第50卷 第2期 吉林大学学报(理学版) Vol.50 No.2
2012年3月 Journal of Jilin University (Science Edition) Mar 2012

带有磁势和临界增长的薛定谔方程解的存在性

张慧星, 刘文斌
(中国矿业大学 理学院, 江苏 徐州 221116)

摘要: 用变分法中的山路定理研究带磁势和临界增长项的非线性薛定谔方程

$$-(\varepsilon\nabla + \mathrm{i}\boldsymbol{A}(x))^2u + V(x)u = f(|u|^2)u + K(x)|u|^{2^*-2}u, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

得到了极小能量解 u_ε 的存在性.

关键词: 非线性薛定谔方程; 磁势; 临界增长; 变分法
中图分类号: O175.25 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2012)02-0227-05

Existence of Solutions of Perturbed Schrödinger Equation Involving a Critical Nonlinearity and Magnetic Fields

ZHANG Hui-xing, LIU Wen-bin
(*College of Sciences, China University of Mining and Technology, Xuzhou* 221116, *Jiangsu Province, China*)

Abstract: The authors considered the following nonlinear Schrödinger equation with magnetic fields and critical nonlinearity

$$-(\varepsilon\nabla + \mathrm{i}\boldsymbol{A}(x))^2u + V(x)u = f(|u|^2)u + K(x)|u|^{2^*-2}u, \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

and established the existence of the least energy solution u_ε for small ε using the mountain pass theorem of variational method.

Key words: nonlinear Schrödinger equation; magnetic field; critical nonlinearity; variational method

0 引言及主要结果

非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -(\hbar\nabla + \mathrm{i}\boldsymbol{A}(x))^2\psi + W(x)\psi - f(x,|\psi|^2)\psi, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \tag{1}$$

在量子力学中是一类基本方程, 其中: i是虚数单位; $\hbar$是Planck常数; $\boldsymbol{A}(x)$是n维实值向量位势; 薛定谔算子定义如下:

$$-(\hbar\nabla + \mathrm{i}\boldsymbol{A}(x))^2\psi = -\hbar^2\Delta\psi + \frac{2\hbar}{\mathrm{i}}\boldsymbol{A}\cdot\nabla\psi + |\boldsymbol{A}|^2\psi + \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\psi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}.$$

方程(1)及其驻波解, 即形如

$$\psi(x,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et\hbar^{-1}}u(x)$$

解的存在性研究已有许多结果[1-8], 其中: E是实数; $u(x)$是复值函数. 在方程(1)中如果记$\varepsilon=\hbar$, 则

收稿日期: 2011-05-10.

作者简介: 张慧星(1976—), 男, 汉族, 硕士, 讲师, 从事微分方程理论及应用的研究, E-mail: huixingzhangcumt@163.com. 通讯作者: 刘文斌(1960—), 男, 汉族, 博士, 教授, 博士生导师, 从事微分方程理论及应用的研究, E-mail: wblium@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10771212)、中央高校基础研究基金(批准号: 2010LKSX05)和中国矿业大学校青年基金(批准号: 2008A037).

可以导出如下复值方程:

$$-(\varepsilon\nabla+\mathrm{i}\boldsymbol{A}(x))^2u+V(x)u=f(x,|u|^2)u,\qquad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,\tag{2}$$

其中 $V(x)=W(x)-E$.

当 $\boldsymbol{A}(x)=0$ 并且 $f(x,t)=t^{(p-2)/2}$ 时, 方程(2)变为

$$-\varepsilon^2\Delta u+V(x)u=|u|^{p-2}u,\qquad x\in\mathbb{R}^N.\tag{3}$$

当 $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}V(x)>0$, $2<p<2^*=\dfrac{2N}{N-2}(N\geqslant 3)$ 时, Floer 等[2] 运用 Lyapunov-Schmidt 约化方法得到了方程(3) 驻波解的存在性. Byeon 等[3] 研究了方程(3) 在次临界增长条件和 $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}V(x)=0$ 情形下正解的渐近性态.

当 $f(x,t)=P(x)t^{(p-2)/2}+K(x)t^{(2^*-2)/2}$ 时, 方程(2)变为

$$-\varepsilon^2\Delta u+V(x)u=P(x)|u|^{p-2}u+K(x)|u|^{2^*-2}u,\qquad x\in\mathbb{R}^N.\tag{4}$$

当 $\varepsilon>0$ 足够小时, 在 $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}V(x)=0$ 条件下, Ding 等[4] 研究了方程(4) 极小能量解和多解的存在性.

当 $\boldsymbol{A}(x)\neq 0$ 时, 相关研究参见文献[5-8]. 当 $f(x,t)=t^{(p-2)/2}$, $1<p<2^*$ 时, 在一些条件下, Kurata[5]证明了方程(2)极小能量解的存在性; Cingolani[6]证明了方程(2)多解的存在性, 而且这些解有集中现象; 文献[7]证明了方程(2)在次临界增长条件下, 多个半经典解的存在性.

目前, 关于方程(2)在次临界增长条件下方程解的存在性研究已有很多, 但在临界情形下半经典解的存在性和多解性研究结果较少.

本文研究带磁势的方程

$$-(\varepsilon\nabla+\mathrm{i}\boldsymbol{A}(x))^2u+V(x)u=f(|u|^2)u+K(x)|u|^{2^*-2}u,\qquad x\in\mathbb{R}^N\tag{5}$$

在临界情形下极小能量解的存在性.

假设 $V(x)$, $\boldsymbol{A}(x)$, $K(x)$ 及 f 满足如下条件:

(V_0) $V\in C(\mathbb{R}^N)$, $V(0)=\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}V(x)=0$, 存在 $b>0$, 使得集合 $\nu^b=\{x\in\mathbb{R}^N: V(x)<b\}$ 有有限 Lebesgue测度;

(A_0) $\boldsymbol{A}\in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$, $\boldsymbol{A}(0)=0$;

(K_0) $K\in C(\mathbb{R}^N)$, $0<\inf K\leqslant\sup K<\infty$;

(f_1) $f\in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, $f(0)=0$;

(f_2) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t^2)}{t^s}=0$, $s<2^*-2$;

(f_3) 存在 $a_0>0$, $p>1$, $\theta\in(2,s+2)$, 使得 $F(t)\geqslant 2a_0|t|^{2p}$, $0<\dfrac{\theta}{2}F(t)\leqslant f(t)t$, $t>0$, 其中 $F(t)=\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, $\tau>0$.

本文的主要结果如下:

定理1 假设条件(V_0), (A_0), (K_0)及$(f_1)\sim(f_3)$成立, 则对任意的 $\sigma>0$, 必存在 $\varepsilon_\sigma>0$, 使得当 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_\sigma$ 时, 方程(5)至少有一个极小能量解 u_ε 满足

$$\frac{\theta-2}{2\theta}\int_{\mathbb{R}^N}(\varepsilon^2|\nabla|u_\varepsilon||^2+V(x)|u_\varepsilon|^2)\,\mathrm{d}x\leqslant\sigma\varepsilon^N.$$

1 一个等价的变分问题

记 $\lambda=\varepsilon^{-2}$. 考虑如下与方程(5)等价的问题:

$$-(\nabla+\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\boldsymbol{A}(x))^2u+\lambda V(x)u=\lambda f(|u|^2)u+\lambda K(x)|u|^{2^*-2}u,\qquad x\in\mathbb{R}^N.\tag{6}$$

为了证明定理1, 只需证明如下结果:

定理2 假设条件(V_0), (A_0), (K_0)和$(f_1)\sim(f_3)$成立, 则对任意的 $\sigma>0$, 必存在 $\Lambda_\sigma>0$, 使得当

$\lambda \geqslant \Lambda_\sigma$ 时，方程(6)至少有一个极小能量解 u_λ 满足：

$$\frac{\theta-2}{2\theta}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla|u_\lambda|\right|^2+\lambda V(x)|u_\lambda|^2\right)\mathrm{d}x \leqslant \sigma\lambda^{1-N/2}.$$

为方便，定义如下空间：令 $E_\lambda=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^N):\int_{\mathbb{R}^N}\lambda V(x)|u|^2<\infty\right\}$，定义内积

$$(u,v)_\lambda=\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^N}\left((\nabla u+\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\boldsymbol{A}u)\overline{(\nabla v+\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\boldsymbol{A}v)}+\lambda V(x)u\bar{v}\right),$$

由内积导出的范数为

$$\|u\|_\lambda^2=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla u+\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\boldsymbol{A}u\right|^2+\lambda V(x)|u|^2\right)\mathrm{d}x.$$

易知 E_λ 是一个 Hilbert 空间，同时作为一个赋范线性空间，它是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ 在范数 $\|\cdot\|_\lambda$ 下的闭包.

易见，方程(6)相应的能量泛函如下：

$$J_\lambda(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla u+\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\boldsymbol{A}u\right|^2+\lambda V(x)|u|^2\right)\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}G(x,u)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}G(x,u)\mathrm{d}x,\quad u\in E_\lambda,$$

其中 $G(x,u)=\dfrac{K(x)}{2^*}|u|^{2^*}+\dfrac{1}{2}F(|u|^2)$.

注 1　由条件(V_0)、Rellich-Kondrachov 定理和磁对角不等式[1]，可得

$$|\nabla u+\mathrm{i}\boldsymbol{A}u|\geqslant\left|\nabla|u|\right|,\qquad \text{a.e. 在 } \mathbb{R}^N \text{ 中},$$

从而在 E_λ 中，如果 $u_n\rightharpoonup u$，则在 $L_{\mathrm{loc}}^q(\mathbb{R}^N)$ 中，$u_n\to u$，$q\in[2,2^*)$ 且 $u_n\to u$ 几乎处处在 $\mathbb{R}^N$ 中.

注 2　由假设(V_0)，(A_0)，(K_0)和(f_1)，并结合标准的讨论[9]，容易得到 $J_\lambda\in C^1(E_\lambda,\mathbb{R})$，从而泛函 J_λ 的临界点是方程(6)的弱解.

2　(PS)序列

考虑序列 $(u_n)\subset E_\lambda$，如果 $J_\lambda(u_n)\to c$，在 E_λ^* 中 $J'_\lambda(u_n)\to 0$，则 (u_n) 称为泛函 J_λ 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列；进一步，如果 J_λ 的任一 $(\mathrm{PS})_c$ 序列都包含一个收敛子列，则称 J_λ 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件.

类似文献[4]中的引理 3.1，可得：

引理 1　假设定理 2 的条件成立，(u_n) 是 J_λ 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列，则 $c\geqslant 0$，并且 (u_n) 在 E_λ 中有界.

证明：由条件(f_3)，可得：

$$J_\lambda(u_n)-\frac{1}{\theta}J'_\lambda(u_n)u_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|_\lambda^2+\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2^*}\right)\lambda\int_{\mathbb{R}^N}K(x)|u_n|^{2^*}\mathrm{d}x+$$

$$\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{\theta}f(|u_n|^2)|u_n|^2-\frac{1}{2}F(|u_n|^2)\right)\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|_\lambda^2\geqslant 0.$$

可见，(u_n) 在 E_λ 中有界且 $c\geqslant 0$.

由引理 1，$(\mathrm{PS})_c$ 序列 (u_n) 在 E_λ 中有界，结合 E_λ 是自反空间，所以必有弱收敛的子序列. 为方便，在 E_λ 中不妨设 $u_n\rightharpoonup u$，由注记 1 可知，$u_n\to u$ 在 $L_{\mathrm{loc}}^q(\mathbb{R}^N)$ 中 $q\in[2,2^*)$，且 $u_n\to u$ 几乎处处在 $\mathbb{R}^N$ 中.

类似于文献[4]中引理的证明，依次可得如下引理：

引理 2　令 $s\in[2,2^*)$，则对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $r_\varepsilon>0$，使得在 (u_n) 中存在子序列 (u_{n_j})，并有

$$\limsup_{j\to\infty}\int_{B_j\setminus B_r}|u_{n_j}|^s\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon,\qquad r\geqslant r_\varepsilon,$$

其中 $B_r=\{x\in\mathbb{R}^N:|x|\leqslant r\}$.

下面定义 $\eta\in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ 满足 $0\leqslant\eta(t)\leqslant 1$，$t\geqslant 0$. 当 $t\leqslant 1$ 时，$\eta(t)=1$；当 $t\geqslant 2$ 时，$\eta(t)=0$. 令 $\tilde{u}_j(x)=\eta(2|x|/j)u(x)$，显然，当 $j\to\infty$ 时，$\|u-\tilde{u}_j\|\to 0$.

引理3 对于任意的 $\varphi\in E_\lambda$，当 $\|\varphi\|_\lambda\leqslant 1$ 时，一致地有

$$\lim_{j\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(f(|u_{n_j}|^2)u_{n_j}-f(|u_{n_j}-\tilde{u}_j|^2)(u_{n_j}-\tilde{u}_j)-f(|\tilde{u}_j|^2)\tilde{u}_j)\varphi\mathrm{d}x\right|=0.$$

引理4 结合上面结果，进一步可得

$$J_\lambda(u_n-\tilde{u}_n)\to c-J_\lambda(u),\qquad J'_\lambda(u_n-\tilde{u}_n)\to 0.$$

令 $u_n^1=u_n-\tilde{u}_n$，则 $u_n-u=u_n^1+(\tilde{u}_n-u)$. 在 E_λ 中由 $\tilde{u}_j\to u$ 可得，在 E_λ 中 $u_n\to u$ 当且仅当在 E_λ 中 $u_n^1\to 0$.

因为

$$J_\lambda(u_n^1)-\frac{1}{2}J'_\lambda(u_n^1)u_n^1=\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{\theta}f(|u_n^1|^2)|u_n^1|^2-\frac{1}{2}F(|u_n^1|^2)\right)\mathrm{d}x+$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\lambda\int_{\mathbb{R}^N}K(x)|u_n^1|^{2^*}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\lambda K_{\min}}{N}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n^1|^{2^*}\mathrm{d}x,$$

其中 $K_{\min}=\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N}K(x)>0$. 由引理4，可得

$$|u_n^1|_{2^*}^{2^*}\leqslant\frac{N(c-J_\lambda(u))}{\lambda K_{\min}}+o(1).\tag{7}$$

从而对于 J_λ，当 $(\mathrm{PS})_c$ 条件成立时，易得到 J_λ 的能量水平如下：

引理5 在定理2的假设下，存在一个与 λ 无关的常数 $\alpha_0>0$，假设 $(u_n)\subset E_\lambda$ 满足：

$$J_\lambda(u_n)\to c<\alpha_0\lambda^{1-N/2},\qquad J'_\lambda(u_n)\to 0 \text{ 在 } E_\lambda^* \text{ 中},$$

则 (u_n) 在 E_λ 中一定有收敛的子列.

3 山路结构

引理6 在定理2的假设条件下，存在 $\alpha_\lambda,\rho_\lambda>0$，使得

$$J_\lambda(u)>0,\quad 0<\|u\|_\lambda<\rho_\lambda;\quad J_\lambda(u)\geqslant\alpha_\lambda,\quad \|u\|_\lambda=\rho_\lambda.$$

由于证明过程与文献[4]中引理4.1类似，故略.

定义泛函

$$\Phi_\lambda(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u+\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\boldsymbol{A}u|^2+\lambda V(x)|u|^2)\mathrm{d}x-a_0\lambda\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2p}\mathrm{d}x.$$

结合条件 (V_0)，(A_0)，(K_0) 和 (f_3)，可得

$$\Phi_\lambda\in C^1(E_\lambda)\text{ 且 }J_\lambda(u)\leqslant\Phi_\lambda(u),\qquad u\in E_\lambda.$$

因为

$$\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x:\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}),\ |u|_{2p}=1\right\}=0,$$

所以对于任意的 $\delta>0$，存在 $\phi_\delta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$，使得 $|\phi_\delta|_{2p}=1$，$\mathrm{supp}\,\phi_\delta\subset B_{r_\delta}(0)$，且 $|\nabla\phi_\delta|_2^2<\delta$. 记 $e_\lambda(x)=\phi_\delta(\sqrt{\lambda}x)$，则 $\mathrm{supp}\,e_\lambda\subset B_{\lambda^{-1/2}r_\delta}(0)$.

对任意的 $t\geqslant 0$，有

$$\Phi_\lambda(te_\lambda)=\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla e_\lambda+\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\boldsymbol{A}(x)e_\lambda|^2+\lambda V(x)|e_\lambda|^2)\mathrm{d}x-a_0\lambda t^{2p}\int_{\mathbb{R}^N}|e_\lambda|^{2p}\mathrm{d}x=$$
$$\lambda^{1-N/2}I_\lambda(t\phi_\delta),$$

其中

$$I_\lambda(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+(|\boldsymbol{A}(\lambda^{-1/2}x)|^2+V(\lambda^{-1/2}x))|u|^2)\mathrm{d}x-a_0\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2p}\mathrm{d}x.$$

显然

$$\max_{t\geqslant 0}I_\lambda(t\phi_\delta)=\frac{2p-2}{4p(2pa_0)^{2/(2p-2)}}\left\{\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\phi_\delta|^2+(|\boldsymbol{A}(\lambda^{-1/2}x)|^2+V(\lambda^{-1/2}x))|\phi_\delta|^2)\mathrm{d}x\right\}^{2p/(2p-2)}.$$

结合 $\boldsymbol{A}(0)=0$，$V(0)=0$ 和 $\operatorname{supp}\ \phi_\delta \subset B_{r_\delta}(0)$ 可知，存在 $\Lambda_\delta>0$，使得当 $\lambda \geqslant \Lambda_\delta$ 时，

$$\max_{t\geqslant 0} J_\lambda(t\phi_\delta) \leqslant \frac{2p-2}{4p(2pa_0)^{2/(2p-2)}}(5\delta)^{2p/(2p-2)}\lambda^{1-N/2}. \tag{8}$$

综上分析，可得：

引理 7　在定理 2 的假设下，对于任意的 $\sigma>0$，存在 $\Lambda_\sigma>0$，使得当 $\lambda \geqslant \Lambda_\sigma$ 时，存在 $\bar{e}_\lambda \in E_\lambda$，$\|\bar{e}_\lambda\|_\lambda>\rho_\lambda$，使得 $J_\lambda(\bar{e}_\lambda)\leqslant 0$，并且 $\max\limits_{t\geqslant 0} J_\lambda(t\bar{e}_\lambda)\leqslant \sigma\lambda^{1-N/2}$，其中 ρ_λ 见引理 6 中定义.

4　定理的证明

下面证明定理 2. 由引理 7 知，对于任意的 $0<\sigma<\alpha_0$，必存在 $\Lambda_\sigma>0$，使得当 $\lambda\geqslant\Lambda_\sigma$ 时，有 $c_\lambda \leqslant \sigma\lambda^{1-N/2}$，其中：

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma_\lambda}\max_{t\in[0,1]} J_\lambda(\gamma);$$

$$\Gamma_\lambda = \{\gamma \in C([0,1],E_\lambda): \gamma(0)=0,\ \gamma(1)=\bar{e}_\lambda\}.$$

结合引理 5，容易得到 J_λ 满足 $(\mathrm{PS})_{c_\lambda}$ 条件. 因此，由山路定理知，存在 $u_\lambda\in E_\lambda$，满足 $J'_\lambda(u_\lambda)=0$ 且 $J_\lambda(u_\lambda)=c_\lambda$，即 u_λ 是方程(6)的一个弱解.

此外，因为 $J_\lambda(u_\lambda)\leqslant\sigma\lambda^{1-N/2}$，$J'_\lambda(u_\lambda)=0$，且

$$J_\lambda(u_\lambda) = J_\lambda(u_\lambda)-\frac{1}{\theta}J'_\lambda(u_\lambda)u_\lambda = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_\lambda\|_\lambda^2 + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2^*}\right)\lambda\int_{\mathbb{R}^N}K(x)|u_\lambda|^{2^*}\mathrm{d}x + \lambda\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{\theta}f(|u_\lambda|^2)|u_\lambda|^2-\frac{1}{2}F(|u_\lambda|^2)\right)\mathrm{d}x \geqslant \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_\lambda\|_\lambda^2,$$

所以由磁对角不等式可得

$$\frac{\theta-2}{2\theta}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla|u_\lambda||^2+\lambda V(x)|u_\lambda|^2)\mathrm{d}x \leqslant \sigma\lambda^{1-N/2}.$$

从而 $u(\lambda)$ 为方程(6)的极小能量解，定理得证.

参　考　文　献

[1] Esteban M, Lions P L. Stationary Solutions of Nonlinear Schrödinger Equation with an External Magnetic Field in PDE and Calculus of Variations [M]. Boston: Birkhäuser Publishing Ltd, 1989.

[2] Floer A, Weinstein A. Nonspreading Wave Packets for the Cubic Schrödinger Equation with a Bounded Potential [J]. J Funct Anal, 1986, 69(3): 397-408.

[3] Byeon J, WANG Zhi-qiang. Standing Waves with a Critical Frequency for Nonlinear Schrödinger Equations [J]. Arch Ration Mech Anal, 2002, 165(4): 295-316.

[4] DING Yan-heng, LIN Fang-hua. Solutions of Perturbed Schrödinger Equations with Critical Nonlinearity [J]. Calc Var, 2007, 30(2): 231-249.

[5] Kurata K. Existence and Semi-classical Limit of the Least Energy Solution to a Nonlinear Schrödinger Equation with Electromagnetic Fields [J]. Nonlinear Anal, 2000, 41: 763-778.

[6] Cingolani S. Semiclassical Stationary States of Nonlinear Schrödinger Equations with an External Magnetic Field [J]. J Diff Equ, 2003, 188(1): 52-79.

[7] Cingolani S, Jeanjean L, Secchi S. Multi-peak Solutions for Magnetic NLS Equations without Non-degeneracy Conditions [J]. ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations, 2009, 15(3): 653-675.

[8] Chabrowski J, Szulkin A. On the Schrödinger Equation Involving a Critical Sobolev Exponent and Magnetic Field [J]. Top Meth Nonlinear Anal, 2005, 25(1): 3-21.

[9] Rabinowitz P H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations [M]. Rhode Island: American Mathematical Society Providence, 1985.

（责任编辑：赵立芹）