第49卷　第3期　　吉林大学学报(理学版)　　Vol. 49　No. 3
2011年5月　　Journal of Jilin University (Science Edition)　　May　2011

Sylow 子群的极大子群 s^*-置换嵌入的有限群

李长稳[1]，於　遒[2]
(1. 徐州师范大学 数学科学学院，江苏 徐州 221116；2. 淮海工学院 理学院，江苏 连云港 222005)

摘要：利用 Sylow 子群的极大子群的 s^*-置换嵌入性研究有限群的 p-幂零性和超可解性，并给出了一个群属于给定的饱和群系的新的判别准则.

关键词：s^*-置换嵌入；s-置换；p-幂零；超可解
中图分类号：O152　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2011)03-0409-03

Finite Groups with the Maximal Subgroups of Sylow Subgroup s^*-Permutably Embedded

LI Chang-wen[1], YU Qiu[2]
(1. *School of Mathematical Science, Xuzhou Normal University, Xuzhou* 221116, *Jiangsu Province, China*;
2. *School of Science, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang* 222005, *Jiangsu Province, China*)

Abstract: The p-nilpotency and supersolvability of finite groups were investigated by means of the s^*-permutably embedding property of maximal subgroups of Sylow subgroup. Meanwhile, a new criterion of a group belongs to a given saturated formation was obtained.

Key words: s^*-permutably embedded; s-permutable; p-nilpotent; supersolvable

如果群 G 的一个子群 H 与 G 的每个 Sylow 子群可换，则 H 称为在 G 中 s-置换. Ballester-Bolinches 等[1]将 s-置换子群推广为 s-置换嵌入子群；文献[2-3]分别引入了 c-正规和 c-可补子群的概念；文献[4]将 c-正规和 s-置换嵌入子群推广为 c^*-正规子群；文献[5]将 c-正规和 s-置换子群推广为弱s-置换和弱 s-可补子群；文献[6]将 c^*-正规子群推广为弱 s-置换嵌入子群. 本文在上述研究的基础上，通过引入 s^*-置换嵌入子群，统一并推广了上述一系列子群.

定义 1　如果群 G 存在一个子群 T 和包含在子群 H 中 G 的一个 s-置换嵌入子群 H_{se}，使得$G=HT$，且 $H\cap T\leqslant H_{se}$，则称群 G 的子群 H 在 G 中 s^*-置换嵌入.

引理 1　设 $H\leqslant G$，H 在 G 中 s^*-置换嵌入.

1) 若 $H\leqslant L\leqslant G$，则 H 在 L 中 s^*-置换嵌入；

2) 若 $N\lhd G$ 且 $N\leqslant H\leqslant G$，则 H/N 在 G/N 中 s^*-置换嵌入；

3) 若 H 为 G 的 π-子群，N 为 G 的正规 π'-子群，则 HN/N 在 G/N 中 s^*-置换嵌入.

定理 1　设 P 是 G 的一个 Sylow p-子群，其中 p 是$|G|$的一个素因子，满足$(|G|,p-1)=1$，则下列条件等价：

1) G 是 p-幂零群；

2) G 是 p-可解群，且 P 的任意极大子群在 G 中 s^*-置换嵌入.

收稿日期：2010-02-24.

作者简介：李长稳(1978—)，男，汉族，硕士，讲师，从事群论的研究，E-mail：lcwxz@xznu.edu.cn. 通讯作者：於　遒(1968—)，男，汉族，博士，副教授，从事群论的研究，E-mail：property1111@yahoo.com.cn.

基金项目：国家自然科学基金(批准号：11071229).

证明：1)⇒2)．因为 G 是 p-幂零群，所以 G 是 p-可解群．如果 $G=P$，则显然 P 的任意极大子群在 G 中正规，当然 s^*-置换嵌入．不妨设 $G=PK$，其中 K 是 G 的正规 p-补．设 P_1 是 P 的任意极大子群，则 $|G:P_1K|=p$．由文献[4]中引理2.8知 $P_1K\lhd G$，故 P_1 在 G 中 s-置换嵌入，从而 s^*-置换嵌入．

2)⇒1)．假设定理不成立，G 为极小阶反例．

① G 有唯一的极小正规子群 N，使得 G/N 是 p-幂零的，且 $\Phi(G)=1$．

设 N 是 G 的一个极小正规子群，且 M_1/N 是 PN/N 的任一极大子群，则 $M_1=(M_1\cap P)N$．设 $P_1=M_1\cap P$，则 P_1 是 P 的极大子群．由于 G 是 p-可解群，所以 N 是初等交换 p-群或 p'-群．若 N 是 p'-群，则 $M_1/N=P_1N/N$．若 N 是 p-群，则 $M_1/N=P_1/N$．由定理假设，P_1 在 G 中 s^*-置换嵌入．由引理1知，M_1/N 在 G/N 中 s^*-置换嵌入．从而 G/N 满足定理的假设．由 G 的极小选择知 G/N 是 p-幂零的．由于 p-幂零群系是饱和群系，从而 N 的唯一性及 $\Phi(G)=1$ 显然．

② $O_{p'}(G)=1$．

若 $O_{p'}(G)\neq 1$，则由①知 $N\leqslant O_{p'}(G)$，$G/O_{p'}(G)$ 是 p-幂零群，从而 G 是 p-幂零群，矛盾．

③ P 的任意极大子群在 G 中有 p-幂零补充．

由①知 $N\leqslant O_p(G)$，且存在 G 的一个极大子群 M，使得 $G=NM$，且 $G/N\cong M$ 是 p-幂零的．由于 $O_p(G)\cap M\lhd G$，故 $O_p(G)\cap M=1$，从而 $N=O_p(G)$．设 P_1 是 P 的任意极大子群．由定理假设，P_1 在 G 中 s^*-置换嵌入．于是，存在 G 的一个子群 T 和包含在 P_1 中 G 的一个 s-置换嵌入子群 $(P_1)_{se}$，使得 $G=P_1T$ 且 $P_1\cap T\leqslant(P_1)_{se}$．既然 $(P_1)_{se}$ 在 G 中 s-置换嵌入，则存在 G 的一个 s-置换子群 K，使得 $(P_1)_{se}$ 为 K 的 Sylow p-子群．若 $K_G\neq 1$，则 $N\leqslant K_G\leqslant K$，从而 $N\leqslant(P_1)_{se}\leqslant P_1$，$G=NM=P_1M$，即 P_1 在 G 中有 p-幂零补充 M．若 $K_G=1$，则由文献[6]中引理2.3知，$(P_1)_{se}$ 在 G 中 s-置换．由文献[6]中引理2.1和由文献[7]中推论1.10.17知，$O^p(G)\leqslant N_G((P_1)_{se})$，且 $P_1\cap T\leqslant(P_1)_{se}\leqslant O_p(G)=N$．因此 $(P_1)_{se}\leqslant P_1\cap N$，从而

$$(P_1)_{se}\leqslant((P_1)_{se})^G=((P_1)_{se})^{O^p(G)P}=((P_1)_{se})^P\leqslant(P_1\cap N)^P=P_1\cap N\leqslant N,$$

故 $((P_1)_{se})^G=1$ 或 $((P_1)_{se})^G=P_1\cap N=N$．如果 $((P_1)_{se})^G=1$，则 $P_1\cap T=1$，从而 T 有 p 阶循环Sylow p-子群．由文献[8]中引理1中(5)知，T 是 p-幂零的，即 P_1 在 G 中有 p-幂零补充 T．如果 $((P_1)_{se})^G=P_1\cap N=N$，则 $N\leqslant P_1$，同理 P_1 在 G 中有 p-幂零补充 M．

④ 设 P_1 是 P 的一个极大子群．由③知 P_1 在 G 中有 p-幂零补充 K_1．设 $K_{1p'}$ 是 K_1 的一个正规 p-补，则 $G=P_1K_1=P_1N_G(K_{1p'})$．显然 $N_G(K_{1p'})\neq G$，否则 G 是 p-幂零群，与 G 的选取矛盾．如果 $P\leqslant N_G(K_{1p'})$，则 $N_G(K_{1p'})=G$，矛盾，所以 $P\cap N_G(K_{1p'})<P$．可取包含 $P\cap N_G(K_{1p'})$ 的 P 的极大子群 P_2．显然 $P_1\neq P_2$．由③知，P_2 在 G 中有 p-幂零补充 K_2．设 $K_{2p'}$ 是 K_2 的一个正规 p-补，则 $G=P_2K_2=P_2N_G(K_{2p'})$．由于 $K_{1p'}$ 和 $K_{2p'}$ 都是 G 的一个 Hall p'-子群，而 G 是 p-可解的，故 $K_{1p'}$ 和 $K_{2p'}$ 在 G 中共轭．因为 $G=P_2K_2$ 且 $K_{2p'}\lhd K_2$，所以存在 $g\in P_2$，使得 $K_{2p'}^g=K_{1p'}$．从而

$$G=(P_2N_G(K_{2p'}))^g=P_2N_G(K_{1p'}),\qquad P=P\cap G=P\cap P_2N_G(K_{1p'})=P_2(P\cap N_G(K_{1p'}))=P_2,$$

矛盾．

定理2 设 G 为有限群，p 为 $|G|$ 的素因子，且满足 $(|G|,p-1)=1$．如果存在 G 的一个 p-可解正规子群 H，使得 G/H 为 p-幂零群，并且 H 的 Sylow p-子群 P 的任意极大子群在 G 中 s^*-置换嵌入，则 G 是 p-幂零群．

证明：由引理1知，H 的 Sylow p-子群 P 的任意极大子群在 H 中 s^*-置换嵌入．由定理1，H 是 p-幂零群．设 $H_{p'}$ 是 H 的正规 p-补．由于 $H_{p'}\ \mathrm{char}\ H\trianglelefteq G$，故 $H_{p'}\trianglelefteq G$．若 $H_{p'}\neq 1$，考虑商群 $G/H_{p'}$，$(G/H_{p'})/(H/H_{p'})\cong G/H$ 是 p-幂零群．$PH_{p'}/H_{p'}$ 是 $H/H_{p'}$ 的 Sylow p-子群．设 $M/H_{p'}$ 是 $PH_{p'}/H_{p'}$ 的极大子群，则 $M=P_1H_{p'}$，其中 P_1 是 P 的极大子群．由引理1，$M/H_{p'}$ 在 $G/H_{p'}$ 中 s^*-置换嵌入．$G/H_{p'}$ 满足定理条件，因此，$G/H_{p'}$ 是 p-幂零群，从而 G 是 p-幂零群．下设 $H_{p'}=1$，即 H 是 p-群．设 K/H 是 G/H 的正规 p-补．由 Schur-Zassenhaus 定理知，存在 K 的 Hall p'-子群 $K_{p'}$，使得 $K=HK_{p'}$．由定理1，K 是 p-幂零的，故 $K_{p'}\lhd K$．由于 $K_{p'}\ \mathrm{char}\ K\lhd G$，故 $K_{p'}\lhd G$．显然 $K_{p'}$ 也是 G 的 p-补，所以 G 是 p-幂零群．

定理 3　设 $\mathscr{F}$ 是包含所有超可解群的饱和群系，H 是群 G 的可解正规子群，使得 $G/H\in\mathscr{F}$. 如果 H 的每个 Sylow 子群的极大子群在 G 中 s^*-置换嵌入，则 $G\in\mathscr{F}$.

证明：假设定理不成立，并设 G 为极小阶反例，则由引理 1 和定理 1 知，H 是 Sylow 塔群. 设 p 为 $|H|$ 的最大素因子，P 为 H 的 Sylow p-子群，则 $P\ \mathrm{char}\ H\lhd G$，因而 $P\lhd G$. 现设 N 是 G 的包含在 P 中的极小正规子群.

1）$P=N$ 非循环. 考虑商群 G/N. 设 $q\in\pi(G/N)$，且 T/N 是 H/N 的 Sylow q-子群. 如果 $p=q$，则 $P=T$ 是 H 的 Sylow q-子群. 对于 T/N 的一个极大子群 P_1/N，P_1 也是 P 的一个极大子群. 由定理条件和引理 1 知，P_1/N 在 G/N 中 s^*-置换嵌入. 设 $p\neq q$，则 T/N 的极大子群可表示为 Q_1N/N，其中 Q_1 是 H 的某个 Sylow q-子群的极大子群. 同理由定理条件和引理 1 知，Q_1N/N 在 G/N 中 s^*-置换嵌入. 又

$$G/H\cong(G/N)/(H/N)\in\mathscr{F},$$

表明 G/N 满足定理条件. 由 G 的选取知 $G/N\in\mathscr{F}$. 若 G 还有另一个包含于 P 的极小正规子群 R，类似可证明 $G/R\in\mathscr{F}$. 此时 $G\cong G/(N\cap R)$ 是超可解群，矛盾. 若 $N\leqslant\Phi(G)$，则

$$G/\Phi(G)\cong(G/N)/(\Phi(G)/N)\in\mathscr{F},$$

再由 $\mathscr{F}$ 的饱和性知 $G\in\mathscr{F}$, 矛盾. 于是 N 是 G 的包含在 P 中的唯一极小正规子群，且 $N\not\leqslant\Phi(G)$. 由文献[9]中引理 2.6 知，$P=F(P)=N$. 如果 N 循环，则由文献[5]中引理 2.16 知 $G\in\mathscr{F}$, 矛盾.

2）因为 $N\lhd G$，可取 N 的极大子群 N_1，使得 $N_1\lhd G_p$，其中 G_p 是 G 的 Sylow p-子群. 由假设，N_1 在 G 中 s^*-置换嵌入，从而存在 G 的一个子群 T 和包含在 N_1 中的 G 的一个 s-置换嵌入子群 $(N_1)_{se}$，使得 $G=N_1T$，且 $N_1\cap T\leqslant(N_1)_{se}$. 于是 $G=NT$，且 $N=N\cap N_1T=N_1(N\cap T)$. 因为 N 是交换群，所以 $N\cap T\lhd G$. 由 N 的极小正规性知，$N\cap T=1$ 或 $N\cap T=N$. 若 $N\cap T=1$，则 $N=N_1$，矛盾. 若 $N\cap T=N$，则 $N\leqslant T$，$T=G$，从而 $N_1=(N_1)_{se}$ 在 G 中 s-置换嵌入. 由文献[6]中引理 2.4 知，N_1 在 G 中 s-置换. 又由文献[6]中引理 2.1 知，$O^p(G)\leqslant N_G(N_1)$. 因此 $N_1\lhd G_pO^p(G)=G$，故 $N_1=1$，N 是 p 阶循环群，矛盾.

参 考 文 献

[1] Ballester-Bolinches A, Pedraza-Aguilera M C. Sufficient Conditions for Supersolvability of Finite Groups [J]. J Pure Appl Algebra, 1998, 127: 113-118.

[2] WANG Yan-ming. C-Normality of Groups and Its Properties [J]. J Algebra, 1996, 180(3): 954-965.

[3] WANG Yan-ming. Finite Group with Some Subgroups of Sylow Subgroups c-Supplemented [J]. J Algebra, 2000, 224(2): 467-478.

[4] WEI Hua-qun, WANG Yan-ming. On c^*-Normality and Its Properties [J]. J Group Theory, 2007, 10(2): 211-223.

[5] Skiba A N. On Weakly s-Permutable Subgroups of Finite Groups [J]. J Algebra, 2007, 315(1): 192-209.

[6] LI Yang-ming, QIAO Shou-hong, WANG Yan-ming. On Weakly s-Permutably Embedded Subgroups of Finite Groups [J]. Comm Algebra, 2009, 37(3): 1086-1097.

[7] GUO Wen-bin. The Theory of Classes of Groups [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[8] LIU Xiao-lei, WANG Yan-ming. On p-Nilpotence of FinIte Groups [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2009, 47(3): 523-526. (刘晓蕾, 王燕鸣. 有限群的 p 幂零性的一个注记 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2009, 47(3): 523-526.)

[9] LI De-yu, GUO Xiu-yun. The Influence of c-Normality of Subgroups on the Structure of Finite Groups [J]. J Pure Appl Algebra, 2000, 150(1): 53-60.