第 50 卷 第 2 期 吉林大学学报(理学版) Vol. 50 No. 2
2012 年 3 月 Journal of Jilin University (Science Edition) Mar 2012

奇异非线性椭圆型方程组边值问题正解的存在唯一性

文香丹[1], 苑成军[2], 范 鹰[2]
(1. 延边大学 理学院 数学系, 吉林 延吉 133002; 2. 哈尔滨学院 理学院 数学系, 哈尔滨 150086)

摘要: 利用锥上混合单调算子不动点定理研究一类非线性椭圆型方程组的 Dirichlet 边值问题, 在非线性项为混合单调的条件下, 得到了该非线性椭圆型方程组正解的存在唯一性.

关键词: Dirichlet 边值问题; 椭圆型方程组; 正解; 存在性; 唯一性
中图分类号: O175.08 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2012)02-0232-05

Existence and Uniqueness of Positive Solutions for Singular Nonlinear Boundary Value Problems of Elliptic Systems

WEN Xiang-dan[1], YUAN Cheng-jun[2], FAN Ying[2]
(1. *Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji* 133002, *Jilin Province, China*;
2. *Department of Mathematics, College of Science, Harbin University, Harbin* 150086, *China*)

Abstract: Using mixed monotone fixed point theorem in the cone theory, we studied Dirichlet boundary value problems of nonlinear elliptic systems with singularity, obtaining the existence and the uniqueness of positive solutions for nonlinear elliptic systems, under conditions of the nonlinear terms being mixed monotone.

Key words: Dirichlet boundary value problem; elliptic systems; positive solutions; existence; uniqueness

0 引 言

令 Ω 是 R^N 上具有光滑边界的有界域, 即其边界 $\partial\Omega$ 是 R^1 的. 考虑如下椭圆方程组的边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = f_1(x,u,v), & 在\ \Omega\ 内, \\ -\Delta v = f_2(x,u,v), & 在\ \Omega\ 内, \\ u > 0,\quad v > 0, & 在\ \Omega\ 内, \\ u = v = 0, & 在\ \partial\Omega\ 上, \end{cases} \tag{1}$$

其中非线性函数 $f_i(x,u,v)$ 关于自变量 x 在 Ω 上是 Hölder 连续的, 且关于变量 u,v 在 $(0,+\infty)$ 内是连续的, 允许 f 在 $u=0$, $v=0$ 处奇异.

本文约定 $R^+=(0,+\infty)$, $W^{k,l}(\Omega)$ 表示 Sobolev 空间[1], 其中: $l>1$; k 为非负整数. 用 λ_1 和 φ_1 分别表示特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi, & x \in \Omega, \\ \varphi = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期: 2011-07-13.
作者简介: 文香丹(1965—), 女, 朝鲜族, 硕士, 教授, 从事随机微分方程的研究, E-mail: wxdpaper@163.com.
基金项目: 黑龙江省自然科学基金(批准号: A201012)和黑龙江省教育厅科学技术研究项目(批准号: 11553067).

的第一特征值及其对应的第一特征函数. 为方便，假设 φ_1 已被标准化，即 $0\leqslant\varphi_1\leqslant 1$ 且 $\|\varphi_1\|_{C(\bar{\Omega})}=1$.

目前，关于奇异椭圆方程边值问题正解的存在性和唯一性研究已有许多结果[2-7]. 文献[8]研究了 Dirichlet 边值问题：

$$\begin{cases}-\Delta u = \eta(x)u^{-\gamma}, & \gamma > 0, \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ u|_{\partial\Omega} = 0, & \eta(x) > 0, \text{在 } \Omega \text{ 内}.\end{cases} \tag{3}$$

文献[9]研究了如下更一般形式的奇异椭圆方程边值问题：

$$\begin{cases}-\Delta u = \eta(x)f(u), & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ u|_{\partial\Omega} = 0, & \eta(x) > 0, \text{在 } \Omega \text{ 内},\end{cases} \tag{4}$$

其中 $f(s)$ 当 $s=0$ 时是奇异的，对所有的 $s>0$，都有 $f'(s)\leqslant 0$，即在 $(0,+\infty)$ 上 $f(s)$ 是单调不增的，得到了其正解的存在性和唯一性. 文献[10-11]利用上下解方法研究了比方程(4)更一般的奇异椭圆方程边值问题. 本文在假设方程非线性函数 f 是混合单调的情况下，研究更一般的奇异椭圆方程组(1)正解的存在唯一性.

关于非线性函数 $f_i(x,u,v)\,(i=1,2)$，假设条件如下：

(H_1) $f_i(x,u,v)=f_i(x,u,v,u,v)$，且 $f_i(x,u,v,\hat{u},\hat{v})$ 在 $\Omega\times R^+\times R^+\times R^+\times R^+$ 上是非负的；

(H_2) 关于 Hölder 指数 $\gamma\in(0,1)$，对每个 $u,v,\hat{u},\hat{v}\in R^+$，$f_i(x,u,v,\hat{u},\hat{v})$ 关于 x 是 Hölder 连续的，且对每个 $x\in\Omega$，$f_i(x,u,v,\hat{u},\hat{v})$ 关于 $u,v,\hat{u},\hat{v}\in R^+$ 是连续的；

(H_3) 对每个 x 和 $(\hat{u},\hat{v})$，$f_i(x,u,v,\hat{u},\hat{v})$ 关于 (u,v) 单调不降，对每个 x 和 (u,v)，$f_i(x,u,v,\hat{u},\hat{v})$ 关于 $(\hat{u},\hat{v})$ 单调不增，并且存在一个常数 $\delta\in[0,1)$，使得

$$f_i(x,\theta u,\theta v,\theta^{-1}\hat{u},\theta^{-1}\hat{v}) \geqslant \theta^{\delta}f_i(x,u,v,\hat{u},\hat{v}), \quad u,v,\hat{u},\hat{v}\in R^+, \quad \theta\in(0,1]; \tag{5}$$

(H_4) $f_i(x,u,v,x,y)$ 满足可积性，即

$$\int_{\Omega}[f_i(x,\varphi_1(x),\varphi_1(x),\varphi_1(x),\varphi_1(x))]^l\mathrm{d}t < +\infty, \qquad l > N. \tag{6}$$

注 1　$f_i(x,u,v,\hat{u},\hat{v})$ 的一个典型形式是

$$f_i(x,u,v,\hat{u},\hat{v}) = \alpha_i(x)[p_i(u,v) + q_i(\hat{u},\hat{v})], \tag{7}$$

其中 p_i：$[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 单调不降；q_i：$(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 单调不增；$\alpha_i(x)\geqslant 0$，$\alpha_i(x)\in C^{\gamma}(\bar{\Omega})$ 且 $\gamma\in(0,1)$. 进一步，q_i 满足相应的可积条件：

$$\int_{\Omega}[q_i(\varphi_1(x),\varphi_1(x))]^l\mathrm{d}t < +\infty. \tag{8}$$

1　预备知识

令 P 是 Banach 空间 E 的一个正规锥，并且 $e\in P$，$\|e\|\leqslant 1$，$e\neq\theta$，定义

$$Q_e = \{y\in P \mid y\neq\theta, \text{存在常数 } m,M, \text{使得 } me\leqslant y\leqslant Me\}.$$

定义 1[12]　假设 A：$Q_e\times Q_e\to Q_e$，如果 A 对于 x 是递增的，对于 y 是递减的，即对任何 $y\in Q_e$，如果 $x_1\leqslant x_2\,(x_1,x_2\in Q_e)$，则 $A(x_1,y)\leqslant A(x_2,y)$；对任何 $x\in Q_e$，如果 $y_1\leqslant y_2\,(y_1,y_2\in Q_e)$，则 $A(x,y_1)\geqslant A(x,y_2)$，则称 A 是混合单调算子；如果 $A(y^*,y^*)=y^*$，则称 y^* 是 A 的一个不动点.

引理 1[13]　假设 A：$Q_e\times Q_e\to Q_e$ 是奇异混合单调算子，并且存在一个常数 $\alpha\in(0,1)$，使得

$$A(tx,y/t) \geqslant t^{\alpha}A(x,y), \quad \forall x,y\in Q_e, \quad t\in(0,1)$$

成立，则 A 存在唯一不动点 $x^*\in Q_e$；此外，对 $\forall(x_0,y_0)\in Q_e\times Q_e$，都有 $x_n=A(x_{n-1},y_{n-1})$ 和 $y_n=A(y_{n-1},x_{n-1})$ 满足 $x_n\to x^*$，$y_n\to x^*$，其中：$\|x_n-x^*\|=o(1-r^{\alpha^n})$；$\|y_n-x^*\|=o(1-r^{\alpha^n})$；$r\in(0,1)$ 是一个与 (x_0,y_0) 有关的常数.

引理 2[14]　令 Ω 是 R^N 具有光滑 C^1 边界 $\partial\Omega$ 的有界区域. 如果 $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，且 $f(x,\varphi_1(u),\varphi_1(u),\varphi_1(u),\varphi_1(u))\in L^l(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases}-\Delta u + ku \geqslant 0, & x\in\Omega,\\ u\geqslant 0, & x\in\Omega,\end{cases} \tag{9}$$

则 $u=0$ 或 $u(x)\geqslant C_0\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)(x\in\Omega)$, 其中 C_0 为仅依赖于 N,Ω 和 k 的正常数.

引理3 令 Ω 是 R^N 具有光滑 C^1 边界 $\partial\Omega$ 的有界区域. 如果 $u\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 满足:

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x), & \text{在 }\Omega\text{ 内},\\ u>0, & \text{在 }\Omega\text{ 内},\\ u=0, & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\end{cases}\tag{10}$$

其中 $h(x)\in L^l(\Omega)(l>N)$ 为非负的, 则方程(10)有一个强解 $\Phi\in W^{2,l}(\Omega)\cap W_0^{2,l}(\Omega)$, 且存在常数 c_Φ 和 C_Φ, 使得 $c_\Phi\varphi_1(x)\leqslant\Phi(x)\leqslant C_\Phi\varphi_1(x)(x\in\overline{\Omega})$, 这里 C_Φ,c_Φ 是仅依赖于 N 和 Ω 的正常数.

证明: 对任意的 $x\in\Omega$, $h(x)\in L^l(\Omega)$. 根据线性椭圆方程的经典理论[15]知, 方程(10)有一个强解 $\Phi\in W^{2,l}(\Omega)\cap W_0^{2,l}(\Omega)$. 对 $l>N$, 应用 Sobolev 嵌入理论, 有 $\Phi\in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta=1-N/l$. 显然, $\Phi(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是 Lipschitz 连续的, 因此 $|\Phi(x)-\Phi(y)|\leqslant C_1|x-y|(\forall y\in\partial\Omega)$.

因为在 $\partial\Omega$ 上, $\Phi=0$, 故有 $|\Phi(x)|\leqslant C_1\inf\limits_{y\in\partial\Omega}|x-y|=C_1\operatorname{dist}(y,\partial\Omega)$. 另一方面, 存在两个常数 C_2 和 C_3[7], 使得第一特征函数满足

$$0<C_2\leqslant\varphi_1(x)[\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)]^{-1}\leqslant C_3,\qquad x\in\Omega.\tag{11}$$

因此, 在 $\overline{\Omega}$ 上, 可以得到 $|\Phi(x)|\leqslant(C_1/C_2)\varphi_1(x)=M_1\varphi_1(x)$. 注意 C_1,C_2 和 C_3 仅与 N 和 Ω 有关.

由式(11), 存在常数 C_Φ, 使得

$$\Phi(x)\leqslant C_\Phi\varphi_1(x),\qquad x\in\overline{\Omega}.\tag{12}$$

注意到 $f(x,\varphi_1(x),\varphi_1(x),\varphi_1(x),\varphi_1(x))\geqslant 0$. 应用最大值原理知, $\Phi\geqslant 0$. 因为在 Ω 上 $\Phi>0$, 从而应用引理2可得

$$\Phi(x)\geqslant C_0\operatorname{dist}(x,\partial\Omega),\qquad x\in\overline{\Omega}.\tag{13}$$

联合式(11),(13)可知, 存在正常数 c_Φ, 使得

$$\Phi(x)\geqslant c_\Phi\varphi_1(x),\qquad x\in\overline{\Omega}.\tag{14}$$

2 存在唯一性

定理1 如果非性项 $f_1(x,u,v)$ 和 $f_2(x,u,v)$ 满足假设条件 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_4)$, 则方程(1)有唯一解 (u^*,v^*), $u^*,v^*\in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta=1-N/l$.

证明: 定义

$$Q_{\varphi_1}=\{w\in C(\overline{\Omega})\,|\,M^{-1}\varphi_1(x)\leqslant w(x)\leqslant M\varphi_1(x),\ x\in\overline{\Omega}\},\tag{15}$$

其中 $M>1$.

对任意固定的 $u,v,\hat{u},\hat{v}\in Q_{\varphi_1}$, 考虑如下线性椭圆方程组的边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta w_i = f_i(x,u,v,\hat{u},\hat{v}), & \text{在 }\Omega\text{ 内},\quad i=1,2,\\ w_i>0, & \text{在 }\Omega\text{ 内},\\ w_i=0, & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上}.\end{cases}\tag{16}$$

根据条件 (H_3), 有

$$\begin{aligned} f_i(x,u(x),v(x),\hat{u}(x),\hat{v}(x))&\leqslant f_i(x,M\varphi_1(x),M\varphi_1(x),M^{-1}\varphi_1(x),M^{-1}\varphi_1(x))\leqslant\\ &\qquad M^\delta f_i(x,\varphi_1(x),\varphi_1(x),\varphi_1(x),\varphi_1(x)),\\ f_i(x,u(x),v(x),\hat{u}(x),\hat{v}(x))&\geqslant f_i(x,M^{-1}\varphi_1(x),M^{-1}\varphi_1(x),M\varphi_1(t),M\varphi_1(x))\geqslant\\ &\qquad M^{-\delta}f_i(x,\varphi_1(x),\varphi_1(x),\varphi_1(x),\varphi_1(t)).\end{aligned}\tag{17}$$

对任意的 $x\in\Omega$, 应用可积条件(6), 有 $\int_\Omega[f_i(x,u(x),v(x),\hat{u}(x),\hat{v}(x))]^l\mathrm{d}t<+\infty$, 即 $f_i(x,u,v,\hat{u},\hat{v})\in L^l(\Omega)$. 由线性椭圆方程的经典理论可知, 方程(16)有唯一强解 $w_i(u,v,\hat{u},\hat{v})\in W^{2,l}(\Omega)\cap W_0^{2,l}(\Omega)$. 对 $l>N$, 应用 Sobolev 嵌入定理, 有 $w_i(u,v,\hat{u},\hat{v})\in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta=1-N/l$.

令 Φ_i 是方程(16)当 $u(x)=v(x)=\hat{u}(x)=\hat{v}(x)=\varphi_1(x)$ 时的解, 则 $\Phi_i\in C^{1,\beta}(\Omega)$. 由不等式(17),

并应用比较原理, 得

$$M^{-1}\Phi_i(x) \leqslant w_i(u,v,\hat{u},\hat{v})(x) \leqslant M\Phi_i(x), \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{18}$$

下面验证 $w_i(u,v,\hat{u},\hat{v}) \in Q_{\varphi_1}$. 根据引理 1, 存在正常数 c_Φ 和 C_Φ, 使得

$$c_{\Phi_i}\varphi_1(x) \leqslant \Phi_i(x) \leqslant C_{\Phi_i}\varphi_1(x), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{19}$$

再结合式(18),(19)和(13), 有

$$M^{-\delta}c_{\Phi_i}\varphi_1(x) \leqslant w_i(u,v,\hat{u},\hat{v})(x) \leqslant M^{\delta}C_{\Phi_i}\varphi_1(x) \tag{20}$$

对任意的 $x \in \overline{\Omega}$ 成立.

如果取 $M>1$, 使得 $M \geqslant \max\{(C_{\Phi_i})^{1/(1-\delta)},(c_{\Phi_i})^{-1/(1-\delta)};\ i=1,2\}$, 则 M 不依赖于 u,v 和 $\hat{u},\hat{v}$ 的选择, 且对任意的 $u,v,\hat{u},\hat{v} \in Q_{\varphi_1}$, 都有 $w_i(u,v,\hat{u},\hat{v}) \in Q_{\varphi_1}$ 成立.

令 $Q = Q_{\varphi_1} \times Q_{\varphi_1}$. 定义算子 T: $Q \times Q \to Q$ 如下:

$$\begin{cases} T((u,v),(\hat{u},\hat{v}))(x) = (A_1(u,v;\hat{u},\hat{v})(x), A_2(u,v;\hat{u},\hat{v})(t)) = \\ \qquad (w_1(u,v;\hat{u},\hat{v})(x), w_2(u,v;\hat{u},\hat{v})(x)), \\ A_i: Q \times Q \to Q_{\varphi_1}, \quad A_i(u,v;\hat{u},\hat{v})(x) = w_i(u,v;\hat{u},\hat{v})(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{21}$$

其中$(u,v),(\hat{u},\hat{v}) \in Q$. 根据上述讨论可知, 算子 T 的定义合理.

下面证明 T 是混合单调的. 先说明 $A_i(i=1,2)$ 是混合单调的. 如果$(u_k,v_k),(\hat{u}_k,\hat{v}_k) \in Q_{\varphi_1}$ $(k=1,2)$, 则对任意的 $x \in \Omega$, 有

$$(u_1(x),v_1(x)) \geqslant (u_2(x),v_2(x)), \qquad (\hat{u}_1(x),\hat{v}_1(x)) \leqslant (\hat{u}_2(x),\hat{v}_2(x)),$$

因此,

$$\begin{cases} -\Delta(A_i(u_1,v_1,\hat{u}_1,\hat{v}_1) - A_i(u_2,v_2,\hat{u}_2,\hat{v}_2))(x) = f_i(x,u_1,v_1,\hat{u}_1,\hat{v}_1) - \\ \qquad f_i(x,u_2,v_2,\hat{u}_2,\hat{v}_2), & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ A_i(u_1,v_1,\hat{u}_1,\hat{v}_1)(x) - A_i(u_2,v_2,\hat{u}_2,\hat{v}_2)(x) = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases} \tag{22}$$

根据条件(H_3), 有 $f_i(x,u_1,v_1,\hat{u}_1,\hat{v}_1) \geqslant f_i(x,u_2,v_2,\hat{u}_2,\hat{v}_2)$, 应用比较原理, 可断言 $A_i(u_1,v_1,\hat{u}_1,\hat{v}_1) \geqslant A_i(u_2,v_2,\hat{u}_2,\hat{v}_2)$, 即 A_i 是一个混合单调算子.

下面对任意的 $u,v,\hat{u},\hat{v} \in Q_{\varphi_1}$ 和 $0<\theta<1$, 证明

$$A_i(\theta u,\theta v,\theta^{-1}\hat{u},\theta^{-1}\hat{v}) \geqslant \theta^{\delta}A_i(u,v,\hat{u},\hat{v}). \tag{23}$$

注意到

$$\begin{cases} -\Delta A_i(\theta u,\theta v,\theta^{-1}\hat{u},\theta^{-1}\hat{v})(x) = f_i(x,\theta u,\theta v,\theta^{-1}\hat{u},\theta^{-1}\hat{v}), & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ A_i(\theta u,\theta v,\theta^{-1}\hat{u},\theta^{-1}\hat{v})(x) = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta\, \theta^{\delta}A_i(u,v,\hat{u},\hat{v})(x) = \theta^{\delta}f_i(x,u,v,\hat{u},\hat{v}), & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \theta^{\delta}A_i(u,v,\hat{u},\hat{v})(x) = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases}$$

根据条件(5), 有

$$f_i(x,\theta u,\theta v,\theta^{-1}\hat{u},\theta^{-1}\hat{v}) - \theta^{\delta}f_i(x,u,v,\hat{u},\hat{v}) \geqslant 0.$$

因此,

$$\begin{cases} -\Delta(A_i(\theta u,\theta v,\theta^{-1}\hat{u},\theta^{-1}\hat{v}) - \theta^{\delta}A_i(u,v,\hat{u},\hat{v})) \geqslant 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ A_i(\theta u,\theta v,\theta^{-1}\hat{u},\theta^{-1}\hat{v}) - \theta^{\delta}A_i(u,v,\hat{u},\hat{v}) = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases}$$

使用比较原理, 立即可得不等式(23). 结合上述讨论, 可以断言算子 A_i 是从 $Q \times Q$ 到 Q_{φ_1} 的混合单调算子, 并且满足方程(22).

综合上面的讨论和式(21), 有

$$T((u_1,v_1),(\hat{u}_1,\hat{v}_1)) = (A_1(u_1,v_1,\hat{u}_1,\hat{v}_1), A_2(u_1,v_1,\hat{u}_1,\hat{v}_1)) \geqslant$$
$$(A_1(u_2,v_2,\hat{u}_2,\hat{v}_2), A_2(u_2,v_2,\hat{u}_2,\hat{v}_2)) = T(u_2,v_2,\hat{u}_2,\hat{v}_2);$$

$$\begin{cases} -\Delta(T(\theta(u,v),\theta^{-1}(\hat{u},\hat{v})) - \theta^{\delta}T((u,v),(\hat{u},\hat{v}))) \geqslant 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ T(\theta(u,v),\theta^{-1}(\hat{u},\hat{v})) - \theta^{\delta}T((u,v),(\hat{u},\hat{v})) = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases}$$

所以算子 T 是从 $Q\times Q$ 到 Q 的混合单调算子.

利用引理1, 算子 T 有唯一的不动点 $(u^*,v^*)\in Q$, 即 $T((u^*,v^*),(u^*,v^*))=(u^*,v^*)$. 表明方程(16)有唯一的正解 $u^*,v^*\in Q_{\varphi_1}$. 根据线性椭圆方程的理论, 对固定 $u=\hat{u}=u^*$ 和 $v=\hat{v}=v^*$, 方程(16)有唯一的解 $\bar{u}^*,\bar{v}^*\in W^{2,l}(\Omega)\cap W_0^{1,l}(\Omega)$, 因此 $\bar{u}^*,\bar{v}^*\in C^{1,\beta}(\Omega)$. 对于方程(1)的唯一正解, 易得 $u^*=\bar{u}^*$, $v^*=\bar{v}^*$. 所以方程(1)有唯一的经典正解 (u^*,v^*), 且 $u^*,v^*\in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$.

例1 考虑如下奇异椭圆方程边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u=\sigma_1(u+v)^{p_1}+\rho_1(u+v)^{-q_1}, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ -\Delta v=\sigma_2(u+v)^{p_2}+\rho_2(u+v)^{-q_2}, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ u>0,\quad v>0, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ u=v=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{24}$$

其中 σ_i,ρ_i,p_i 和 q_i 是正常数, 且 $p_i,q_i\in(0,1)$, $i=1,2$.

条件(H_1)和(H_2)显然成立. 由 $p_i,q_i\in(0,1)$, 可以验证条件(H_3)成立. 当 $0<r<1$ 时, $\int_\Omega \varphi_1^{-r}(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$ 成立. 显然, 如果取 $0<q_i<1/N$ $(i=1,2)$, 则对任意的 $l>N$, 积分 $\int_\Omega[\varphi_1^{-q_i}(x)]^l\,\mathrm{d}x<+\infty$ 成立, 即条件(H_4)被满足. 因此, 由定理1可知方程(24)有唯一的正古典解.

参 考 文 献

[1] Adams R A. Sobolev Spaces [M]. New York: Academic Press, 1975.

[2] Gomes S M. On a Singular Nonlinear Elliptic Problem [J]. SIAM J Math Anal, 1986, 17(6): 1359-1369.

[3] Dalmasso R. Solutions D'équations Elliptiques Semi-linéaires Singulières [J]. Ann Mat Pura Appl, 1988, 153: 191-201.

[4] Lazer A C, Mckenna P J. On a Singular Nonlinear Elliptic Boundary-Value Problem [J]. Proc Amer Math Soc, 1991, 111(3): 721-730.

[5] SHI Jun-ping, YAO Miao-xin. On a Singular Nonlinear Semilinear Elliptic Problem [J]. Proc Roy Soc Edinburgh: Ser A, 1998, 128: 1389-1401.

[6] Usami H. On a Singular Elliptic Boundary Value Problem in a Ball [J]. Nonlinear Anal: Theory, Methods & Application, 1989, 13(10): 1163-1170.

[7] Wiegner M. A Degenerate Diffusion Equation with a Nonlinear Source Term [J]. Nonlinear Anal: Theory, Methods & Application, 1997, 28(12): 1977-1995.

[8] Crandall M G, Rabinowitz P H, Tartar L. On a Dirichlet Problem with a Singular Nonlinearity [J]. Comm Partial Differential Equations, 1977, 2(2): 193-222.

[9] Lair A V, Shaker A W. Classical and Weak Solutions of a Singular Semilinear Elliptic Problem [J]. J Math Anal Appl, 1997, 211(2): 371-385.

[10] Hern'andez J, Kar'atson J, Simon P L. Multiplicity for Semilinear Elliptic Equations Involving Singular Nonlinearity [J]. Nonlinear Anal: Theory, Methods & Application, 2006, 65(2): 265-283.

[11] Hern'andez J, Mancebo F, Vega J M. Positive Solutions for Singular Nonlinear Elliptic Equations [J]. Proc Roy Soc Edinburgh: Ser A, 2007, 137: 41-62.

[12] 郭大均. 非线性分析中的序方法 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2000.

[13] LEI Pei-dong, LIN Xiao-ning, JIANG Da-qing. Existence and Uniqueness of Positive Solutions for Singular Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems [J]. Nonlinear Anal: Theory, Methods & Application, 2008, 69(9): 2773-2779.

[14] Brezis H, Nirenberg L. Minima Locaux Relatifs a C_1 et H_1 [J]. Comptes Rendus Acad Sci Paris, 1993, 317: 465-472.

[15] Ladyzhenskaya O A, Ural'ceva N N. Linear and Quasilinear Elliptic Equations [M]. New York: Academic Press, 1968.

(责任编辑: 赵立芹)