

基于偏微分方程的彩色图像乘性去噪模型

尹云光¹, 曹 杨², 郭志昌³, 李 静⁴

(1. 吉林大学 计算机科学与技术学院, 长春 130012; 2. 大连理工大学 数学科学学院, 辽宁 大连 116024;
3. 哈尔滨工业大学 数学系, 哈尔滨 150001; 4. 中央民族大学 理学院, 北京 100081)

摘要: 提出一种新的非线性偏微分方程恢复模型, 解决含乘性噪声的彩色图像恢复问题. 新模型中引入光滑后向量值图像的几何流形特征判断图像的“真”、“假”边缘, 利用 $p(x)$ -Laplace 扩散系数在区域内部和边界以不同的方式进行扩散, 利用 $|u|^q$ 扩散系数在乘性噪声干扰不同的区域以不同的速度进行扩散. 理论分析和数值实验结果表明了该模型的有效性.

关键词: 彩色图像; 乘性噪声; 图像恢复; 各向异性扩散

中图分类号: O175.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2011)03-0424-06

A Multiplicative Denoising Model of Color Images Based on Partial Differential Equations

YIN Yun-guang¹, CAO Yang², GUO Zhi-chang³, LI Jing⁴

(1. College of Computer Science and Technology, Jilin University, Changchun 130012, China;
2. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning Province, China;
3. Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;
4. College of Science, Minzu University of China, Beijing 100081, China)

Abstract: A nonlinear partial differential equation model was proposed to remove multiplicative noise of color images. The geometrical manifold characteristics of vector-valued image after smoothing are introduced to distinguish the “real” and “false” edges. The $p(x)$ -Laplace diffusion coefficients drive image to diffuse in different ways on the edges and in the domains of images. The $|u|^q$ diffusion coefficient drives image to diffuse at different speeds that fit to the multiplicative noises strength. Theoretical analysis and numerical results show the efficiency of the new method.

Key words: color image; multiplicative noise; image restoration; anisotropic diffusion

乘性噪声是真实图像系统中常见的噪声形式, 由于乘性噪声系统不是线性的, 使得对这类系统的信号处理更困难. 而去除乘性噪声对石油地震勘探、遥感影像数据分析、医学超声波成像等应用领域具有重要意义. 此外, 随着计算机性能的不断提高, 彩色图像在上述领域的应用受到了越来越多的重视. 因此, 研究和发展彩色图像乘性噪声的图像恢复技术具有重要意义和应用价值.

近年来, 偏微分方程(PDE)方法成为图像恢复的一个有效工具. 本文将 PDE 图像恢复方法拓展到含乘性噪声的彩色图像上, 建立一类新的基于各向异性扩散的彩色图像恢复模型. 将向量值图像梯度

收稿日期: 2010-05-31.

作者简介: 尹云光(1986—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事计算机理论及应用的研究, E-mail: yinyunguang@sina.com. 通讯作者: 郭志昌(1982—), 男, 汉族, 博士, 讲师, 从事偏微分方程图像处理的研究, E-mail: mathgzc@email.jlu.edu.cn.

基金项目: 中国博士后科学基金(批准号: 20100481229)和中央高校基本科研业务费专项基金.

模引入边界探测函数判断图像的“真”、“假”边界, 使模型中考虑的边界体现彩图的本质特征; 并针对乘性噪声的特殊性质, 采用 $p(x)$ -Laplace 扩散结合 $|u|^q$ 扩散系数, 达到去除乘性噪声的效果.

1 偏微分方程图像恢复方法

对噪声污染的图像, 图像恢复是指沿着图像退化模型的逆过程获取清晰的原始图像, 其关键是在去除噪声的基础上保持原图像的重要信息, 比如边界和角点. 在乘性噪声系统中, 观察图像 $u_0 = u\eta$, 其中: u 为原始图像, η 为均值为 1 的随机噪声.

如果将图像中显示的各种信息视为能量, 则恢复原始图像问题可以通过极小化如下能量泛函解决:

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} f(u, u_0) dx + \lambda \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) dx, \tag{1}$$

其中: f 为拟合项; ϕ 为正则项; λ 为规整参数. 若选取

$$\phi(|\nabla u|) = |\nabla u|,$$

则为 Rudin 等^[1]提出的经典 TV 模型. TV 模型能保持图像边界, 但由于它倾向于逐段常值解, 因此会导致阶梯效应. 而 $\phi(|\nabla u|) = |\nabla u|^2$ 时的热扩散可以较快地平滑噪声而不会留下斑块, 故结合 TV 扩散和热扩散是改善阶梯效应的一个有效途径, 如文献[2-3]中的 $p(x)$ 调和映射图像恢复模型 $\phi(|\nabla u|) = |\nabla u|^{p(x)}$. 目前, 去除乘性噪声的变分模型, 主要以修正能量泛函(1)中的拟合项为基础,

如 Rudin 等^[4]在假设乘性噪声的均值为 1 且方差已知情形下提出的 $f(u, u_0) = \frac{u_0}{u} + \left(\frac{u_0}{u} - 1\right)$, Aubert 和

Aujol^[5]基于最大后验估计正则法给出的 $f(u, u_0) = \log u + \frac{u_0}{u}$.

如果将恢复图像 u 视为原始图像 u_0 在某个尺度下的形态, 则这种形态的变化过程可以由某种扩散方程表示, 如热传导方程^[6-7]. 但由于线性方程各向同性扩散的性质, 会导致图像边缘模糊. 为了避免这种现象, Perona 和 Malik^[8]提出了如下的各向异性扩散模型:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{1 + |\nabla u/K|^2} \right), \tag{2}$$

其中阈值 K 为一个正常数. 该模型根据图像梯度模的大小实现有选择的扩散平滑, 在边缘部分进行倒向扩散而在内部进行正向扩散, 从而在去除图像噪声的同时也能较好地保持图像轮廓等较大的全局特征. 由于 PM 模型很不稳定, 易误判边界, Catté 等^[9]利用高斯滤波给出了改进的 PM 模型:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{1 + |\nabla G_{\sigma} * (u/K)|^2} \right), \tag{3}$$

其中: G_{σ} 为高斯滤波; $\sigma > 0$ 为固定参数.

2 彩色图像乘性去噪模型

基于文献[2-3]的 $p(x)$ -Laplace 流和文献[9]的耦合高斯滤波, 本文给出如下模型:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div} (|G_{\sigma_1} * u|^q \| \nabla u \|_v^{p(\| \nabla G_{\sigma_2} * \ln u_0 \|_v)^{-2}} \nabla u), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \Omega, \end{aligned} \tag{4}$$

其中: $u(x, y) = (u_R(x, y), u_G(x, y), u_B(x, y))$ 表示彩色图像; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为边界光滑的有界区域; \mathbf{n} 为 Ω 的单位外法方向量; $q < 1, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ 为固定参数; $G_{\sigma}(x) = \frac{1}{4\pi\sigma} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\sigma}\right)$ 为高斯滤波; $p(s)$ 定义为 $p(s) = 1 + \frac{1}{1 + ks^2}$, 其中 $k > 0$; 而 $\| \cdot \|_v$ 为新引入的向量值图像梯度模.

对于向量值图像 $\Phi(x, y): \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m$:

$$\Phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \dots, \phi_m(x, y)),$$

其中 $\phi_i(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m$. 在点 (x_0, y_0) 处, $\Phi(x, y)$ 的取值是 \mathbb{R}^m 中的点. 如果把 $\Phi(x, y)$ 视为 \mathbb{R}^m 中的曲面, 则利用经典的微分几何知识, $\Phi(x, y)$ 的第一基本式为

$$d\Phi^2 = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

其中:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial x}; \\ F &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \dots + \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial y}; \\ G &= \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \dots + \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial y}. \end{aligned}$$

对于单位向量 $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $d\Phi^2(\mathbf{v})$ 表示在曲面 $\Phi(x, y)$ 上沿方向 \mathbf{v} 的变化率. 设矩阵 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 的特征值为 λ_+, λ_- , 分别对应的单位特征向量为 $(\cos \theta_+, \sin \theta_+), (\cos \theta_-, \sin \theta_-)$. 此时, θ_+ 是曲面 $\Phi(x, y)$ 的最大变化方向, λ_+ 是最大变化率; θ_- 是曲面 $\Phi(x, y)$ 的最小变化方向, λ_- 是最小变化率. 当 $m=1$ 时, 即对应于灰度图像的情形, 可以得到

$$\lambda_+ = \|\nabla \Phi\|, \quad \lambda_- = 0,$$

并且 $(\cos \theta_-, \sin \theta_-) // \nabla \Phi$, 与灰度图像恢复模型中的图像梯度 $|\nabla f|$ 一致. 因此, 在向量值图像中用 $f = f(\lambda_+, \lambda_-)$ 衡量图像 $\Phi(x, y)$ 的变化是合理的. 更进一步, 考虑到 λ_+ 和 λ_- 的几何意义, 可以令 f 是关于 $\lambda_+ - \lambda_-$ 的函数, 例如, 取

$$f_v = (\lambda_+ - \lambda_-)^{1/p}, \quad p > 0.$$

本文定义向量值图像梯度模如下:

$$\|\nabla \cdot\|_v = |\lambda_+ - \lambda_-| = (E - G)^2 + 4F^2. \quad (5)$$

目前, 含乘性噪声的图像恢复模型, 大多数从改进变分模型的拟合项开始, 而模型(4)从构造模型主部新的扩散系数出发使其更适合去除彩色图像的乘性噪声. 首先, 摒弃以往将向量值图像分成多个单独通道并逐个探测边界的方法, 利用向量值图像的梯度模(5)代替单通道图像中的梯度模, 使探测到的边界为向量值图像的真实边界. 这样所建立的模型体现了图像通道与通道之间的联系, 即方程组(4)中的每个方程都不是孤立的, 而是相互耦合, 从而体现了向量值图像的本质关联. 其次, 本文的模型继承了 $p(x)$ -Laplace 流根据区域选取扩散方式的特点, 即在图像齐次区域有 $p(s) \rightarrow 2$, 进行热扩散, 而在边界附近有 $p(s) \rightarrow 1$, 进行 TV 扩散. 特别地, 本文针对乘性噪声系统 $u_0 = u\eta$, 噪声干扰会随信号的增大而增大及 0 区域不会被噪声污染的特点, 在扩散系数中引入了新的影响因子 $|u|^q$, 使得在 $|u|$ 较大即噪声干扰强的地方扩散快, 而在 u 为 0 即无噪声干扰的区域不进行扩散, 从而保留图像的有效信息. 但在乘性噪声系统中图像剧烈震荡的部分, 其梯度模在理论上将变得无穷大, 因此很难用梯度模判定“真”、“假”边界. 为了克服这一缺陷, 本文参照文献[9]的方法引入高斯低通滤波器 G_σ 以减少噪声对图像特征的影响. 此外, 在边界探测算子中用 $\ln u_0 = \ln u + \ln \eta$ 代替 u_0 , 避免乘性噪声在不同区域对边界探测的不同影响.

3 数值分析与实验

下面利用有限差分法, 构造计算 (u_R, u_G, u_B) 的差分格式, 并进行一系列数值实验. 具体格式如下: 假设时间步长为 τ , 空间步长为 $h=1$, 离散时间变量和空间变量如下:

$$\begin{aligned} t &= n\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ x &= ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, I, \\ y &= jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J, \end{aligned}$$

其中 $Ih \times Jh$ 是图像大小. 记 $u_{c,i,j}^n$ 为 $u_c(n\tau, ih, jh)$ ($c=R, G, B$) 的近似值, 并定义偏导数离散格式如下:

$$\nabla_x^+ u_{c,i,j}^n = \frac{u_{c,i+1,j}^n - u_{c,i,j}^n}{h}, \quad \nabla_x^- u_{c,i,j}^n = \frac{u_{c,i-1,j}^n - u_{c,i,j}^n}{h},$$

$$\nabla_y^+ u_{c,i,j}^n = \frac{u_{c,i,j+1}^n - u_{c,i,j}^n}{h}, \quad \nabla_y^- u_{c,i,j}^n = \frac{u_{c,i,j-1}^n - u_{c,i,j}^n}{h}.$$

问题(1)的离散格式如下:

$$u_{c,i,j}^{n+1} = u_{c,i,j}^n + \frac{\tau}{h} \left[\nabla_x^- \left(|G_{\sigma_1} * u_{c,i,j}^n|^q \frac{\nabla_x^+ u_{c,i,j}^n}{((\nabla_x^+ u_{c,i,j}^n)^2 + (\nabla_y^+ u_{c,i,j}^n)^2)^{(2-p_{ij})/2}} \right) + \nabla_y^- \left(|G_{\sigma_1} * u_{c,i,j}^n|^q \frac{\nabla_y^+ u_{c,i,j}^n}{((\nabla_x^+ u_{c,i,j}^n)^2 + (\nabla_y^+ u_{c,i,j}^n)^2)^{(2-p_{ij})/2}} \right) \right], \quad (6)$$

$$p_{i,j} = 1 + \frac{1}{1 + k_2(1 + \|\nabla G_{\sigma_2} * \ln u(x)\|_{i,j}^2)}, \quad (7)$$

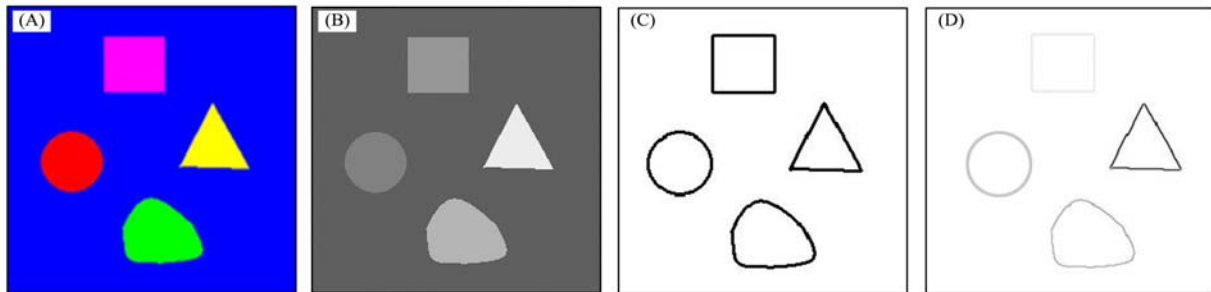
$$u_{c,i,j}^0 = u_c(ih, jh), \quad 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J, \quad (8)$$

$$u_{c,i,0}^n = u_{c,i,1}^n, \quad u_{c,0,j}^n = u_{c,1,j}^n, \quad u_{c,I,i}^n = u_{c,I-1,i}^n, \quad u_{c,i,J}^n = u_{c,i,J-1}^n. \quad (9)$$

算法如下:

- 1) 利用 $u_{c,i,j}^0, u_{c,i,j}^n$ 按式(7)计算 $p_{i,j}$;
- 2) 利用式(6)更新 $u_{c,i,j}^n$, 得到 $u_{c,i,j}^{n+1}$;
- 3) 如果 $u_{i,j}^{n+1}$ 满足要求(最大 SNR), 则停止迭代; 否则, 置 $n+1$ 为 n , 转 2).

为了验证本文模型的效果, 根据上面的算法, 下面给出三组去除彩色图像乘性噪声的实验. 图 1 为边界探测函数图像.

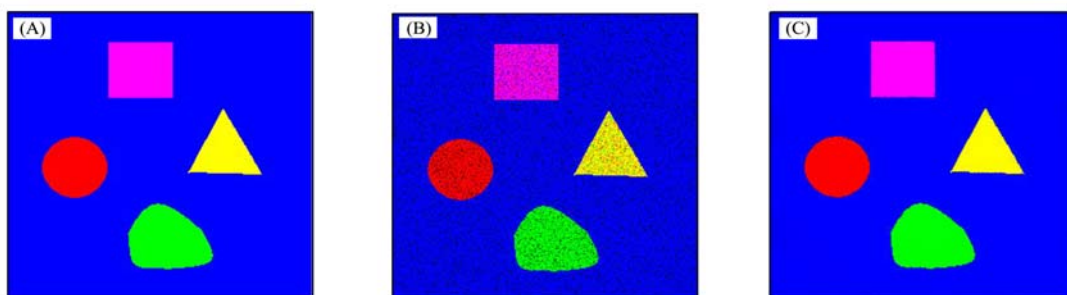


(A) 彩色图像; (B) 由彩色图像得到的灰度图像;
 (C) 按照 $\|\nabla \cdot\|_v$ 计算得到的边界探测函数 $p(s)$, 其中 $\sigma_2 = 0.5, k_2 = 0.0001$;
 (D) 在相同的参数下, 按照灰度图像梯度计算得到的边界探测函数.

图 1 边界探测函数

Fig. 1 Edge detection function

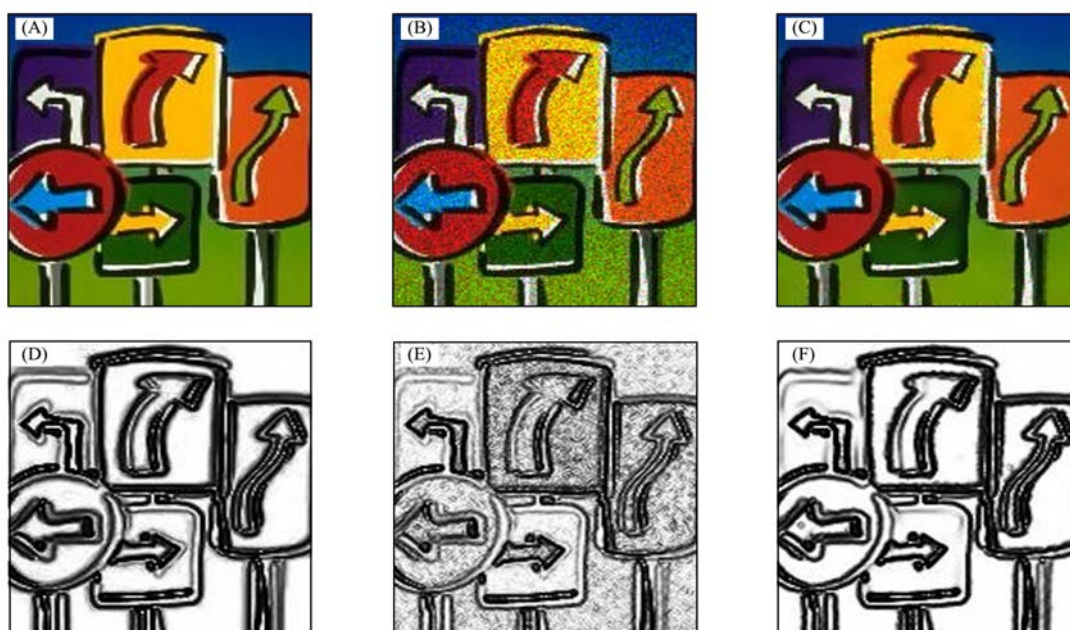
由图 1 可见, 如果单通道的理解彩图或将彩色图像变换成灰度图像时, 探测到的图像边界会有很大误差, 而本文考虑的图像梯度模综合了 3 个通道的信息, 探测出的边界清晰准确, 所以新模型中的边界探测函数 $p(x)$ 更优. 图 2 ~ 图 4 为分别将本文的模型应用到人工图像及真实图像上的效果. 由图 2 ~ 图 4 可见, 本文的模型效果很好, 在色彩亮度与饱和度上接近原始图像, 特别地, SNR 的提升非常显著, 图 2 中由 8.1616(B) 提升到 22.1806(C), 图 3 中由 10.6801(B) 提升到 14.2382(C), 图 4 中由 5.6152(B) 提升到 11.9250(C). 对于分片常值的人工图像恢复效果(图 2), 混合型模型非常有效, 区域内部类似热方程扩散, 去噪速度快, 边界附近具有类似 TV 模型扩散的效果, 能够完整地保持边界. 对于真实图像, 图 3 和图 4 的恢复效果也很明显, 本文的模型不但很好地去除了乘性噪声, 而且一些小尺度特征也能很好地保留, 例如图 3(D) ~ (F) 中显示的图像边界和图 4 中人物的眼睛、嘴等几乎没有损失, 并且恢复结果中未出现以往去除乘性噪声模型^[4-5]中的阶梯效应.



(A) 原始图像; (B) 噪音图像: $SNR = 8.1616$;
(C) 本文模型恢复结果: $SNR = 22.1806$, $N = 1100$, $\tau = 0.1$, $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 0.5$, $k = 0.0025$, $q = 0.1$.

图2 人工图像恢复结果

Fig. 2 Restoration results of a synthetic image



(A) 原始图像; (B) 噪音图像: $SNR = 10.6801$; (C) 本文模型恢复结果: $SNR = 14.2382$, $N = 59$, $\tau = 0.1$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 0.5$,
 $k = 0.0025$, $q = 0.1$; (D) 原始图像边界函数; (E) 噪音图像边界函数; (F) 恢复图像边界函数.

图3 真实图像恢复结果

Fig. 3 Restoration results of a real image



(A) 原始图像; (B) 噪音图像: $SNR = 5.6152$;
(C) 本文模型恢复结果: $SNR = 11.9250$, $N = 50$, $\tau = 0.1$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 0.5$, $k = 0.0025$, $q = 0.1$.

图4 Lena 图像恢复结果

Fig. 4 Restoration results of Lena image

综上所述,本文给出了一个新的彩色图像乘性噪声恢复模型.先利用 $p(x)$ -Laplace 扩散将 TV 扩散与热扩散结合,使得扩散分区域进行且各向异性,从而在去噪的同时很好地保持边界.同时给出了一个与像素值相关的新扩散系数,使得在乘性噪声干扰不同的区域以不同的速度进行扩散.此外,将向量值图像梯度模引入边界探测函数判断图像的“真”、“假”边界,使模型中考虑的边界体现彩图的本质特征.算法设计上采用显示迭代方法,容易实现.数学分析和实验结果都证明了本文模型是一个去噪、保持边界俱佳的偏微分模型.

参 考 文 献

- [1] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms [J]. *Physica D*, 1992, 60: 259-268.
- [2] Blomgren P, Chan T F, Mulet P, et al. Total Variation Image Restoration: Numerical methods and Extensions [C]// *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*. Santa Barbara: IEEE Press, 1997: 384-387.
- [3] LI Fang, LIU Rui-hua. The Application of $p(x)$ Harmonic Mapping in Image Processing [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2008, 13(1): 19-23. (黎芳,刘瑞华. $p(x)$ 调和映射在图像恢复中的应用 [J]. *中国图象图形学报*, 2008, 13(1): 19-23.)
- [4] Rudin L I, Lions P L, Osher S. Multiplicative Denoising and Deblurring: Theory and Algorithms [C]// *Geometric Level Set Methods in Imaging, Visions, and Graphics*. New York: Springer, 2003: 103-119.
- [5] Aubert G, Aujol J F. A Variational Approach to Removing Multiplicative Noise [J]. *SIAM J Appl Math*, 2008, 68(4): 925-946.
- [6] Gabor D. Information Theory in Electron Microscopy [J]. *Lab Investg*, 1965(14): 801-807.
- [7] Witkin A P. Scale-Space Filtering [C]// *8th Int Join Conf Artical Intelligence*. Karlsruhe: [s. n.], 1983: 1019-1021.
- [8] Perona P, Malik J. Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion [J]. *IEEE Trans on Pattern Anal Machine Intell*, 1990, 12(7): 629-639.
- [9] Catté F, Lions P L, Morel J M, et al. Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1992, 29(1): 182-193.