第49卷 第3期
2011年5月

吉林大学学报(理学版)
Journal of Jilin University (Science Edition)

Vol. 49 No. 3
May 2011

求解非线性互补问题的一种新的 LQP 方法

黄玲玲, 刘三阳, 王 贞
(西安电子科技大学 理学院, 西安 710071)

摘要: 提出一个放松的非精确误差准则, 给出一种新的用于求解非线性互补问题的 LQP 方法, 并在较弱的假设下, 证明了该方法具有全局收敛性. 数值实验结果表明, 该方法可行、有效.

关键词: 非线性互补问题; LQP 方法; 预测校正方法; 非精确误差准则
中图分类号: O221.2 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)03-0381-06

A New LQP Method for Solving Nonlinear Complementarity Problems

HUANG Ling-ling, LIU San-yang, WANG Zhen
(*School of Science*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *China*)

Abstract: By proposing a relaxed inexact criterion, a new LQP method for solving nonlinear complementarity problems was presented. Under quite mild assumptions, global convergence of the method was proved. Numerical results show that the method is viable and efficient.

Key words: nonlinear complementarity problems; logarithmic-quadratic proximal method; prediction-correction method; inexact criterion

0 引 言

非线性互补问题(NCP)是确定向量 $\boldsymbol{x}\in R^n$, 使得

$$\boldsymbol{x}\geqslant 0,\quad F(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}F(\boldsymbol{x})=0, \tag{1}$$

其中 F 是从 R^n 到自身的一个映射. 本文要求 F 连续且拟单调, 同时假设非线性互补问题(1)的解集 S^* 非空.

近年来, 非线性互补问题在许多领域(如经济平衡、交通运输、数学规划、工程设计等)受到广泛关注[1-2]. 对于非线性互补问题, 提出一种易于执行和快速收敛的求解方法是重要的研究方向.

令 $R_+^n=\{\boldsymbol{x}\in R^n: \boldsymbol{x}\geqslant 0\}$, 求解非线性互补问题可以转化为寻找极大单调算子 $T=F+N_{R_+^n}$ 的零点, 即寻找 $\boldsymbol{x}^*$, 使得 $0\in T(\boldsymbol{x}^*)$. $N_{R_+^n}$ 称为 R_+^n 上的法锥算子, 定义为

$$N_{R_+^n}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\{\boldsymbol{y}: \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x})\leqslant 0,\ \forall \boldsymbol{v}\in R_+^n\}, & \boldsymbol{x}\in R_+^n;\\ \varnothing, & \boldsymbol{x}\notin R_+^n.\end{cases} \tag{2}$$

邻点算法(PPA)是寻找极大单调算子 T 零点的一类经典算法. 该算法由 Martinet[3] 提出, 迭代步

收稿日期: 2010-06-04.

作者简介: 黄玲玲(1983—), 女, 汉族, 博士研究生, 从事非线性互补问题的研究, E-mail: huangzxp@yahoo.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 60974082)、国家重点实验室专项科研基金(批准号: ISN02080003)和中央高校基本科研业务费专项基金(批准号: JY10000970006).

骤如下：给定 $\boldsymbol{x}^k\in R_+^n$，并且 $\beta_k\geqslant\beta>0$，将下列包含问题的解点作为新的迭代点 $\boldsymbol{x}^{k+1}\in R_+^n$：

$$0\in\beta_k T(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^k).\tag{3}$$

令 $P_{R_+^n}(\cdot)$ 表示欧式范数下的投影，求解式(3)等价于求解

$$\boldsymbol{x}=P_{R_+^n}[\boldsymbol{x}^k-\beta_k F(\boldsymbol{x})].\tag{4}$$

注意到式(4)是非光滑的并且为隐式迭代，因此无法直接对式(4)进行求解.

Auslender 等[4]通过将式(3)中的线性项 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^k)$ 换成特殊的非线性函数，改进了邻点算法，提出一种非精确 Logarithmic-Quadratic Proximal 方法(LQP 方法)：给定

$$\boldsymbol{x}^k\in R_{++}^n:=\operatorname{int}R_+^n,\quad \beta_k\geqslant\beta>0,\quad \mu\in(0,1),$$

求解如下包含问题得到新的迭代点 $\boldsymbol{x}^{k+1}\in R_{++}^n$：

$$\boldsymbol{\xi}^k\in\beta_k T(\boldsymbol{x})+\nabla_x D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^k),\tag{5}$$

其中

$$D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^k)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^k\|^2+\mu\displaystyle\sum_{j=1}^n\Big[(x_j^k)^2\log\frac{x_j^k}{x_j}+x_jx_j^k-(x_j^k)^2\Big], & \boldsymbol{x}\in R_{++}^n;\\ +\infty, & \boldsymbol{x}\notin R_{++}^n.\end{cases}\tag{6}$$

并且误差项 $\boldsymbol{\xi}^k$ 满足

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|\boldsymbol{\xi}^k\|<+\infty,\qquad \sum_{k=0}^{\infty}(\boldsymbol{\xi}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^k<+\infty.\tag{7}$$

注意

$$\nabla_x D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^k)=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^k)+\mu(\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{x}^{-1}),$$

其中

$$\boldsymbol{X}_k=\operatorname{diag}(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k),$$

并且 $\boldsymbol{x}^{-1}\in R^n$ 的第 j 个分量为 $\dfrac{1}{x_j}(j=1,2,\cdots,n)$. 由于 LQP 方法生成的迭代序列严格位于 R_+^n 内部，可以证明求解式(5)-(6)等价于求下列非线性方程组的正数解：

$$\beta_k F(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}-(1-\mu)\boldsymbol{x}^k-\mu\boldsymbol{X}_k^2\boldsymbol{x}^{-1}=\boldsymbol{\xi}^k.\tag{8}$$

非线性方程组(8)称为 LQP 方程组. 因此，仅需考虑式(8)以获得式(5)-(6)的正数解.

目前，基于 LQP 方程组已经提出了许多求解非线性互补问题的数值方法. 由于预测校正方法具有优良的数值表现，因而应用广泛[5-8]. 该方法每次迭代由预测步和校正步两步组成，预测步通过在一定的误差准则下近似求解 LQP 方程组(8)得到预测点. 之后，再执行校正步得到下一个迭代点.

为了更有效的求解非线性互补问题，本文提出一种有效的用于 LQP 方程组(8)的非精确误差准则，并在此基础上给出一个新的 LQP 方法. 该方法通过在新的误差准则下近似求解 LQP 方程组(8)得到预测点，再将邻点算法(4)与当前迭代点 $\boldsymbol{x}^k$ 作凸组合从而生成下一个迭代点 $\boldsymbol{x}^{k+1}$. 该方法简单、易于执行. 本文在较弱的假设下证明了所提出的方法具有全局收敛性. 数值实验表明了该方法的有效性.

1 算法及收敛性分析

算法 1

步骤：

1) 初始化. 给定常数 $\epsilon>0$，$\{c_k\}\subset[c,+\infty)$，$\mu\in(0,1)$，$\eta\in(0,1)$，$r>1$，$\alpha\in(0,1)$；任意选择初始点 $\boldsymbol{x}^0\in R_{++}^n$. 令 $k:=0$.

2) 检验停止准则. 如果

$$\|\min\{\boldsymbol{x}^k,F(\boldsymbol{x}^k)\}\|_\infty\leqslant\epsilon,$$

则停止迭代；否则，转 3).

3）预测. 寻找 $\tilde{\boldsymbol{x}}^k \in R^n_+$，使得

$$c_k F(\tilde{\boldsymbol{x}}^k) + \tilde{\boldsymbol{x}}^k - (1-\mu)\boldsymbol{x}^k - \mu X_k^2 (\tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{-1} = \boldsymbol{\xi}^k, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}^k$ 满足非精确误差准则：

$$\frac{|(\boldsymbol{\xi}^k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^k - \tilde{\boldsymbol{x}}^k)|}{\|\boldsymbol{x}^k - \tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2} \leqslant \eta(1-\mu), \qquad \frac{\|\boldsymbol{\xi}^k\|}{\|\boldsymbol{x}^k - \tilde{\boldsymbol{x}}^k\|} \leqslant r(1+\mu). \tag{10}$$

4）校正. 生成新的迭代点：

$$\boldsymbol{x}^{k+1}(\tau) = \alpha \boldsymbol{x}^k + (1-\alpha) P_{R^n_+}\left[\boldsymbol{x}^k - \frac{\tau c_k}{1+\mu} F(\tilde{\boldsymbol{x}}^k)\right]. \tag{11}$$

令 $k:=k+1$，转 2).

引理 1　令 $P_{R^n_+}(\cdot)$ 表示欧式范数下的投影，则

$$[\boldsymbol{v} - P_{R^n_+}(\boldsymbol{v})]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{u} - P_{R^n_+}(\boldsymbol{v})] \leqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{u} \in R^n_+, \quad \forall \boldsymbol{v} \in R^n; \tag{12}$$

$$\|P_{R^n_+}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{u}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v} - P_{R^n_+}(\boldsymbol{v})\|^2, \quad \forall \boldsymbol{u} \in R^n_+, \quad \forall \boldsymbol{v} \in R^n. \tag{13}$$

引理 2[5-6]　给定 $\boldsymbol{x}^k \in R^n_{++}$ 和 $c_k > 0$，且 $\tilde{\boldsymbol{x}}^k$ 和 $\boldsymbol{\xi}^k$ 满足式(9)，(10)，则对任意的 $\boldsymbol{x} \in R^n_+$，有

$$(\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\xi}^k - c_k F(\tilde{\boldsymbol{x}}^k)] \geqslant \frac{1+\mu}{2}(\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2 - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^k\|^2) + \frac{1-\mu}{2}\|\boldsymbol{x}^k - \tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2, \tag{14}$$

$$(\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\xi}^k - c_k F(\tilde{\boldsymbol{x}}^k)] \geqslant (\boldsymbol{x}^k - \tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}[(1+\mu)\boldsymbol{x} - (\mu \boldsymbol{x}^k + \tilde{\boldsymbol{x}}^k)]. \tag{15}$$

下面讨论如何选取步长 τ，同时给出算法 1 的收敛性分析. 为方便，记

$$\boldsymbol{x}^k_* = P_{R^n_+}\left[\boldsymbol{x}^k - \frac{\tau c_k}{1+\mu} F(\tilde{\boldsymbol{x}}^k)\right], \tag{16}$$

$$\Theta_k(\tau) = \|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^*\|^2 - \|\boldsymbol{x}^{k+1}(\tau) - \boldsymbol{x}^*\|^2, \qquad \boldsymbol{x}^* \in S^*. \tag{17}$$

引理 3　给定 $\boldsymbol{x}^k \in R^n_+$ 和 $c_k > 0$，且 $\tilde{\boldsymbol{x}}^k, \boldsymbol{\xi}^k$ 和 $\boldsymbol{x}^{k+1}(\tau)$ 满足式(9)～(11)，则对任意的 $\boldsymbol{x}^* \in S^*$ 和 $\tau > 0$，有

$$\Theta_k(\tau) \geqslant (1-\alpha)\left[\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^k_*\|^2 + 2\tau(\boldsymbol{x}^k_* - \tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^k - \frac{2\tau\mu}{1+\mu}\|\boldsymbol{x}^k - \tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2\right] \geqslant \Phi_k(\tau), \tag{18}$$

其中

$$\Phi_k(\tau) = (1-\alpha)(2\tau\varphi_k - \tau^2\|\boldsymbol{d}^k\|^2), \tag{19}$$

并且

$$\boldsymbol{d}^k = (\boldsymbol{x}^k - \tilde{\boldsymbol{x}}^k) + \frac{1}{1+\mu}\boldsymbol{\xi}^k,$$

$$\varphi_k = \frac{1}{1+\mu}\|\boldsymbol{x}^k - \tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2 + \frac{1}{1+\mu}(\boldsymbol{x}^k - \tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}^k.$$

证明：在式(13)中令 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}^*$，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}^k - \frac{\tau c_k}{1+\mu}F(\tilde{\boldsymbol{x}}^k)$，则由式(16)，得

$$\|\boldsymbol{x}^k_* - \boldsymbol{x}^*\|^2 \leqslant \left\|\boldsymbol{x}^k - \frac{\tau c_k}{1+\mu}F(\tilde{\boldsymbol{x}}^k) - \boldsymbol{x}^*\right\|^2 - \left\|\boldsymbol{x}^k - \frac{\tau c_k}{1+\mu}F(\tilde{\boldsymbol{x}}^k) - \boldsymbol{x}^k_*\right\|^2. \tag{20}$$

由

$$2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2,$$

并令 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^k_*$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}^k_* - \boldsymbol{x}^*$，有

$$2(\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^k_* - \boldsymbol{x}^*) = \|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^*\|^2 - \|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^k_*\|^2 + \|\boldsymbol{x}^k_* - \boldsymbol{x}^*\|^2. \tag{21}$$

由式(11)，(21)和(20)，得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}^{k+1}(\tau) - \boldsymbol{x}^*\|^2 &= \alpha\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^*\|^2 + (1-\alpha)\|\boldsymbol{x}^k_* - \boldsymbol{x}^*\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^k_*\|^2 \leqslant \\ &\alpha\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^*\|^2 + (1-\alpha)\left\|\boldsymbol{x}^k - \frac{\tau c_k}{1+\mu}F(\tilde{\boldsymbol{x}}^k) - \boldsymbol{x}^*\right\|^2 - \\ &(1-\alpha)\left\|\boldsymbol{x}^k - \frac{\tau c_k}{1+\mu}F(\tilde{\boldsymbol{x}}^k) - \boldsymbol{x}^k_*\right\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^k_*\|^2.\end{aligned} \tag{22}$$

利用 $\Theta_k(\tau)$ 的定义, 并由式(22)可得

$$\Theta_k(\tau) \geqslant (1-\alpha^2)\|\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{x}_*^k\|^2+\frac{2(1-\alpha)\tau c_k}{1+\mu}(\boldsymbol{x}_*^k-\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}F(\tilde{\boldsymbol{x}}^k)+\frac{2(1-\alpha)\tau c_k}{1+\mu}(\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}F(\tilde{\boldsymbol{x}}^k). \tag{23}$$

由于 $\tilde{\boldsymbol{x}}^k\in R_+^n$ 且 $\boldsymbol{x}^*\in S^*$, 利用 F 的拟单调性, 有

$$(\tilde{\boldsymbol{x}}^k-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}F(\boldsymbol{x}^*)\geqslant 0 \Rightarrow (\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}F(\tilde{\boldsymbol{x}}^k)\geqslant(\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}F(\tilde{\boldsymbol{x}}^k).$$

进而, 式(23)可化为

$$\Theta_k(\tau)\geqslant(1-\alpha)\Big[\|\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{x}_*^k\|^2+\frac{2\tau c_k}{1+\mu}(\boldsymbol{x}_*^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}F(\tilde{\boldsymbol{x}}^k)\Big]. \tag{24}$$

在引理2中取 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_*^k$, 由式(14), 得

$$(\boldsymbol{x}_*^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}\Big\{\frac{1}{1+\mu}[\boldsymbol{\xi}^k-c_kF(\tilde{\boldsymbol{x}}^k)]\Big\}\leqslant\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}_*^k-\boldsymbol{x}^k\|^2-\|\boldsymbol{x}_*^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2)-\frac{1-\mu}{2(1+\mu)}\|\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2. \tag{25}$$

类似式(21), 有

$$(\boldsymbol{x}_*^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k)=\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}_*^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2-\|\boldsymbol{x}_*^k-\boldsymbol{x}^k\|^2)+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2. \tag{26}$$

将式(25)与(26)相加, 并在不等式两端同时乘以 $2\tau(1-\alpha)$, 得

$$2\tau(1-\alpha)(\boldsymbol{x}_*^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}\Big\{(\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k)+\frac{1}{1+\mu}[\boldsymbol{\xi}^k-c_kF(\tilde{\boldsymbol{x}}^k)]\Big\}-\frac{2\tau(1-\alpha)\mu}{1+\mu}\|\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2\leqslant 0. \tag{27}$$

将式(24)与(27)相加, 再利用 $\boldsymbol{d}^k$ 和 φ_k 的定义, 即得所证结论.

显然, $\Theta_k(\tau)$ 衡量了算法1在第 $k+1$ 步相对于第 k 步的改进, 并且 $\Phi_k(\tau)$ 给出了 $\Theta_k(\tau)$ 的一个下界. 选取 τ 极大化 $\Phi_k(\tau)$, 使得每次迭代产生的下降量 $\Theta_k(\tau)$ 极大化. 由式(19)可见, $\Phi_k(\tau)$ 是关于 τ 的二次函数. 因此, 选取

$$\tau_k^*=\frac{\varphi_k}{\|\boldsymbol{d}^k\|^2}. \tag{28}$$

引理4 根据算法1的初始化要求选取 μ,η,r, 则

$$\tau_k^*\geqslant\frac{1-\eta}{(1+r^2)(1+\mu)}. \tag{29}$$

证明: 分两种情形讨论.

情形1. $(\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}^k\leqslant 0$.

由 $\boldsymbol{d}^k$ 的定义和式(10), 可得

$$\|\boldsymbol{d}^k\|^2=\Big\|(\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k)+\frac{1}{1+\mu}\boldsymbol{\xi}^k\Big\|^2\leqslant\|\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2+\frac{1}{(1+\mu)^2}\|\boldsymbol{\xi}^k\|^2\leqslant(1+r^2)\|\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2,$$

由 φ_k 的定义和式(10), 可得

$$\varphi_k=\frac{1}{1+\mu}\|\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2+\frac{1}{1+\mu}(\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}^k\geqslant\frac{1-\eta(1-\mu)}{1+\mu}\|\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2, \tag{30}$$

又由 τ_k^* 的取法即得证.

情形2. $(\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}^k>0$.

由 $\boldsymbol{d}^k,\varphi_k$ 的定义, $\mu\in(0,1)$, $r>1$ 及式(10), 有

$$(1+\mu)\varphi_k=\|\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2+(\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}^k\geqslant\frac{1}{1+r^2}\|\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k\|^2+\frac{2}{1+r^2}(\boldsymbol{x}^k-\tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}^k}{1+\mu}\Big)+\frac{1}{1+r^2}\Big\|\frac{\boldsymbol{\xi}^k}{1+\mu}\Big\|^2=\frac{1}{1+r^2}\|\boldsymbol{d}^k\|^2.$$

又由 τ_k^* 的取法即得证.

引理 4 表明 τ_k^* 有大于 0 的下界.

为了加速收敛, 将 τ_k^* 乘以松弛因子 $\gamma \in (1,2)$, 得到 τ_k, 即

$$\tau_k = \gamma \tau_k^* = \frac{\gamma[\|x^k - \tilde{x}^k\|^2 + (x^k - \tilde{x}^k)^{\mathrm{T}} \xi^k]}{(1+\mu)\|(x^k - \tilde{x}^k) + [1/(1+\mu)]\xi^k\|^2}. \tag{31}$$

基于以上引理, 有:

定理 1　假设 $x^{k+1}(\tau_k)$ 由式(9) ~ (11) 生成, 其中 τ_k 的选取如式(31), 则对于任意的 $x^* \in S^*$ 和 $\gamma \in (1,2)$, 有

$$\|x^{k+1}(\tau_k) - x^*\|^2 \leqslant \|x^k - x^*\|^2 - \frac{\gamma(2-\gamma)(1-\eta)^2(1-\mu)}{(1+r^2)(1+\mu)^3}\|x^k - \tilde{x}^k\|^2. \tag{32}$$

证明: 由引理 3、引理 4 和式(31), 即得

$$\|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1}(\tau_k) - x^*\|^2 \geqslant (1-\alpha)(2\gamma - \gamma^2)\tau_k^* \varphi_k \geqslant$$
$$\frac{\gamma(2-\gamma)(1-\eta)^2(1-\alpha)}{(1+r^2)(1+\mu)^2}\|x^k - \tilde{x}^k\|^2.$$

定理 1 对算法 1 的全局收敛性证明至关重要, 它表明由算法 1 生成的序列 $\{x^k\}$ 关于解集 S^* 中的点 Féjer 单调[7].

基于定理 1, 并利用式(15), 可得算法 1 的全局收敛性定理:

定理 2　如果 $\inf_{k=0}^{\infty} c_k = c > 0$, 则由算法 1 生成的序列 $\{x^k\}$ 收敛于非线性互补问题(1)的一个解.

证明类似于文献[5-8].

2　数值实验

利用 MATLAB7.0.1 编程, 将本文算法 1 与文献[5]中 PC 方法进行比较. 测试问题为文献[6-7]给出的经典非线性互补问题, 维数为 100 ~ 1 000. 算法 1 的参数选取如下:

$$\alpha = 0.01, \quad r = 1.5, \quad \gamma = 1.99, \quad c_0 = 1, \quad \eta = 0.81, \quad \mu = 0.01.$$

令停止准则中 $\epsilon = 10^{-7}$. 由于 c_k 过小会影响算法的收敛速度, 因此在算法执行中, 采用与文献[5]中类似的策略自适应的选择 c_{k+1}, 即令

$$\kappa_1 = \frac{|(\xi^k)^{\mathrm{T}}(x^k - \tilde{x}^k)|}{\|x^k - \tilde{x}^k\|^2}, \qquad \kappa_2 = \frac{\|\xi^k\|}{\|x^k - \tilde{x}^k\|},$$

并且

$$c_{k+1} = \begin{cases} c_k \cdot \dfrac{0.8}{\kappa_2}, & \kappa_1 > \eta(1-\mu) \text{ 或 } \kappa_2 > r(1+\mu), \\ c_k \cdot \dfrac{0.5}{\kappa_2}, & \kappa_2 \leqslant 0.1, \\ c_k, & \text{其他}. \end{cases}$$

实验结果列于表 1 和表 2. 表 1 给出了初始点 $x^0 = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 时的实验结果, 表 2 给出了初始点 x^0 取为 $(0,1)$ 中随机数的实验结果.

表 1　初始点 $x^0 = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 的数值实验结果

Table 1　Numerical results for $x^0 = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$

维数 n	迭代次数		CPU 运行时间/s	
	PC 方法[5]	算法 1	PC 方法[5]	算法 1
100	186	141	0.094 0	0.078 0
500	280	256	1.516 0	1.425 0
800	311	264	7.157 0	7.156 0
1 000	326	285	14.046 0	13.844 0

表2 初始点 x^0 的分量在(0,1)随机取值的数值实验结果

Table 2 Numerical results for x^0 generated uniformly in (0,1)

维数 n	迭代次数		CPU 运行时间/s	
	PC 方法[5]	算法 1	PC 方法[5]	算法 1
100	195	149	0.109 0	0.093 0
500	289	216	1.547 0	1.578 0
800	298	274	6.953 0	6.734 0
1 000	305	284	13.188 0	13.234 0

由表1和表2可见, 算法1对于一些大型的非线性互补问题仍然有效; 并且从迭代次数和运行时间可见, 算法1比文献[5]中的PC方法更有效. 同时, 表2也表明算法1对初始点的选取不敏感.

综上, 本文提出一个放松的非精确误差准则, 并且基于该准则给出了一种求解非线性互补问题的LQP方法. 该方法简单, 并且易于执行, 仅要求 F 连续拟单调即可获得全局收敛性. 数值实验表明了该方法的有效性.

参考文献

[1] Ferris M C, Pang J S. Engineering and Economic Applications of Complementarity Problems [J]. SIAM Review, 1997, 39(4): 669-713.

[2] Harker P T, Pang J S. Finite-Dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementarity Problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications [J]. Mathematical Programming, 1990, 48(1/2/3): 161-220.

[3] Martinet B. Determination Approacée D'un Point Fixe D'une Application Pseudo-Contractante [J]. Comptes Rendus Del'Académie Des Sciences Paris, 1972, 274: 163-165.

[4] Auslender A, Teboulle M, Ben-Tiba S. A Logarithmic-Quadratic Proximal Method for Variational Inequalities [J]. Computational Optimization and Applications, 1999, 12(1/2/3): 31-40.

[5] YUAN Xiao-ming. A New Criterion for the Inexact Logarithmic-Quardratic Proximal Method and Its Derived Hybrid Methods [J]. Journal of Global Optimization, 2008, 40(4): 529-543.

[6] XU Ya, HE Bing-sheng, YUAN Xiao-ming. A Hybrid Inexact Logarithmic-Quadratic Proximal Method for Nonlinear Complementarity Problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 322(1): 276-287.

[7] YUAN Xiao-ming. The Prediction-Correction Approach to Nonlinear Complementarity Problems [J]. European Journal of Operational Research, 2007, 176(3): 1357-1370.

[8] Bnouhachem A, Noor M A. An Interior Proximal Point Algorithm for Nonlinear Complementarity Problems [J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2010, 4(3): 371-380.