云南大学学报（自然科学版），2006，28（4）：277～280 CN 53－1045/N ISSN 0258－7971
Journal of Yunnan University

一类非线性悬臂梁方程解的存在性*

姚庆六[1]，李永祥[2]
（1.南京财经大学 应用数学系，江苏 南京 210003；
2.西北师范大学 数学与信息科学学院，甘肃 兰州 730070）

摘要：考察了1类非线性悬臂梁方程．在力学上，这类方程描述了1端固定，另1端自由的弹性梁的形变．本文中方程的特点是非线性项含有未知函数的三阶导数．通过使用方程的分解技巧和Leray－Schauder不动点定理建立了4个存在定理．主要结论表明只要非线性项在某个有界集上的“高度”是适当的，这类方程至少有1个解或者正解．

关键词：非线性常微分方程；两点边值问题；解和正解；存在性；不动点定理

中图分类号：O 175.8 **文献标识码**：A **文章编号**：0258－7971(2006)04－0277－04

众所周知，四阶边值问题描述了弹性梁在静平衡状态下的形变，不同的边界条件反映了不同的受力情况．近年来，非线性四阶边值问题正解存在性的讨论十分活跃[1~9]．本文考察下列非线性四阶两点边值问题（P）的解或者正解的存在性：

$$(P)\quad \begin{cases} u^{(4)}(t)=f(t,u(t),u'''(t)), & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ u(0)=A,\ u'(0)=B,\ u''(1)=C,\ u'''(1)=D. \end{cases}$$

问题（P）描述了1个端点固定，另1个端点自由的弹性梁的形变．在力学上，这个问题通常称为悬臂梁方程．本文的特点是问题（P）的非线性项中含有三阶导数 $u'''(t)$．问题（P）解和正解的存在性对于悬臂梁的稳定性分析无疑是一件有益的事情．这里问题（P）的正解是指满足条件 $u^*(t)>0,0<t<1$ 的解．在许多实际问题中，只有正解才有意义．

涉及问题（P）存在性的文献很少[1,2]，而这些文献中非线性项均不含三阶导数 $u'''(t)$．本文将证明有关问题（P）的解和正解的4个存在定理．这些定理表明，可以通过考察非线性项 f 在某个有界集上的“高度”来判断解或者正解的存在性，并且这种存在性与非线性项在上述有界集合以外的增长无关．在这个意义上本文的结果是新的．我们的主要工具是方程的分解技巧和Leray－Schauder不动点定理．相关问题可见文献［10～12］．

记 $R=(-\infty,+\infty)$，$R_+=[0,+\infty)$，$R_-=(-\infty,0]$．本文始终假设函数 $f(t,x,y)$ 在其定义域上连续．对于 $u\in C[0,1]$，记范数 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$．又记常数 $\eta=\max\{|D|,\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|\}$，其中 $\varphi(t)=1/2Ct^2+Bt+A$．计算可得：若 $-B/C\in[0,1]$，则

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|=\max\left\{\left|\frac{B^2-2AC}{2C}\right|,|A|,\frac{1}{2}|2A+2B+C|\right\};$$

若 $-B/C\notin[0,1]$ 或者 $C=0$，则

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|=\max\left\{|A|,\frac{1}{2}|2A+2B+C|\right\}.$$

本文证明了下列存在定理．在实际问题中，定理1和3中的正参数 m,k,d 可以按照非线性项 f 的性质进行选择．

---

* 收稿日期：2005－07－08
基金项目：甘肃省自然科学基金资助项目（ZS031－A25－003－Z）．
作者简介：姚庆六（1946－ ），男，上海人，教授，主要从事应用微分方程方面的研究．

定理 1 假设 $f:[0,1]\times R\times R\to R$. 如果存在 $m>1, \dfrac{1}{m}\leqslant k\leqslant\dfrac{3(m-1)}{m}$, $d>0$ 使得

$$\max\{f(t,x,y):0\leqslant t\leqslant 1,\ |x|\leqslant m\eta+d,\ |y|\leqslant k(m\eta+d)\}\leqslant(km-1)\eta+kd,$$

则方程(P)至少存在 1 个解 $u^*\in C^4[0,1]$ 满足 $\|u^*\|\leqslant m\eta+d$, $\|(u^*)'''\|\leqslant k(m\eta+d)$.

定理 2 假设 $f:[0,1]\times R\times R\to R$, $A=B=C=D=0$. 如果存在 $d>0$ 使得

$$\max\{|f(t,x,y)|:0\leqslant t\leqslant 1,\ |x|\leqslant d,\ |y|\leqslant 3d\}\leqslant 3d,$$

则方程(P)至少存在 1 个解 $u^*\in C^4[0,1]$ 满足 $\|u^*\|\leqslant d$, $\|(u^*)'''\|\leqslant 3d$.

定理 3 假设 $f:[0,1]\times R_+\times R_-\to R_+$, $A\geqslant 0$, $C\leqslant 0$, $2A+2B+C\geqslant 0$, $D\geqslant 0$. 如果并且存在 $m>1, \dfrac{1}{m}\leqslant k\leqslant\dfrac{3(m-1)}{m}$, $d>0$ 使得

$$\max\{|f(t,x,y)|:0\leqslant t\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant m\eta+d,\ -k(m\eta+d)\leqslant y\leqslant 0\}\leqslant(km-1)\eta+kd,$$

则方程(P)至少存在 1 个非负解 $u^*\in C^4[0,1]$ 满足

$$\|u^*\|\leqslant m\eta+d,\ \|(u^*)'''\|\leqslant k(m\eta+d).$$

此外, 如果 A, B, C, D 不同时为零或者 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}f(t,0,0)>0$, 则 u^* 是 1 个正解.

定理 4 假设 $f:[0,1]\times R_+\times R_-\to R_+$, $A=B=C=D=0$. 如果存在 $d>0$ 使得

$$\max\{f(t,x,y):0\leqslant t\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant d,\ -3d\leqslant y\leqslant 0\}\leqslant 3d,$$

则方程(P)至少存在1个非负解 $u^*\in C^4[0,1]$ 满足 $\|u^*\|\leqslant d$, $\|(u^*)'''\|\leqslant 3d$. 此外, 如果 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}f(t,0,0)>0$, 则 u^* 是 1 个正解.

例 1 考察四阶弹性梁方程

$$\begin{cases}u^{(4)}(t)=e^{u(t)}\cos^2 u'''(t), 0\leqslant t\leqslant 1,\\ u(0)=u'(0)=u''(1)=u'''(1)=0.\end{cases}$$

这里 $f(t,x,y)=e^x\cos^2 y$. 于是 $f:[0,1]\times R_+\times R_-\to R_+$ 并且 $A=B=C=D=0$. 由于

$$\max\{f(t,x,y):0\leqslant t\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant 1,\ -3\leqslant y\leqslant 0\}\leqslant e\approx 2.71828<3=3\times 1.$$

根据定理 4, 该方程有 1 个非减的正解 $u^*\in C^4[0,1]$ 满足 $\|u^*\|\leqslant 1$, $\|(u^*)'''\|\leqslant 3$.

定理 1 的证明 考察赋予范数 $\|(u,v)\|=\max\{\|u\|, k^{-1}\|v\|\}$ 的 Banach 空间 $C[0,1]\times C[0,1]$.

设 $v(t)=-u'''(t), 0\leqslant t\leqslant 1$. 则方程(P)等价于微分方程组

$$\begin{cases}u'''(t)+v(t)=0, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ v'(t)=-f(t,u(t),-v(t)), & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ u(0)=A, u'(0)=B, u''(1)=C, v(1)=D.\end{cases}$$

该方程组又等价于积分方程组

$$\begin{cases}u(t)=\varphi(t)+\displaystyle\int_0^1 G(t,s)v(s)\mathrm{d}s,\\ v(t)=D+\displaystyle\int_t^1 f(s,u(s),-v(s))\mathrm{d}s.\end{cases}$$

这里 $G(t,s)$ 是边值问题 $-u'''(0)=0$, $u(0)=u'(0)=u''(1)=0$ 的 Green 函数, 即

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2}(t-s)^2, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

显然 $G(t,s)\geqslant 0, 0\leqslant t, s\leqslant 1$. 直接积分可得

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left(-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2\right)=\frac{1}{3}.$$

设 $T(u,v)=(\alpha(u,v),\beta(u,v))$, 其中

$$\begin{cases}\alpha(u,v)(t)=\varphi(t)+\int_0^1 G(t,s)v(s)\mathrm{d}s,\\ \beta(u,v)(t)=D+\int_t^1 f(s,u(s),-v(s))\mathrm{d}s.\end{cases}$$

则上述积分方程组等价于不动点方程

$$T(u,v)=(u,v),(u,v)\in C[0,1]\times C[0,1].$$

根据 Arzela - Ascoli 定理容易证明 α,β: $C[0,1]\times C[0,1]\to C[0,1]$ 都是全连续的. 于是

$$T: C[0,1]\times C[0,1]\to C[0,1]\times C[0,1]$$

是全连续的. 设

$$V_{m\eta+d}=\{(u,v)\in C[0,1]\times C[0,1]: \|(u,v)\|\leqslant m\eta+d\}.$$

则 $V_{m\eta+d}$ 是有界凸闭集.

如果 $(u,v)\in V_{m\eta+d}$, 则 $\|u\|\leqslant m\eta+d$ 并且 $\|v\|\leqslant k(m\eta+d)$. 于是

$$|f(t,u(t),-v(t))|\leqslant(km-1)\eta+kd, 0\leqslant t\leqslant 1.$$

因为 $k\leqslant\frac{3(m-1)}{m}<3$, 所以

$$\|\alpha(u,v)\|\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)|v(s)|\mathrm{d}s\leqslant\eta+k(m\eta+d)\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s=\left(\frac{1}{3}km+1\right)\eta+\frac{1}{3}kd<m\eta+d,$$

$$\|\beta(u,v)\|\leqslant|D|+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_t^1|f(s,u(s),-v(s))|\mathrm{d}s\leqslant\eta+(km-1)\eta+kd=k(m\eta+d).$$

于是 $\qquad \|T(u,v)\|=\max\{\|\alpha(u,v)\|,k^{-1}\|\beta(u,v)\|\}\leqslant m\eta+d.$

因此, $T: V_{m\eta+d}\to V_{m\eta+d}$.

根据 Leray - Schauder 不动点定理, 算子 T 有 1 个不动点 $(u^*,v^*)\in V_{m\eta+d}$. 这表明方程(P)至少有 1 个解 u^* 使得

$$\|u^*\|\leqslant m\eta+d,\ \|(u^*)'''\|\leqslant k(m\eta+d).$$

显然, $u^*\in C^4[0,1]$. 证毕.

定理 2 的证明　设 $C[0,1]\times C[0,1]$ 是具有下列范数的 Banach 空间

$$\|(u,v)\|=\max\left\{\|u\|,\frac{1}{3}\|v\|\right\}.$$

我们需要证明 $T: V_d\to V_d$, 其中 $V_d=\{(u,v)\in C[0,1]\times C[0,1]: \|(u,v)\|\leqslant d\}$. 具体过程类似于定理 1 的证明. 证毕.

定理 3 的证明　容易证明存在一个函数 f 的连续延拓 f_1: $[0,1]\times R\times R\to R_+$ 使得

$$\max\left\{f_1(t,x,y): \begin{array}{c}0\leqslant t\leqslant 1,\\ |x|\leqslant m\eta+d,\\ |y|\leqslant k(m\eta+d)\end{array}\right\}=\max\left\{f(t,x,y): \begin{array}{c}0\leqslant t\leqslant 1,\\ 0\leqslant x\leqslant m\eta+d,\\ -k(m\eta+d)\leqslant y\leqslant 0\end{array}\right\}\leqslant (km-1)\eta+kd.$$

根据定理 1, 方程

$$\begin{cases}u^{(4)}(t)=f_1(t,u(t),u'''(t)),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\\ u(0)=A,u'(0)=B,u''(1)=C,u'''(1)=D\end{cases}$$

至少有 1 个解 $u^*\in C^4[0,1]$ 使得 $\|u^*\|\leqslant m\eta+d$, $\|(u^*)'''\|\leqslant k(m\eta+d)$. 同时

$$\begin{cases}u^*(t)=\varphi(t)+\int_0^1 G(t,s)[-(u^*)'''(s)]\mathrm{d}s,\\ -(u^*)'''(t)=D+\int_t^1 f_1(s,u^*(s),(u^*)'''(s))\mathrm{d}s.\end{cases}$$

因为 $D \geqslant 0$ 并且 $f_1(t, u^*(t), (u^*)'''(t)) \geqslant 0, 0 \leqslant t \leqslant 1$，可知 $(u^*)'''(t) \leqslant 0, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

因为 $\varphi(0) = A \geqslant 0$, $\varphi(1) = \frac{1}{2}(2A + 2B + C) \geqslant 0$ 并且 $\varphi''(t) = C \leqslant 0$，我们看出 φ 为 $[0,1]$ 上的非负上凸函数. 于是 $\varphi(t) \geqslant 0, 0 \leqslant t \leqslant 1$，因而又有 $u^*(t) \geqslant 0, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

这样一来 $f_1(t, u^*(t), (u^*)'''(t)) = f(t, u^*(t), (u^*)'''(t)), 0 \leqslant t \leqslant 1$. 因此 u^* 是方程(P)的非负解.

如果 A, B, C 不全为零，则 $\varphi(t)$ 为 $[0,1]$ 上的非零上凸函数，即有 $\varphi(t) > 0, 0 < t < 1$. 于是在此情况下 $u^*(t) \geqslant \varphi(t) > 0, 0 < t < 1$.

如果 $D > 0$，则 $-(u^*)'''(t) \geqslant D > 0, 0 \leqslant t \leqslant 1$. 因此同样有

$$u^*(t) \geqslant \int_0^1 G(t, s)[-(u^*)'''(s)]ds \geqslant D\int_0^1 G(t, s)ds > 0, 0 < t < 1.$$

因此, u^* 是方程(1)的解.

如果 A, B, C, D 全部为零，但是 $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} f(t, 0, 0) > 0$，则从

$$-(u^*)'''(t) = \int_t^1 f(s, u^*(s), (u^*)'''(s))ds$$

知必有 $\|(u^*)'''\| > 0$. 因此 $\|u^*\| > 0$. 容易核验

$$G(t, s) \geqslant t^2(1 - t) \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} G(t, s), 0 \leqslant t, s \leqslant 1,$$

于是, 对于 $0 < t < 1$,

$$u^*(t) = \int_0^1 G(t, s)[-(u^*)'''(s)]ds \geqslant t^2(1 - t) \max_{0 \leqslant t \leqslant 1}\int_0^1 G(t, s)[-(u^*)'''(s)]ds = \|u^*\| t^2(1 - t) > 0.$$

证毕.

定理 4 的证明 类似于定理 3 的证明. 证毕.

参考文献:

[1] GUPTA C P. Existence and uniqueness theorems for the bending of an elastic beam equation[J]. Applicable Anal, 1988, 26(4): 289-304.

[2] DALMASSO R. Uniqueness of positive solutions for some nonlinear fourth-order equations[J]. J Math Anal Appl, 1996, 201(1): 152-168.

[3] ELGINDIl M B M, GUAN Z. On the global solvability for a class of fourth-order boundary value problems[J]. Int J Math Math Sci, 1997, 20(3): 257-262.

[4] BAI Zhan-bing, Wang Hai-yan. On positive solutions of some nonlinear fourth-order beam equations[J]. J Math Anal Appl, 2002, 270(2): 357-368.

[5] 李永祥. 四阶边值问题正解的存在性与多解性[J]. 应用数学学报, 2003, 26(1): 109-116.

[6] YAO Qing-liu. Existence of n positive solutions for a class of fourth-order boundary value problems[J]. J Nanjing Univ: NS, 2004, 40(1): 83-88.

[7] YAO Qing-liu. Positive solutions for eigenvalue problems of fourth-order elastic beam equations[J]. Appl Math Letters, 2004, 17(2): 237-243.

[8] 姚庆六. 一类弹性梁方程的正解存在性与多解性[J]. 山东大学学报: 理学版, 2004, 39(5): 64-67.

[9] 姚庆六. 一般 Lidstone 边值问题 n 个正解的存在性[J]. 数学学报, 2005, 48(2): 365-376.

[10] 杨林. 一类非线性波方程解的存在性[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2001, 23(1): 95-99.

[11] 何昌, 孙昭洪. Banach 空间中一类 φ-强增生算子方程的解及其迭代逼近问题[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2002, 24(4): 249-252.

[12] 刘常福, 戴正德. 反映扩散方程在 Banach 空间的指数吸引子[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2003, 25(5): 381-385.

(下转第 284 页)

Theory, 1993, 72(1): 2-23.

[5] LIU Yong-ping. Approximation of smooth functions by polyharmonic cardinal splines in $L_p(R^n)$ space[J]. Acta Math Appl Sinica, 1998, 14(2): 157-164.

[6] MADYCH W R. Polyharmonic splines, multiscale anlysis and entire functions[M]//WHAUSSMANN, JETTER K. Multivariate approximation interpolations eds. Basel: Birkhauser Verlag, 1990: 205-216.

Approximation of Lipschitz spaces from Cardinal splines

YANG Zhu-yuan[1], LIU Yong-ping[2]

(1. School of Mathermatics and Computer Science, Yunnan Nationalities University, Kunming 650031, China;
2. School of Mathematics Science, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: A characterization of Lipschitz spaces by Cardinal splines is obtained, and meantime the Bernstein inequality of approximation operator and the estimate of K-functional by approximation order are obtained.

Key words: Lipshitz spaces; Cardinal splines; approximation

* *

(上接第 280 页)

Existence of solution to a class of nonlinear cantilever beam equations

YAO Qing-liu[1], LI Yong-xiang[2]

(1. Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210003, China;
2. College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The existence of solution is considered for a class of nonlinear cantilever beam equations. In mechanics, the class of equations describes deformation of the elastic beam whose one end is fixed and the other is free. The character of this equation is that the nonlinear term contain third derivative of unknown function. By using of the decomposition of equation and the Leray-Schauder fixed point theorem, four existence theorems are established. The main results show that the class of equations has at least one solution or positive solution provided the "height" of nonlinear tem is appropriate on a bounded set.

Key words: nonlinear ordinary differential equation; two-point boundary value problem; solution and positive solution; existence; fixed point theorem