四阶 p-Laplacian 中立型泛函微分方程周期解的存在性

刘丙镯，刘文斌
(中国矿业大学 理学院，江苏 徐州 221116)

摘要：使用中立型算子的性质及 Mawhin 连续性定理，研究四阶 p-Laplacian 中立型泛函微分方程周期解的存在性. 在适当的假设条件下，得到了该方程存在周期解的充分性条件.

关键词：中立型泛函微分方程；p-Laplacian 方程；Mawhin 连续性定理；周期解
中图分类号：O175.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2011)03-0430-07

Existence of Periodic Solutions for a Fourth-Order p-Laplacian Neutral Functional Differential Equation

LIU Bing-zhuo, LIU Wen-bin
(*College of Science, China University of Mining and Technology, Xuzhou* 221116, *Jiangshu Province, China*)

Abstract: In order to expand the researches of neutral functional differential equation, we studied a kind of periodic solutions to a fourth order p-Laplacian neutral functional differential equation. Under various assumptions, new results on the existence of periodic solutions were obtained via the theory of coincidence degree and some properties of the neutral operator.

Key words: neutral functional differential equation; p-Laplacian equation; Mawhin continuation theory; periodic solution

0 引言

考虑四阶 p-Laplacian 中立型泛函微分方程

$$[\varphi_p((\boldsymbol{x}(t)-\sum_{i=1}^{n}c_i\boldsymbol{x}(t-\gamma_i))'')]''+f(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{x}'(t)+g(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))=e(t) \tag{1}$$

周期解的存在性，其中：常数 $p>1$；φ_p：$R\to R$，$\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s$，$s\neq 0$，$\varphi_p(0)=0$；$g\in C(R^3,R)$，对 $\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in R^2$，有 $g(t+T,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=g(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$；$f,e\in C(R,R)$，$\tau\in C^1(R,R)$，并且 $\tau(t+T)=\tau(t)$，$\tau'(t)<1$；$e(t+T)=e(t)$，$T>0$；$c_i,\gamma_i\in R$ 是常数，$\gamma_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,n$.

目前，关于中立型泛函微分方程的研究已有许多结果[1-8]. 文献[1-2]用 Mawhin 连续性定理研究了中立型泛函微分方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D\boldsymbol{x}_t)=g(\boldsymbol{x}_t)$ 周期解的存在性，其中：$\boldsymbol{x}_t(\theta)=\boldsymbol{x}(t+\theta)$，$\theta\in[-\tau,0]$；$D$ 是线性微分算子. 文献[4-5]分别研究了中立型泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t)-ku(t-\tau))=g_1(u(t))+g_2(u(t-\tau_1))+p(t),$$

收稿日期：2010-06-28.
作者简介：刘丙镯(1985—)，男，汉族，硕士研究生，从事常微分方程的研究，E-mail：tuteng3839@163.com.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：10771212)和中央高校基本科研业务费专项基金(批准号：2010LKXS09).

$$(u(t)-ku(t-\tau))''+f(u(t))u'(t)+\sum_{j=1}^{n}\beta_j(t)g(u(t)-\gamma_j(t))=p(t),$$

并得到了其周期解存在的充分性条件. 文献[9]研究了四阶 p-Laplacian 微分方程时滞问题

$$(\varphi_p(u''(t)))''+f(u(t))u'(t)+g(t,u(t),u(t-\tau(t)))=e(t)$$

周期解的存在性. 本文在此基础上研究四阶 p-Laplacian 中立型泛函微分方程(1)周期解的存在性，这类方程常用来描述弹性梁的振动状态[9-13].

1 预备知识

令 $C_T=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}\in C(R,R),\ \boldsymbol{x}(t+T)=\boldsymbol{x}(t)\}$，范数 $|\boldsymbol{x}|_0=\max\limits_{t\in[0,T]}|\boldsymbol{x}(t)|$. 显然，$C_T$ 是 Banach 空间. 假设 $\sum\limits_{i=1}^{n}|c_i|<1$，或存在整数 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $|c_k|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|c_i|\}>0$，并且 $\dfrac{1}{|c_k|}+\sum\limits_{i\neq k}\left|\dfrac{c_i}{c_k}\right|<1$. 定义算子 A：$C_T\to C_T$，$(A\boldsymbol{x})(t)=\boldsymbol{x}(t)-\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\boldsymbol{x}(t-\gamma_i)$.

引理 1[6] 如果 $\sum\limits_{i=1}^{n}|c_i|<1$，则算子 A 存在逆算子 A^{-1}，并有如下性质：

$$\int_0^T|(A^{-1}f)(t)|^p\mathrm{d}t\leqslant\left(\frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}|c_i|}\right)^p\int_0^T|f(t)|^p\mathrm{d}t,\qquad\forall\boldsymbol{x}\in C_T.$$

引理 2[6] 如果存在整数 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $|c_k|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|c_i|\}>0$，并且 $\dfrac{1}{|c_k|}+\sum\limits_{i\neq k}\left|\dfrac{c_i}{c_k}\right|<1$，则算子 A 存在逆算子 A^{-1}，并有如下性质：

$$\int_0^T|(A^{-1}f)(t)|^p\mathrm{d}t\leqslant\left(\frac{1}{|c_k|-1-\sum\limits_{i=1}^{n}|c_i|}\right)^p\int_0^T|f(t)|^p\mathrm{d}t,\qquad\forall\boldsymbol{x}\in C_T.$$

引理 3[10] 如果 $\omega\in C^1(R,R)$，并且 $\omega(0)=\omega(T)=0$，则 $\int_0^T|\omega(t)|^p\mathrm{d}t\leqslant\left(\dfrac{T}{\pi_p}\right)^p\int_0^T|\omega'(t)|^p\mathrm{d}t$，其中 $\pi_p=2\displaystyle\int_0^{(p-1)/p}\frac{1}{(1-s^p/(p-1))^{1/p}}\mathrm{d}s=\frac{2\pi(p-1)^{1/p}}{p\sin(\pi/p)}$.

引理 4[10] 如果 $\boldsymbol{x}\in C_T^2$，并且存在 $t_0\in[0,T]$，使得 $|\boldsymbol{x}(t_0)|\leqslant d$，则

$$\left(\int_0^T|\boldsymbol{x}(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\leqslant\left(\frac{T}{\pi_p}\right)^2\left(\int_0^T|\boldsymbol{x}''(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}+\mathrm{d}T^{1/p}.$$

引理 5[10] 如果 $\tau\in C_T^1$，$\tau'(t)<1$，$\forall t\in[0,T]$，$\boldsymbol{x}\in C_T$，则 $\tau'(\phi(s))$ 是 T-周期的，并存在常数 $\delta>0$，使得

$$\int_0^T|\boldsymbol{x}(t-\tau(t))|^m\mathrm{d}t\leqslant\delta\int_0^T|\boldsymbol{x}(t)|^m\mathrm{d}t,\qquad\forall m>0,$$

其中：$\phi(s)$ 为函数 $t-\tau(t)$ 的逆；$\delta=\dfrac{1}{1-\tilde{\tau}}$，$\tilde{\tau}=\max\limits_{t\in[0,T]}\tau'(t)$.

引理 6[14] L 是指标为零的 Fredholm 算子，N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的，如果下列条件满足：

1）$L\boldsymbol{x}\neq\lambda N\boldsymbol{x}$，$\forall(\boldsymbol{x},\lambda)\in[(\mathrm{dom}\ L\backslash\mathrm{Ker}\ L)\cap\partial\Omega]\times(0,1)$；

2）$N\boldsymbol{x}\notin\mathrm{Im}\ L$，$\forall\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}\ L\cap\partial\Omega$；

3）$\deg(QN|_{\mathrm{Ker}\,L},\Omega\cap\mathrm{Ker}\ L,0)\neq0$.

则抽象方程 $L\boldsymbol{x}=N\boldsymbol{x}$ 在 $\mathrm{dom}\ L\cap\bar{\Omega}$ 上至少有一个解.

由于微分算子 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s$ 只有在 $p=2$ 时才是线性的，因此为了使用 Mawhin 连续性定理研究方程(1)的 T-周期解的存在性，可先把方程(1)写成如下等价方程组：

$$\begin{cases}(Ax_1)''(t)=\varphi_q(x_2(t))=|x_2(t)|^{q-2}x_2(t),\\ x_2''=-f(x_1(t))x_1'(t)-g(t,x_1(t),x_1(t-\tau(t)))+e(t),\end{cases}\tag{2}$$

其中 $q>1$ 是常数, 并满足 $1/p+1/q=1$. 如果 $\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}$是方程组(2)的 T-周期解, 则 $x_1(t)$必为方程(1)的 T-周期解. 于是, 方程(1)的 T-周期解问题即转化为方程组(2)的 T-周期解问题.

不妨取 $X=Y=\{\boldsymbol{x}=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}: \boldsymbol{x}(t+T)=\boldsymbol{x}(t)\}$, 范数 $\|\boldsymbol{x}\|=\max\{|x_1|_0,|x_2|_0\}$, 显然, X,Y为两个 Banach 空间. 定义线性算子 L: $D(L)=\{\boldsymbol{x}\in C^2(R,R^2): \boldsymbol{x}(t+T)=\boldsymbol{x}(t)\}\subset X\to Y$ 为

$$L\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}''=\begin{pmatrix}(Ax_1)''\\ x_2''\end{pmatrix}; \tag{3}$$

非线性算子 N: $X\to Y$ 为

$$N\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\varphi_q(x_2(t))\\ -f(x_1(t))x_1'(t)-g(t,x_1(t),x_1(t-\tau(t)))+e(t)\end{pmatrix}, \tag{4}$$

则方程(2)可以转化为抽象方程 $L\boldsymbol{x}=N\boldsymbol{x}$. 对$\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}\,L$, 都有$\begin{pmatrix}(Ax_1)''\\ x_2''\end{pmatrix}=0$, 则

$$\begin{cases}Ax_1=a_1t+b_1,\\ x_2=a_2t+b_2,\end{cases}$$

其中常数 $a_1,a_2,b_1,b_2\in R$. 因为 A 为线性算子, 于是 $Ax_1\in C_T$, $x_2\in C_T$, 所以 $a_1=a_2=0$.

根据引理1, 可令 $\varphi(t)\neq 0$ 为 $\boldsymbol{x}(t)-\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\boldsymbol{x}(t-\gamma_i)=1$ 的解, 则

$$\mathrm{Ker}\,L=\left\{\begin{pmatrix}b_1\varphi(t)\\ b_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\ b_1b_2\in R\right\},\qquad \mathrm{Im}\,L=\left\{y:\ y\in Y,\ \int_0^T y(s)\,\mathrm{d}s=0\right\}.$$

因此, $\mathrm{Im}\,L$ 为 C_T 中的闭集, $\dim\mathrm{Ker}\,L=\mathrm{co}\dim\mathrm{Im}\,L=2$, 从而 L 是指标为零的 Fredholm 算子. 定义连续投影算子 P: $\boldsymbol{x}\to\mathrm{Ker}\,L$ 和 Q: $Y\to\mathrm{Im}\,Q$ 分别为

$$P\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\dfrac{\int_0^T x_1(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^T\varphi^2(t)\,\mathrm{d}t}\varphi(t)\\ \dfrac{1}{T}\int_0^T x_1(t)\,\mathrm{d}t\end{pmatrix},\qquad Q\boldsymbol{y}=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{y}(s)\,\mathrm{d}s.$$

因此, $\mathrm{Im}\,P=\mathrm{Ker}\,L$, $\mathrm{Ker}\,Q=\mathrm{Im}\,L$.

由于算子 $L_p=L|_{\mathrm{Ker}\,P\cap D(L)}$: $\mathrm{Ker}\,P\cap D(L)\to\mathrm{Im}\,L$, 则 $L_P^{-1}=K_p$: $\mathrm{Im}\,L\to\mathrm{Ker}\,P\cap D(L)$, 所以

$$K_p:\ \mathrm{Im}\,L\subset C_T\to\mathrm{Ker}\,P\cap D(L)\subset C_T^2,$$

从而 K_p 是一个嵌入算子, 进而 K_p 是全连续的, 又因为 $QN(\overline{\Omega})$有界, 则 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L-紧的, 其中 Ω 为 X 中的任意有界开集.

2 主要结果

假设:

(H_1) 存在常数 $d>0$, 使得

$$g(t,x,y)>|e|_0,\quad\forall(t,x,y)\in[0,T]\times R^2,\quad x>d\text{ 且 }y>d;$$
$$g(t,x,y)<-|e|_0,\quad\forall(t,x,y)\in[0,T]\times R^2,\quad x<-d\text{ 且 }y<-d.$$

(H_2) 存在常数 $r\in[0,+\infty)$, 使得

$$\lim_{|x|\to+\infty}\sup\frac{|F(x)|}{x^{p-1}}\leqslant r,$$

其中 $F(x)=\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$.

(H_3) 存在非负的常数 α,β,σ, 使得

$$g(t,x,y) \leqslant \alpha|x|^{p-1} + \beta|y|^{p-1} + \sigma, \qquad \forall (t,x,y) \in [0,T] \times R^2.$$

定理 1　假设条件(H_1) ~ (H_3)成立, 如果当 $\sum_{i=1}^{n}|c_i| < 1$ 时, $\dfrac{\Delta_1 + \Delta_2}{1 - \sum_{i=1}^{n}|c_i|} < 1$, 则方程(1) 至少存在一个周期解, 其中: $\Delta_1 = \left(\sum_{i=1}^{n}|c_i|r\right)^{1/p}\dfrac{T^{1/q+1}}{\pi_p}$; $\Delta_2 = \left[\left(1 + \sum_{i=1}^{n}|c_i|\right)(\alpha + \beta\delta^{1/q})\right]^{1/p}\left(\dfrac{T}{\pi_p}\right)^2$.

证明: 考虑参数方程 $Lx = \lambda N x$, $\lambda \in (0,1)$. 取 $\Omega_1 = \{x: Lx = \lambda N x, \lambda \in (0,1)\}$, 如果 $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^{\mathrm{T}} \in \Omega_1$, 则

$$\begin{cases} (Ax_1)''(t) = \lambda\varphi_q(x_2(t)), \\ x_2'' = -\lambda f(x_1(t))x_1'(t) - \lambda g(t, x_1(t), x_1(t-\tau(t))) + \lambda e(t). \end{cases} \tag{5}$$

将 $x_2(t) = \varphi_p\left(\dfrac{1}{\lambda}[Ax_1]''(t)\right)$代入式(5)的第二个方程并整理得

$$(\varphi_p((Ax_1)''(t)))'' = -\lambda^p f(x_1(t))x_1'(t) - \lambda^p g(t, x_1(t), x_1(t-\tau(t))) + \lambda^p e(t). \tag{6}$$

首先证明存在 $t_0 \in [0,T]$, 使得

$$|x_1(t_0)| \leqslant d. \tag{7}$$

将方程(6)两端在$[0,T]$上积分, 再根据积分中值定理可知: 存在 $\xi \in [0,T]$, 使得

$$g(\xi, x_1(\xi), x_1(\xi - \tau(\xi))) - e(\xi) = 0.$$

利用条件(H_1)可知: $x_1(\xi) \leqslant d$ 或 $x_1(\xi - \tau(\xi)) \leqslant d$; $x_1(\xi) \geqslant -d$ 或 $x_1(\xi - \tau(\xi)) \geqslant -d$. 存在整数 k 和 $\eta \in [0,T]$, 使得 $\xi - \tau(\xi) = kT + \eta$. 不失一般性, 不妨取 $x_1(\xi) \leqslant d$.

情况 1. 如果 $x_1(\xi) \geqslant -d$, 则 $|x_1(\xi)| \leqslant d$.

情况 2. 如果 $x_1(\eta) \geqslant -d$, 则当 $x_1(\eta) \leqslant d$ 时, 显然有 $|x_1(\eta)| \leqslant d$; 当 $x_1(\eta) > d$ 时, 根据 $x_1(\xi) \leqslant d$及 $x_1(t)$在$[0,T]$上的连续性可知: 必存在 $\bar{\eta} \in [0,T]$, 使得 $x_1(\bar{\eta}) = d$.

综上知式(7)成立.

因为 $x_1(t) = x_1(t_0) + \int_0^t x_1'(s)\,\mathrm{d}s$, 所以

$$|x_1|_0 \leqslant d + \int_0^T |x_1'(s)|\,\mathrm{d}s. \tag{8}$$

另一方面, 将方程(6)乘以$(Ax_1)(t)$, 并在两端同时于$[0,T]$上积分得

$$\begin{aligned} &\int_0^T [(Ax_1)''(t)]^p\,\mathrm{d}t = \int_0^T [\varphi_p((Ax_1)''(t))]''(Ax_1)(t)\,\mathrm{d}t = \\ &\quad -\lambda^p \int_0^T [f(x_1(t))x_1'(t) + g(t, x_1(t), x_1(t-\tau(t))) - e(t)]Ax_1(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \\ &\quad \left|\int_0^T f(x_1(t))x_1'(t)x_1(t)\,\mathrm{d}t\right| + \sum_{i=1}^{n}|c_i| \left|\int_0^T f(x_1(t))x_1'(t)x_1(t-\gamma_i)\,\mathrm{d}t\right| + \\ &\quad \sum_{i=1}^{n}|c_i| \left|\int_0^T g(t, x_1(t), x_1(t-\tau(t)))x_1(t-\gamma_i)\,\mathrm{d}t\right| + \\ &\quad \left|\int_0^T g(t, x_1(t), x_1(t-\tau(t)))x_1(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left(1 + \sum_{i=1}^{n}|c_i|\right)\left|\int_0^T e(t)x_1(t)\,\mathrm{d}t\right|, \end{aligned}$$

其中

$$\left|\int_0^T f(x_1(t))x_1'(t)x_1(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^T f(x_1(t))x_1(t)\,\mathrm{d}x_1(t)\right| = 0. \tag{9}$$

根据条件(H_2)可知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在常数 $\rho > d$, 使得

$$|F(x)| \leqslant (r + \varepsilon)|x|^{p-1}, \qquad |x| > \rho. \tag{10}$$

取 $E_1 = \{t: t \in [0,T], |x_1(t)| > \rho\}$, $E_2 = \{t: t \in [0,T], |x_1(t)| \leqslant \rho\}$, 则

$$\left|\int_0^T f(x_1(t))x_1'(t)x_1(t-\gamma_i)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^T F(x_1(t))x_1'(t-\gamma_i)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant$$

$$\int_0^T |F(x_1(t))x_1'(t-\gamma_i)|\mathrm{d}t =$$
$$\int_{E_1} |F(x_1(t))x_1'(t-\gamma_i)|\mathrm{d}t + \int_{E_2} |F(x_1(t))x_1'(t-\gamma_i)|\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\int_{E_1} |F(x_1(t))x_1'(t-\gamma_i)|\mathrm{d}t + F_\rho\int_{E_2} |x_1'(t-\gamma_i)|\mathrm{d}t,$$

其中 $F_\rho = \max\limits_{|x_1|\leqslant\rho}|F(x_1)|$, $i=1,2,\cdots,n$. 联合式(8)和式(10)及引理3有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T f(x_1(t))x_1'(t)x_1(t-\gamma_i)\mathrm{d}t\right| &\leqslant (r+\varepsilon)\int_0^T |x_1(t)|^{p-1}|x_1'(t-\gamma_i)|\mathrm{d}t + F_\rho\int_0^T |x_1'(t-\gamma_i)|\mathrm{d}t \leqslant \\ &(r+\varepsilon)|x_1|_0^{p-1}\int_0^T |x_1'(t-\gamma_i)|\mathrm{d}t + F_\rho\int_0^T |x_1'(t-\gamma_i)|\mathrm{d}t \leqslant \\ &(r+\varepsilon)\Big[d + \int_0^T |x_1'(t)|\mathrm{d}t\Big]^p + F_\rho\int_0^T |x_1'(t)|\mathrm{d}t \leqslant \\ &(r+\varepsilon)\Big[d + T^{1/q}\frac{T}{\pi_p}\Big(\int_0^T |x_1''(t)|^p\mathrm{d}t\Big)^{1/p}\Big]^p + \\ &F_\rho T^{1/q}\frac{T}{\pi_p}\Big(\int_0^T |x_1''(t)|^p\mathrm{d}t\Big)^{1/p}. \end{aligned}\tag{11}$$

根据条件(H_3)及引理4和引理5得

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T g(t,x_1(t),x_1(t-\tau(t)))x_1(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^T |g(t,x_1(t),x_1(t-\tau(t)))x_1(t)|\mathrm{d}t \leqslant \\ &\int_0^T [\alpha|x_1(t)|^{p-1} + \beta|x_1(t-\tau(t))|^{p-1} + \sigma]|x_1(t)|\mathrm{d}t \leqslant \\ &(\alpha+\beta\delta^{1/q})\Big(\Big(\frac{T}{\pi_p}\Big)^2\Big(\int_0^T |x_1''(t)|^p\mathrm{d}t\Big)^{1/p} + \mathrm{d}T^{1/p}\Big)^p + \\ &\sigma T^{1/q}\Big(\Big(\frac{T}{\pi_p}\Big)^2\Big(\int_0^T |x_1''(t)|^p\mathrm{d}t\Big)^{1/p} + \mathrm{d}T^{1/p}\Big);\end{aligned}\tag{12}$$

通过类似的讨论可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^T g(t,x_1(t),x_1(t-\tau(t)))\sum_{i=1}^n c_i x_1(t-\gamma_i)\mathrm{d}t\right| \leqslant \\ &\sum_{i=1}^n |c_i|(\alpha+\beta\delta^{1/q})\Big(\Big(\frac{T}{\pi_p}\Big)^2\Big(\int_0^T |x_1''(t)|^p\mathrm{d}t\Big)^{1/p} + \mathrm{d}T^{1/p}\Big)^p + \\ &\sum_{i=1}^n |c_i|\sigma T^{1/q}\Big(\Big(\frac{T}{\pi_p}\Big)^2\Big(\int_0^T |x_1''(t)|^p\mathrm{d}t\Big)^{1/p} + \mathrm{d}T^{1/p}\Big);\end{aligned}\tag{13}$$

根据式(9)及式(11)~(13)可知

$$\begin{aligned}\int_0^T [(Ax_1)''(t)]^p\mathrm{d}t &= \int_0^T [\varphi_p((Ax_1)''(t))]''(Ax_1)(t)\mathrm{d}t \leqslant \\ &\sum_{i=1}^n |c_i|(r+\varepsilon)\Big[d + T^{1/q}\frac{T}{\pi_p}\Big(\int_0^T |x_1''(t)|^p\mathrm{d}t\Big)^{1/p}\Big]^p + \\ &\sum_{i=1}^n |c_i|F_\rho T^{1/q}\frac{T}{\pi_p}\Big(\int_0^T |x_1''(t)|^p\mathrm{d}t\Big)^{1/p} + \\ &\Big[1+\sum_{i=1}^n |c_i|\Big](\alpha+\beta\delta^{1/q})\Big(\Big(\frac{T}{\pi_p}\Big)^2\Big(\int_0^T |x_1''(t)|^p\mathrm{d}t\Big)^{1/p} + \mathrm{d}T^{1/p}\Big)^p + \\ &\Big[1+\sum_{i=1}^n |c_i|\Big]\sigma T^{1/q}\Big(\Big(\frac{T}{\pi_p}\Big)^2\Big(\int_0^T |x_1''(t)|^p\mathrm{d}t\Big)^{1/p} + \mathrm{d}T^{1/p}\Big);\end{aligned}$$

利用引理1有

$$\int_0^T |x_1''(t)|^p \mathrm{d}t = \int_0^T |(A^{-1}Ax_1'')(t)|^p \mathrm{d}t \leqslant \frac{\int_0^T |(A^{-1}Ax_1'')(t)|^p \mathrm{d}t}{\left(1 - \sum_{i=1}^n |c_i|\right)^p}.$$

因为 $\dfrac{\Delta_1 + \Delta_2}{|c_k| - 1 - \sum_{i \neq k} |c_i|} < 1$, 所以, 由式(10)定义的 ε 满足

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n |c_i|(r+\varepsilon)\right)^{1/p}(T^{1+1/q}/\pi_p) + \Delta_2}{1 - \sum_{i=1}^n |c_i|} < 1.$$

从而必存在 $M_0 > 0$, 使得 $\left(\int_0^T |x_1''(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \leqslant M_0$. 又因为 $x_1(0) = x_1(T)$, 根据中值定理知: $\exists \xi_1 \in [0,T]$, 使得 $x_1'(\xi_1) = 0$, 所以

$$|x_1'|_0 \leqslant T^{1/q} \| x_1 \| \leqslant T^{1/q} M_0 := M_1. \tag{14}$$

再根据式(8)可得

$$|x_1|_0 \leqslant d + \int_0^T |x_1'(s)| \mathrm{d}s \leqslant d + T|x_1'|_0 \leqslant d + TM_1 := M_2. \tag{15}$$

另一方面, 对式(5)的第一个方程两端在$[0,T]$上积分 $\int_0^T |x_2(t)|^{q-2} x_2(t) \mathrm{d}t = 0$, 则必存在常数 $\xi_2 \in [0,T]$, 使得 $x_2(\xi_2) = 0$, 所以

$$|x_2|_0 \leqslant \int_0^T |x_2'(t)| \mathrm{d}t \leqslant T^{1/2} \left(\int_0^T |x_2'(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}. \tag{16}$$

根据式(5)的第二个式子有

$$\begin{aligned} \int_0^T |x_2'(t)|^2 \mathrm{d}t &= -\int_0^T x_2''(t) x_2(t) \mathrm{d}t = \\ &\lambda \int_0^T [f(x_1(t))x_1'(t) + g(t, x_1(t), x_1(t-\tau(t))) - e(t)] x_2(t) \mathrm{d}t \leqslant \\ &\int_0^T [f_m M_1 + |g_m| + |e|_0] |x_2(t)| \mathrm{d}t \leqslant [f_m M_1 + |g_m| + |e|_0] T |x_2|_0 \leqslant \\ &[f_m M_1 + |g_m| + |e|_0] T^{3/2} \left(\int_0^T |x_2'(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{17}$$

其中: $g_m = \max\limits_{x,y \in [-M_2, M_2]} |g(t,x,y)|$; $f_m = \max\limits_{x \in [-M_2, M_2]} |f(x)|$; $|e|_0 = \max\limits_{t \in [0,T]} |e(t)|$. 根据式(16)有

$$\left(\int_0^T |x_2'(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant [f_m M_1 + |g_m| + |e|_0] T^{3/2},$$

结合式(17)可得

$$|x_2|_0 \leqslant [f_m M_1 + |g_m| + |e|_0] T^2 := M_3.$$

因为 $x_2(0) = x_2(T)$, 所以必存在 $\xi_3 \in [0,T]$, 使得 $x_2'(\xi_3) = 0$, 于是

$$\begin{aligned} |x_2'|_0 &\leqslant \left| \int_0^T x_2''(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^T [f(x_1(t))x_1'(t) + g(t, x_1(t), x_1(t-\tau(t))) - e(t)] \mathrm{d}t \leqslant \\ &[g_m + |e|_0] T := M_4. \end{aligned}$$

取 $\bar{M}_1 = \max\{M_1, M_2\}$, $\bar{M}_2 = \max\{M_3, M_4\}$, 则当 $\boldsymbol{x} \in \Omega_1$ 时, $\| x_1 \| \leqslant \bar{M}_1$, $\| x_2 \| \leqslant \bar{M}_2$. 定义 $\Omega_2 = \{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} L,\ QN\boldsymbol{x} = 0\}$. 如果 $\boldsymbol{x} \in \Omega_2$, 则向量 $\boldsymbol{x} \in R^2$ 满足

$$\begin{cases} |x_2|^{q-2} x_2 = 0, \\ \dfrac{1}{T} \int_0^T [g(t, x_1, x_1) - e(t)] \mathrm{d}t = 0, \end{cases}$$

因此 $x_2 = 0$, 根据条件(H_1)可知 $\| \boldsymbol{x} \| = |\boldsymbol{x}|_0 \leqslant D$, 从而 $\Omega_2 \subset \Omega_1$.

取 $\Omega=\{\boldsymbol{x}:(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in X,\ \|x_1\|<\overline{M}_1+1,\ \|x_2\|<\overline{M}_2+1\}$，则 $\Omega\supset(\Omega_1\cup\Omega_2)$，显然 Ω 满足引理6的条件1)和2)．下证 Ω 满足引理6的条件3)．不妨取

$$H(\mu,\boldsymbol{x})=\mu x_1+(1-\mu)JQN(\boldsymbol{x}),\qquad \forall(\mu,\boldsymbol{x})\in[0,1]\times\Omega,$$

其中 J: $\operatorname{Im} Q\to\operatorname{Ker} L$，$J(x_1,x_2)=(-x_2\varphi(t),Ax_1)^{\mathrm{T}}$．对 $\forall(\mu,\boldsymbol{x})\in[0,1]\times(\partial\Omega\cap\operatorname{Ker} L)$，有

$$H(\mu,\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\mu\boldsymbol{x}+\dfrac{(1-\mu)}{T}\displaystyle\int_0^T[g(t,x_1,x_1)-e(t)]\mathrm{d}t\varphi(t)\\ \mu x_2+(1-\mu)|x_2|^{q-2}x_2\end{pmatrix},$$

由条件(H_1)显然有 $H(\mu,\boldsymbol{x})\neq0$，$\forall(\mu,\boldsymbol{x})\in[0,1]\times(\partial\Omega\cap\operatorname{Ker} L)$，则

$$\deg(JQN,\Omega\cap\operatorname{Ker} L,0)=\deg(H(0,\boldsymbol{x}),\Omega\cap\operatorname{Ker} L,0)=\deg(H(1,\boldsymbol{x}),\Omega\cap\operatorname{Ker} L,0)\neq0.$$

因此，根据引理6可知：方程 $L\boldsymbol{x}=N\boldsymbol{x}$ 在 $\overline{\Omega}$ 上至少有一个周期解 $\boldsymbol{x}^*(t)=(x_1^*(t),x_2^*(t))^{\mathrm{T}}$，即方程(1)至少有一个 T-周期解 $x_1^*(t)$，并且 $\|x_1^*\|\leqslant\overline{M}_1+1$.

定理2 假设条件(H_1)~(H_3)成立，并存在整数 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得当 $|c_k|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|c_i|\}>0$，$\dfrac{1}{|c_k|}+\sum\limits_{i\neq k}\left|\dfrac{c_i}{c_k}\right|<1$ 时，若 $\dfrac{\Delta_1+\Delta_2}{|c_k|-1-\sum\limits_{i\neq k}|c_i|}<1$，则方程(1)至少存在一个周期解，其中：$\Delta_1=\Big(\sum\limits_{i=1}^n|c_i|r\Big)^{1/p}\dfrac{T^{1/q+1}}{\pi_p}$；$\Delta_2=\Big[\Big(1+\sum\limits_{i=1}^n|c_i|\Big)(\alpha+\beta\delta^{1/q})\Big]^{1/p}\Big(\dfrac{T}{\pi_p}\Big)^2$.

参 考 文 献

[1] Hale J K, Mawhin J. Coincidence Degree and Periodic Solutions of Neutral Equations [J]. J Differential Equations, 1975, 15(2): 295-307.

[2] Bartsch T H, Mawhin J. The Leray-Schauder Degree of S^1-Equivariant Operators Associated to Autonomous Neutral Equations in Spaces of Periodic Functions [J]. J Differential Equations, 1991, 92(1): 90-99.

[3] ZHANG Mei-rong. Periodic Solutions of Linear and Quasilinear Neutral Functional Differential Equations [J]. J Math Anal Appl, 1985, 189(2): 378-392.

[4] LU Shi-ping, GE Wei-gao. On the Existence of Periodic Solutions for Neutral Functional Differential Equation [J]. Nonlinear Anal TMA, 2003, 54(7): 1285-1306.

[5] LU Shi-ping, GE Wei-gao. Periodic Solutions for a Kind of Second Order Differential Equations with Multiple Deviating Arguments [J]. Appl Math Comput, 2003, 146(1): 195-209.

[6] LU Shi-ping. Existence of Periodic Solutions for a p-Laplacian Neutral Functional Differential Equation [J]. Nonlinear Anal: TMA, 2009, 70(1): 231-243.

[7] ZHU Yan-ling, LU Shi-ping. Periodic Solutions for p-Laplacian Neutral Functional Differential Equation with Multiple Deviating Argument [J]. J Math Anal Appl, 2007, 336(2): 1357-1367.

[8] LIU Bing-wen, HUANG Li-hong. Existence and Uniqueness of Periodic Solutions for a Kind of Second Order Neutral Functional Differential Equations [J]. Nonlinear Anal: RWA, 2007, 8(1): 222-229.

[9] LU Shi-ping, JIN Shan. Existence of Periodic Solutions for a Fourth-Order p-Laplacian Equation with a Deviating Argument [J]. J Computational Appl Math, 2009, 230(2): 513-520.

[10] JIN Shan, LU Shi-ping. Periodic Solutions for a Fourth-Order p-Laplacian Differential Equation with a Deviating Argument [J]. Nonlinear Anal: TMA, 2008, 69(5/6): 1710-1718.

[11] BAI Zhan-bing. Existence and Multiplicity of Positive for a Fourth Order p-Laplacian Equation [J]. Appl Math Mech, 2001, 22(12): 1476-1480.

[12] Pao C V. On Fourth-Order Elliptic Boundary Value Problems [J]. Proc Amer Math Sci, 2000, 128(4): 1023-1030.

[13] BAI Zhan-bing, HUANG Bing-jia, GE Wei-gao. The Iterative Solutions for Some Fourth Order p-Laplace Equation Boundary Value Problems [J]. Appl Math Lett, 2006, 19(1): 8-14.

[14] Gupta C P. A Dirichlet Type Multi-point Boundary Value Problem for Second Order Ordinary Differential Equations [J]. Nonlinear Anal: TMA, 1996, 26(5): 925-931.