定义，可设

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{C} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{D}_3 & \boldsymbol{D}_4 & \boldsymbol{E} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{G} & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{D}_4 & \boldsymbol{D}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{D}_6 & \boldsymbol{D}_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

其中：$\boldsymbol{D}_1 \sim \boldsymbol{D}_4$ 是 $n$ 阶矩阵；$\boldsymbol{D}_4 \sim \boldsymbol{D}_7$ 是 $m$ 阶矩阵；$a,\lambda \in \mathbb{C}$. 将 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})$代入式(3)，计算后即得结论 1).

2）设 $x \in H_\alpha$，$y \in H$，则 $\boldsymbol{D} \in (\mathrm{Der}\ H')_{\bar{1}}$ 当且仅当

$$\boldsymbol{D}[x,y] = [x,\boldsymbol{D}y] + (-1)^{\alpha}[x,\boldsymbol{D}y],$$

由此易得

$$\boldsymbol{D}[c,x] = [\boldsymbol{D}c,x] + [c,\boldsymbol{D}x] = [\boldsymbol{D}c,x] = 0, \quad \forall x \in H', \quad c \in C(H'),$$

从而 $\boldsymbol{D}c = 0$. 因此由 $\boldsymbol{D}[x,y] = [\boldsymbol{D}x,y] - [x,\boldsymbol{D}y]$，$\forall x \in H_{\bar{1}}'$，$y \in H'$知

$$\psi(x,y)\boldsymbol{D}(c) = \psi(\boldsymbol{D}x,y)c - \psi(x,\boldsymbol{D}y)c = 0, \tag{4}$$

即

$$\boldsymbol{D}'\boldsymbol{M}(\psi) = \boldsymbol{M}(\psi)\boldsymbol{D}, \qquad \forall x \in H_{\bar{1}}'. \tag{5}$$

又由 $\boldsymbol{D}[x,y] = [\boldsymbol{D}x,y] + [x,\boldsymbol{D}y]$，$\forall x \in H_{\bar{0}}'$，$y \in H'$知，式(4)成立，即

$$\boldsymbol{D}'\boldsymbol{M}(\psi) = -\boldsymbol{M}(\psi)\boldsymbol{D}, \qquad \forall x \in H_{\bar{0}}'. \tag{6}$$

根据 $\bar{1}$ 阶线性映射的定义，可设

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{J} & \boldsymbol{K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{M} & \boldsymbol{N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{R} & 0 \\ \boldsymbol{G} & \boldsymbol{H} & \boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{F} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{D})$的分块形式同$\boldsymbol{M}(\psi)$, 将其对应矩阵块分别代入式(5),(6), 计算后得结论2).

令

$$s = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{C} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{D}_3 & -\boldsymbol{D}_1' & \boldsymbol{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\boldsymbol{E}' & -\boldsymbol{C}' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{D}_4 & \boldsymbol{D}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{D}_6 & -\boldsymbol{D}_4' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \boldsymbol{D}_i = -\boldsymbol{D}_i',\ i = 2,3;\ \boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{D}_i',\ i = 5,6 \right\},$$

$$\boldsymbol{I}_0 = \operatorname{diag}(E_{2m+2n+1,2}),\quad r_0 = c\boldsymbol{I}_0,\quad r_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

**引理4**[8] 令$L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$是一个李超代数, 其中$L_{\bar{0}}$是约化李代数, $L_{\bar{1}}$是单$L_{\bar{0}}$模, 且$\dim C(L_{\bar{0}}) = 1$, $[L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}] = 0$, 则$L$是完备的李超代数.

**定理1** 令$H = H_{\bar{0}} \oplus H_{\bar{1}}$是一个Heisenberg超代数, 则Der $H$是单完备的李超代数.

证明: 显然 Der $H = s + r_0 + r_n$, 且$s$同构于单李代数$so(2n+2m+1, c)$. 由$r_n$同构于$so(2n+2m+1)$在$(2n+2m+1)\times 1$阶矩阵上通过矩阵乘积的自然表示, 可得$r_n$是不可约$s$-模, 又由引理4知, Der $H$是完备李超代数.

因为$s$是单李代数, $r_n$是一个单$s$-模, 且Der $H$的真理想为$s + r_n$, $r_0 + r_n$, $r_n$都不完备, 因此Der $H$是完备单李超代数.

**推论1** 定理1中的$r_n$是$H$的内导子, $H$是$s + r_0$-模, 且$H$是子模$H_{\bar{0}}$和$H_{\bar{1}}$的直和.

**定理2** $\mathrm{ad}|_{H_{\bar{1}}}$是从$H_{\bar{1}}$到$r_n$的一个模同构.

证明: 设$\{s_1, s_2, \cdots, s_n, t_1, t_2, \cdots, t_n, x_1, x_2, z\}$是$H_{\bar{1}}$的一组阶化基. 令$\mathrm{ad}\ s_i = e_{2m+2n+2,n+i}(i = 1,2,\cdots,n)$, $\mathrm{ad}\ t_i = e_{2m+2n+2,i}(i = 1,2,\cdots,n)$. 易知$\mathrm{ad}|_{H_{\bar{1}}}$是从$H_{\bar{1}}$到$r_n$的一个线性同构.

对$\boldsymbol{D} \in s + r_0$, $x \in H_{\bar{1}}$, 有$\boldsymbol{D}(x) \in H_{\bar{1}}$, 且有$[\boldsymbol{D}, \mathrm{ad}\ x] = \mathrm{ad}\ \boldsymbol{D}(x)$, 是模同态. 因此$\mathrm{ad}|_{H_{\bar{1}}}$是从$H_{\bar{1}}$到$r_n$的一个模同构.

**定义7**[9] 令$H$是一个李超代数, $h(H) = H \dotplus \mathrm{Der}\ H$, 在$h(H)$中定义括积:

$$[x + \boldsymbol{D}, y + \boldsymbol{E}] = [x, y] + \boldsymbol{D}(y) - (-1)^{\alpha\beta}\boldsymbol{E}(x) + [\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}],$$

其中: $x \in H_\beta$; $\boldsymbol{E} \in (\mathrm{Der}\ H)_\alpha$; $\alpha, \beta \in \boldsymbol{Z}_2$. 则$h(H)$是一个李超代数, $h(H)$称为$H$的全形.

**定理3** Heisenberg超代数的全形中心为零, 但不完备.

证明: 由以上对Heisenberg超代数$H$的讨论知:

$$h(H) = (H_{\bar{0}} \dotplus H_{\bar{1}}) \dotplus (s \dotplus r_0 \dotplus r_n).$$

因为$H_{\bar{1}}$和$r_n$是单李代数$s$的单模, 并且$[\boldsymbol{I}_0, \mathbb{C}c] = \mathbb{C}c$, 因此得$C(h(H)) = 0$. 令

$$\boldsymbol{D}(x)=\begin{cases}0, & x\in \mathrm{Der}\,H,\\ 2c, & x=c,\\ 2x-\mathrm{ad}\,x, & x\in H_{\bar{0}},\\ 2x-\mathrm{ad}\,x, & x\in H_{\bar{1}}.\end{cases}$$

因为 $H$ 是 $h(H)$ 的理想，并且 $\boldsymbol{D}(H)\not\subseteq H$，所以 $\boldsymbol{D}$ 不是 $H$ 的内导子.

令 $a_i=\boldsymbol{D}_i+\mathrm{ad}\,x_i+z_i+y_i+k_ic$，这里 $\boldsymbol{D}\in s+r_0$，$x_i,z_i\in H_{\bar{1}}$，$k_i\in\mathbb{C}$. 则可以得到 $\lambda_i\in\mathbb{C}$，使得 $[\boldsymbol{D}_i,c]=\boldsymbol{D}_ic=\lambda_ic(i=1,2)$. 于是，有

$$\begin{aligned}[a_1,a_2]=&[\boldsymbol{D}_1+\mathrm{ad}\,x_1+z_1+y_1+k_1c,\boldsymbol{D}_2+\mathrm{ad}\,x_2+z_2+y_2+k_2c]=\\&[(\boldsymbol{D}_1+y_1+k_1c)+(\mathrm{ad}\,x_1+z_1),(\boldsymbol{D}_2+y_2+k_2c)+(\mathrm{ad}\,x_2+z_2)]=\\&[\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2]+\boldsymbol{D}_1y_2+\boldsymbol{D}_1z_2-\boldsymbol{D}_2z_1+\mathrm{ad}\,\boldsymbol{D}_1x_2-\\&\mathrm{ad}\,\boldsymbol{D}_2x_1+[\mathrm{ad}\,x_1,\mathrm{ad}\,x_2]-\boldsymbol{D}_2y_1+\lambda_0c,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\lambda_0=&\psi(y_1,y_2)+k_2\lambda_1-k_1\lambda_2+\psi(y_1,z_2)-\psi(x_2,y_1)+\psi(z_1,y_2)+\\&\psi(x_1,y_2)+\psi(z_1,z_2)+\psi(x_1,z_2)+\psi(x_2,z_1).\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}[a_1,a_2]=&2\boldsymbol{D}_1y_2-\mathrm{ad}\,\boldsymbol{D}_1y_2-2\boldsymbol{D}_2y_1+\mathrm{ad}\,\boldsymbol{D}_2y_1+2\boldsymbol{D}_1z_2-\\&\mathrm{ad}\,\boldsymbol{D}_1z_2-2\boldsymbol{D}_2z_1+\mathrm{ad}\,\boldsymbol{D}_2z_1+2\lambda_0c.\end{aligned}$$

同理，可得

$$[\boldsymbol{D}a_1,a_2]=-2\boldsymbol{D}_2y_1+\mathrm{ad}\,\boldsymbol{D}_2y_1-2\boldsymbol{D}_2z_1+\mathrm{ad}\,\boldsymbol{D}_2z_1+\mu c,$$

其中：

$$\mu=\psi(y_1,y_2)-2k_1\lambda_2+\psi(y_1,z_2)-2\psi(x_2,y_1)+\psi(z_1,y_2)+\psi(z_1,z_2)+2\psi(x_2,z_1);$$

$$[a_1,\boldsymbol{D}a_2]=2\boldsymbol{D}_1y_2-\mathrm{ad}\,\boldsymbol{D}_1y_2+2\boldsymbol{D}_1z_2-\mathrm{ad}\,\boldsymbol{D}_1z_2+\nu c,$$

这里

$$\begin{aligned}\nu=&\psi(y_1,y_2)+2k_2\lambda_1+\psi(y_1,z_2)+2\psi(z_1,y_2)+2\psi(x_1,y_2)+\\&\psi(y_2,z_1)+\psi(z_1,z_2)+2\psi(x_1,z_2).\end{aligned}$$

易知 $\boldsymbol{D}[a_1,a_2]=[\boldsymbol{D}a_1,a_2]+[a_1,\boldsymbol{D}a_2]$，表明 $\boldsymbol{D}$ 是 $h(H)$ 的一个导子，因此 $H$ 的全形 $h(H)$ 不完备.

## 参 考 文 献


[1] Kac V G. Lie Superalgebras [J]. Adv Math, 1977, 26: 8-96.

[2] Jacobson N. Lie Algebras [M]. New York: Dover Publ, 1979.

[3] 孟道骥，朱林生，姜翠波. 完备李代数 [M]. 北京：科学出版社，2001.

[4] MA Li-li, ZHANG Yong-zheng. Generalized Lie Superalgebra $W(n)$ and Its Derivation Superalgebra [J]. Natural Science Journal of Harbin Normal University, 2005, 21(6): 1-4. (马丽丽，张永正. 广义李超代数 $W(n)$ 及其导子超代数 [J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报，2005，21(6)：1-4.)

[5] CHEN Liang-yun, MENG Dao-ji. Some Results on Complete Restricted Lie Superalgebras [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2005, 25(2): 191-196.

[6] WANG Li-yun, MENG Dao-ji. Some Results on Complete Lie Superalgebras [J]. Linear Algebra Its Appl, 2002, 355(1/2/3): 1-14.

[7] WANG Li-yun, MENG Dao-ji. Some Complete Lie Superalgebras [J]. Linear Algebra Its Appl, 2003, 369(1): 339-349.

[8] WANG Li-yun, MENG Dao-ji. On Lie Superalgebras with Reduced Even Part [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nanlcaiensis, 2002, 35(1): 43-47. (王立云，孟道骥. 具有约化偶部的李超代数 [J]. 南开大学学报：自然科学版，2002，35(1)：43-47.)

[9] WANG Li-yun, MENG Dao-ji. On Solvable Complete Lie Superalgebras [J]. Chin Ann Math: Ser B, 2003, 24(1): 111-114.