第49卷 第3期 吉林大学学报(理学版) Vol. 49 No. 3
2011年5月 Journal of Jilin University (Science Edition) May 2011

一类时滞脉冲微分方程的3个正周期解

汪代明[1], 冯春华[2]

(1. 阜阳师范学院 数学与计算科学学院, 安徽 阜阳 236041; 2. 广西师范大学 数学科学学院, 广西 桂林 541004)

摘要: 运用 Leggett-Williams 不动点定理研究一类含有时滞的脉冲微分方程的周期解, 得到了其至少存在3个正周期解的新的充分条件.

关键词: 时滞微分方程; 脉冲; 不动点定理; 周期解; 存在性

中图分类号: O175.14 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)03-0391-06

Three Positive Periodic Solutions to a Kind of Impulsive Differential Equations with Delay

WANG Dai-ming[1], FENG Chun-hua[2]

(1. *School of Mathematics and Computational Science*, *Fuyang Normal College*, *Fuyang* 236041, *Anhui Province*, *China*;
2. *School of Mathematical Science*, *Guangxi Normal University*, *Guilin* 541004, *Guangxi Zhuang Autonomous Region*, *China*)

Abstract: By means of the Leggett-Williams fixed point theorem, the existence of positive solutions was investigated for functional differential equations with impulses and delay, with new sufficient conditions for the existence of, at least, three positive periodic solutions about the differential equations obtained.

Key words: differential equation with delay; impulse; fixed point theorem; periodic solution; existence

0 引 言

文献[1]用 Krasnoselskii 锥不动点定理研究了方程 $y'(t) = -a(t)y(t) + g(t,y(t-\tau(t)))$, 得到了其至少存在一个正周期解的充分条件. 文献[2]用 Krasnoselskii 锥不动点定理研究了方程

$$\begin{cases} y'(t) = -a(t)y(t) + g(t,y(t-\tau(t))), & t \neq t_j, \quad j \in Z, \\ y(t_j^+) = y(t_j^-) + I_j(y(t_j)), \end{cases}$$

得到了其至少存在两个或一个正周期解的充分条件. 但目前大多数关于这类方程周期解的研究主要针对此类方程的一个或两个正周期解的存在性[1-6], 而关于此类方程3个正周期解存在性的研究报道较少[7-8], 且仅局限于无脉冲的情况.

基于此, 本文研究如下有脉冲效应的时滞微分方程[2]:

$$\begin{cases} y'(t) = -a(t)y(t) + g(t,y(t-\tau(t))), & t \neq t_j, \quad j \in Z, \\ y(t_j^+) = y(t_j^-) + I_j(y(t_j)) \end{cases} \tag{1}$$

正周期解的存在性. 其中: $y(t_j^+)$ 和 $y(t_j^-)$ 分别是 $y(t_j)$ 的右极限和左极限; y 在 t_j 上左连续; $a(t) \in C(R,R)$, $a(t) > 0$; $\tau(t) \in C(R,R)$; $a(t), \tau(t), g(t,y)$ 都是 ω-周期函数, $\omega > 0$ 为常数; 存在正整数 p, 使得 $t_{j+p} = t_j + \omega$, $I_{j+p} = I_j$, $j \in Z$. 假设 $[0,\omega) \cap \{t_j : j \in Z\} = \{t_1, t_2, \cdots, t_p\}$, g: $(-\infty, \infty) \times [0, \infty)$

收稿日期: 2010-09-03.

作者简介: 汪代明(1979—), 女, 汉族, 硕士, 讲师, 从事微分方程的研究, E-mail: 15855588446@139.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10961005)和安徽省高校自然科学研究项目(批准号: KJ2011Z290).

$\to[0,\infty)$和I_j: $[0,\infty)\to[0,\infty)$是连续的.

本文运用 Leggett-Williams 不动点定理得到了方程(1)至少存在3个正周期解的充分条件, 并将方程(1)的条件“$a(t)>0$”放宽为“$\int_0^{\omega}a(s)\mathrm{d}s>0$”, 从而推广了文献[2]的主要结果.

1 主要结果

考虑如下线性问题:

$$\begin{cases} y'(t)=-a(t)y(t)+\sigma(t), & t\neq t_j,\quad j\in Z,\\ y(t_j^+)=y(t_j^-)+I_j(y(t_j)), & t=t_j, \end{cases}\tag{2}$$

其中: $\sigma(t)\in C(R,[0,\infty))$是一个$\omega$-周期函数; $a(t)\in C(R,R)$, $\int_0^{\omega}a(s)\mathrm{d}s>0$, $a(t)=a(t+\omega)$; 其余参数满足方程(1)的假设条件.

引理1 $y(t)$是方程(2)的ω-周期解等价于$y(t)$是如下方程的ω-周期解:

$$y(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)\sigma(s)\mathrm{d}s+\sum_{j:\,t_j\in[t,t+\omega)}G(t,t_j)I_j(y(t_j)),\tag{3}$$

其中

$$G(t,s)=\frac{\exp\left\{\int_t^s a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}}{\exp\left\{\int_0^{\omega}a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}-1}.\tag{4}$$

引理1的证明方法与文献[3]中引理2.1的证明方法类似, 故略.

定义$PC(R)=\{y:R\to R\mid y\in C(t_j,t_{j+1}),\ y(t_j^-)=y(t_j),\ y(t_j^+)\ \exists\ j\in Z\}$. 令

$$X=\{y(t): y(t)\in PC(R),\ y(t+\omega)=y(t)\},$$

并设$\|y\|=\sup\limits_{t\in[0,\omega]}\{|y(t)|: y\in X\}$, 则$X$在$\|\cdot\|$下是 Banach 空间.

引理2 方程(2)的解$y(t)$满足$y(t)\geqslant\sigma\|y\|$, 其中$\sigma=\dfrac{A}{B}=\exp\left\{-\int_0^{\omega}|a(\xi)|\mathrm{d}\xi\right\}$.

证明: 令$a_-(t)=\max\{0,-a(t)\}$, $a_+(t)=\max\{0,a(t)\}$, 则$|a(t)|=a_-(t)+a_+(t)$, $a(t)=-a_-(t)+a_+(t)$. 如果$y(t)$是方程(2)的一个ω-周期解, 则由引理1知,

$$y(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)\sigma(s)\mathrm{d}s+\sum_{j:\,t_j\in[t,t+\omega)}G(t,t_j)I_j(y(t_j)),$$

因为

$$G(t,s)=\frac{\exp\left\{\int_t^s a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}}{\exp\left\{\int_0^{\omega}a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}-1}\leqslant\frac{\exp\left\{\int_0^{\omega}a_+(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}}{\exp\left\{\int_0^{\omega}a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}-1}:=B,\qquad t\leqslant s\leqslant t+\omega,\tag{5}$$

$$G(t,s)=\frac{\exp\left\{\int_t^s a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}}{\exp\left\{\int_0^{\omega}a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}-1}\geqslant\frac{\exp\left\{-\int_0^{\omega}a_-(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}}{\exp\left\{\int_0^{\omega}a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}-1}:=A,\qquad t\leqslant s\leqslant t+\omega,\tag{6}$$

所以有

$$\|y\|\leqslant\frac{\exp\left\{\int_0^{\omega}a_+(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}}{\exp\left\{\int_0^{\omega}a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}-1}\left[\int_0^{\omega}\sigma(s)\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{p}I_j(y(t_j))\right],\tag{7}$$

$$y(t)\geqslant\frac{\exp\left\{-\int_0^{\omega}a_-(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}}{\exp\left\{\int_0^{\omega}a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}-1}\left[\int_0^{\omega}\sigma(s)\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{p}I_j(y(t_j))\right].\tag{8}$$

由式(5)和(6)可知,

$$y(t) \geq \frac{\exp\left\{-\int_0^\omega a_-(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}}{\exp\left\{\int_0^\omega a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}-1}\cdot\frac{\exp\left\{\int_0^\omega a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}-1}{\exp\left\{\int_0^\omega a_+(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}}\|y\| = \frac{\exp\left\{-\int_0^\omega a_-(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}}{\exp\left\{\int_0^\omega a_+(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}}\|y\| = \sigma\|y\|.$$

由引理 1 和引理 2，有：

引理 3　$y(t)$是方程(1)在假设条件“$a(t)>0$”放宽为“$\int_0^\omega a(s)\mathrm{d}s>0$”情形下的 ω- 周期解等价于 $y(t)$是如下方程的 ω- 周期解：

$$y(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)g(s,y(s-\tau(s)))\mathrm{d}s+\sum_{j:\,t_j\in[t,t+\omega)}G(t,t_j)I_j(y(t_j)),\tag{9}$$

且 $y(t)\geq\sigma\|y\|$，$\sigma=\dfrac{A}{B}=\exp\left\{-\int_0^\omega|a(\xi)|\mathrm{d}\xi\right\}$，其中 $G(t,s)$与式(4)的定义相同.

定义 1　设 X 是一个 Banach 空间，K 是 X 上一个非空闭子集. 如果下列条件成立，则 K 是一个锥：

1) 对 $\forall u,v\in K$ 和 $\alpha,\beta\geq 0$，有 $\alpha u+\beta v\in K$；

2) $u,-u\in K$ 当且仅当 $u=0$.

设 X 是一个 Banach 空间，$K\subset X$ 是一个锥，定义在 K 上一个凹的非负连续泛函 α 是指一个连续映射 α：$K\to[0,\infty)$，满足：

$$\alpha(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\lambda\alpha(x)+(1-\lambda)\alpha(y),\quad x,y\in K,\quad \lambda\in[0,1].$$

为方便，记

$$K_r=\{x\in K:\ \|x\|\leq r,\ r\in(0,\infty)\};\qquad K(\alpha,a,b)=\{x:\ x\in K,\ a\leq\alpha(x),\ \|x\|\leq b\}.$$

引理 4(Leggett-Williams 不动点定理)[9]　设 K 是 Banach 空间中的一个锥，A：$K_c\to K_c$ 是一个全连续算子，假设存在一个凹的非负连续泛函 α，使得 $\alpha(x)\leq\|x\|$ $(x\in K)$，且存在常数 a,b,d，使得 $0<d<a<b\leq c$，并满足下列条件：

1) $\{x\in K(\alpha,a,b):\alpha(x)>a\}\neq\emptyset$，且当 $x\in K(\alpha,a,b)$时，$\alpha(Ax)>a$；

2) 当 $x\in K_d$ 时，$\|Ax\|<d$；

3) 当 $x\in K(\alpha,a,c)$，且 $\|Ax\|>b$ 时，$\alpha(Ax)>a$.

则 A 在 K_c 上至少有 3 个不动点.

定义 X 上算子如下：

$$(\Phi y)(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)g(s,y(s-\tau(s)))\mathrm{d}s+\sum_{j:\,t_j\in[t,t+\omega)}G(t,t_j)I_j(y(t_j)),\tag{10}$$

其中：$y\in X$；$t\in R$.

由引理 3 可知，对 $\forall y\in X$，令 $K=\{y\in X:\ y(t)\geq 0,\ y(t)\geq\sigma\|y\|\}$，其中 $0<\sigma=A/B<1$，且 A,B 如式(5)和(6)所定义，则不难证明 K 是 X 中的一个锥.

引理 5　$\Phi(K)\subset K$.

证明：$y\in K$，显然有$(\Phi y)(t)\geq 0$.

$$\|(\Phi y)(t)\|\leq B\left[\int_0^\omega g(s,y(s-\tau(s)))\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^p I_j(y(t_j))\right],$$

$$(\Phi y)(t)\geq A\left[\int_0^\omega g(s,y(s-\tau(s)))\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^p I_j(y(t_j))\right],$$

从而$(\Phi y)(t)\geq\dfrac{A}{B}\|\Phi y\|=\sigma\|\Phi y\|$，故 $\Phi y\in K$. 根据 Ascoli-Arzela 定理，不难验证 Φ 是一个全连续算子.

记

$$g_*^0=\limsup_{u\to 0}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{g(t,u)}{a(t)u},\qquad g_*^\infty=\limsup_{u\to\infty}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{g(t,u)}{a(t)u},$$

$$g^0=\limsup_{u\to 0}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{g(t,u)}{|a(t)|u},\qquad g^\infty=\limsup_{u\to\infty}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{g(t,u)}{|a(t)|u},$$

$$I^0 = \limsup_{u\to 0} \sum_{j=1}^{p} \frac{I_j(u)}{u}, \qquad I^\infty = \limsup_{u\to\infty} \sum_{j=1}^{p} \frac{I_j(u)}{u}.$$

对 $\forall b>0$, 定义 $I_{(b)}(j) = \min\limits_{\sigma b\leqslant u\leqslant b} \sum\limits_{j=1}^{p} I_j(u)$.

定理1 假设如下条件成立:

(i) 存在常数 $b>0$, 使得当 $\sigma b\leqslant u\leqslant b$, $t\in R$ 时, 有$\dfrac{g(t,u)}{a(t)}+AI_{(b)}>u$;

(ii) $g_*^0+BI_*^0<1$, $g_*^\infty+BI_*^\infty<1$.

则系统(1)至少存在3个正周期解. 其中, A,B 如式(5),(6)所定义, $0<\sigma=A/B<1$.

推论1 用下列条件代替定理1中的(ii), 则定理1的结论仍成立:

(ii)′ $g_*^0=0$, $I_*^0=0$, $g_*^\infty=0$, $I_*^\infty=0$.

定理2 假设如下条件成立:

(H_1) 存在常数 $b>0$, 使得当 $\sigma b\leqslant u\leqslant b$, $t\in R$ 时, 有$\dfrac{g(t,u)}{|a(t)|}+AI_{(b)}>u$;

(H_2) $g^0+BI^0<1$, $g^\infty+BI^\infty<1$.

则系统(1)在假设条件"$a(t)>0$"放宽为"$\int_0^\omega a(s)\mathrm{d}s>0$"的情形下至少存在3个正周期解. 其中, A,B 如式(5),(6)所定义, $0<\sigma=A/B<1$.

证明: 根据 $g^\infty+BI^\infty<1$ 及 g^∞,I^∞ 的定义知, 对任意的 $0<\varepsilon<\dfrac{1-(g^\infty+BI^\infty)}{B+1}$, 存在 $C_0>b$, 使得

$$g(t,u)\leqslant (g^\infty+\varepsilon)|a(t)|u, \qquad B\sum_{j=1}^{p} I_j(u)\leqslant B(I^\infty+\varepsilon)u,$$

其中 $u>C_0$. 且

$$\int_t^{t+\omega} G(t,s)|a(s)|\mathrm{d}s \geqslant \int_t^{t+\omega} G(t,s)a(s)\mathrm{d}s = \int_t^{t+\omega} \frac{\exp\left\{\int_t^s a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}}{\exp\left\{\int_0^\omega a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}-1} a(s)\mathrm{d}s =$$
$$\frac{1}{\exp\left\{\int_0^\omega a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}-1}\left[\exp\left\{\int_t^s a(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}\right]_t^{t+\omega} = 1. \tag{11}$$

令 $C_1=C_0/\sigma$, 若 $y\in K$, $\|y\|>C_1$, 则 $y\geqslant\sigma\|y\|>C_0$. 且有

$$(\Phi y)(t) = \int_t^{t+\omega} G(t,s)g(s,y(s-\tau(s)))\mathrm{d}s + \sum_{j:\, t_j\in[t,t+\omega)} G(t,t_j)I_j(y(t_j)) \leqslant$$
$$\int_t^{t+\omega} G(t,s)(g^\infty+\varepsilon)|a(s)|y(s-\tau(s))\mathrm{d}s + B(I^\infty+\varepsilon)y(t_j) \leqslant$$
$$(g^\infty+\varepsilon)\|y\|\int_t^{t+\omega} G(t,s)|a(s)|\mathrm{d}s + B(I^\infty+\varepsilon)\|y\|.$$

由式(11), 得

$$(\Phi y)(t) \leqslant (g^\infty+\varepsilon)\|y\| + B(I^\infty+\varepsilon)\|y\| \leqslant$$
$$[(g^\infty+BI^\infty)+(B+1)\varepsilon]\|y\| < \|y\|. \tag{12}$$

取 $K_{C_1}=\{y: y\in K, \|y\|\leqslant C_1\}$, 则 K_{C_1}是一个有界集. 因为 Φ 是全连续的, 则 Φ 将有界集映成有界集, 从而存在常数 C_2, 使得 $\forall y\in K_{C_1}$, 有 $\|\Phi y\|\leqslant C_2$. 若 $C_2\leqslant C_1$, 得 Φ: $K_{C_1}\to K_{C_1}$是全连续的; 若 $C_1<C_2$, 对 $\forall y\in K_{C_2}\backslash K_{C_1}$, $\|y\|>C_1$, 根据式(12), $\|\Phi y\|<\|y\|<C_2$ 成立, 从而 Φ: $K_{C_2}\to K_{C_2}$是全连续的. 取 $c=\max\{C_1,C_2\}$, 显然 $c>b$, 则 Φ: $K_c\to K_c$ 是全连续的.

记凹的非负连续泛函 $\alpha(y) = \min\limits_{t\in[0,\omega]}|y(t)|$.

首先, 令 $a=\sigma b$, 取 $y=\dfrac{a+b}{2}$, 则 $y(t+\omega)=y(t)=\dfrac{a+b}{2}$, $y=\|y\|>\sigma\|y\|$, 故 $y\in K$, 显然有

$y\in K(\alpha,a,b)$，$\alpha(y)>a$，从而集合$\{y\in K(\alpha,a,b),\ \alpha(y)>a\}\neq\varnothing$，又根据条件$(\mathrm{H}_1)$及$I_{(b)}(j)$的定义知，如果$y\in K(\alpha,a,b)$，则$\alpha(y)\geqslant a$，且有

$$\alpha(\Phi y)=\min_{t\in[0,\omega]}\left\{\int_t^{t+\omega}G(t,s)g(s,y(s-\tau(s)))\mathrm{d}s+\sum_{j:\,t_j\in[t,t+\omega)}G(t,t_j)I_j(y(t_j))\right\}\geqslant$$
$$\min_{t\in[0,\omega]}\left\{\int_t^{t+\omega}G(t,s)g(s,y(s-\tau(s)))\mathrm{d}s+A\sum_{j=1}^{p}I_j(y(t_j))\right\}>$$
$$\min_{t\in[0,\omega]}\left\{\int_t^{t+\omega}G(t,s)|a(s)|(y(s-\tau(s))-AI_{(b)})\mathrm{d}s+AI_{(b)}\right\}\geqslant$$
$$\min_{t\in[0,\omega]}(y(s-\tau(s))-AI_{(b)})\left\{\int_t^{t+\omega}G(t,s)|a(s)|\mathrm{d}s\right\}+AI_{(b)}\geqslant$$
$$(\alpha(y)-AI_{(b)})\left\{\int_t^{t+\omega}G(t,s)|a(s)|\mathrm{d}s\right\}+AI_{(b)}.$$

根据式(11)，有$\alpha(\Phi y)>(\alpha(y)-AI_{(b)})+AI_{(b)}=\alpha(y)\geqslant a$，即$\alpha(\Phi(y))>a$. 可见，引理4的条件1)满足.

其次，根据$g^0+BI^0<1$及g^0,I^0的定义知，对任意的$0<\varepsilon<\dfrac{1-(g^0+BI^0)}{B+1}$，存在$0<d<a$，使得

$$g(t,u)\leqslant(g^0+\varepsilon)|a(t)|u,\qquad B\sum_{j=1}^{p}I_j(u)\leqslant B(I^0+\varepsilon)u,$$

其中$0\leqslant u\leqslant d$. 若$y\in K_d=\{y:\ \|y\|\leqslant d\}$，则有

$$(\Phi y)(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)g(s,y(s-\tau(s)))\mathrm{d}s+\sum_{j:\,t_j\in[t,t+\omega)}G(t,t_j)I_j(y(t_j))\leqslant$$
$$\int_t^{t+\omega}G(t,s)(g^0+\varepsilon)|a(s)|y(s-\tau(s))\mathrm{d}s+B(I^0+\varepsilon)y(t_j)\leqslant$$
$$(g^0+\varepsilon)\|y\|\int_t^{t+\omega}G(t,s)|a(s)|\mathrm{d}s+B(I^0+\varepsilon)\|y\|\leqslant$$
$$(g^0+\varepsilon)\|y\|+B(I^0+\varepsilon)\|y\|\leqslant[(g^0+BI^0)+(1+B)\varepsilon]\|y\|<\|y\|\leqslant d,$$

即引理4的条件2)满足.

最后，若$y\in K(\alpha,a,c)$，且$\|\Phi y\|>b$，则根据锥K的定义，有$\Phi y\geqslant\sigma\|\Phi y\|>\sigma b=a$，从而$\alpha(\Phi(y))=\min\limits_{t\in[0,\omega]}\{\Phi(y(t))\}>a$，即引理4的条件3)满足.

根据引理4，Φ在K_c上至少存在3个不动点，即方程(1)在假设条件“$a(t)>0$”放宽为“$\int_0^{\omega}a(s)\mathrm{d}s>0$”情形下至少存在3个正周期解.

推论2　用下列条件代替定理2中的(H_2)，则定理2的结论仍成立.

$(\mathrm{H}_2)'$ $g^0=0$，$I^0=0$，$g^{\infty}=0$，$I^{\infty}=0$.

注1　由于$a(t)>0$满足$\int_0^{\omega}a(s)\mathrm{d}s>0$，故定理1是定理2的特殊情况，且当$a(t)>0$时，定理2中的条件$\dfrac{g(t,u)}{|a(t)|}+AI_{(b)}>u$即变成了定理1中的条件$\dfrac{g(t,u)}{a(t)}+AI_{(b)}>u$，且定理2中的条件$g^0+BI^0<1$，$g^{\infty}+BI^{\infty}<1$，即变为定理1中条件$g_*^0+BI_*^0<1$，$g_*^{\infty}+BI_*^{\infty}<1$. 从而定理1得证.

2　应用实例

考虑方程

$$\begin{cases}y'(t)=-y(t)[a(t)-b(t)y(t)\mathrm{e}^{-y(t)}], & t\neq t_j,\quad j\in Z,\\ y(t_j^+)=y(t_j^-)+c_jy^3(t_j)\mathrm{e}^{-d_jy(t_j)}, & \end{cases}\tag{13}$$

其中：$a(t)\in C(R,R)$，$\int_0^{\omega}a(s)\mathrm{d}s>0$；$b(t)\in C(R,(0,\infty))$；$c_j\geqslant0$；$d_j>0$；$a(t)=a(t+\omega)$，

$b(t)=b(t+\omega)$, ω 为大于 0 的常数; 且存在一个正整数 p, 使得 $t_{j+p}=t_j+\omega$, $c_{j+p}=c_j$, $d_{j+p}=d_j$, $j\in Z$. 假设 $[0,\omega)\cap\{t_j: j\in Z\}=\{t_1,t_2,\cdots,t_p\}$, 并记 $c^l=\min\{c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots\}$, $d^m=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n,\cdots\}$. 若 $\max\limits_{t\in[0,\omega]}\dfrac{|a(t)|}{b(t)}<\sup\limits_{x\in(0,\infty)}\min\limits_{u\in[\sigma x,x]}\left\{\dfrac{u}{\mathrm{e}^u},\dfrac{u^2}{\mathrm{e}^{d^m u}}\right\}$, 其中 σ 如引理 3 中所定义, 则系统(13)至少存在3 个正周期解.

证明: 令 $g(t,u)=b(t)u^2\mathrm{e}^{-u}$, $I_j(u)=c_ju^3\mathrm{e}^{-d_ju}$, 则易验证 $g^0=0$, $I^0=0$, $g^\infty=0$, $I^\infty=0$. 即推论 2 中的$(\mathrm{H}_2)'$满足. 令 $F(x):=\min\limits_{u\in[\sigma x,x]}\left\{\dfrac{u}{\mathrm{e}^u},\dfrac{u^2}{\mathrm{e}^{d^m u}}\right\}$, $x>0$, 因为 $F(0+)=F(\infty)=0$, 所以存在 $b>0$, 使得 $F(b)=\sup\limits_{x\in(0,\infty)}F(x)$, 从而对 $\sigma b\leqslant u\leqslant b$, 有

$$\begin{aligned}\frac{g(t,u)}{|a(t)|}+AI_{(b)}&=\frac{b(t)}{|a(t)|}u^2\mathrm{e}^{-u}+A\min_{\sigma b\leqslant u\leqslant b}\sum_{j=1}^{p}c_ju^3\mathrm{e}^{-d_ju}\geqslant\frac{b(t)}{|a(t)|}u^2\mathrm{e}^{-u}+Apc^l\min_{\sigma b\leqslant u\leqslant b}u^3\mathrm{e}^{-d^mu}\geqslant\\&\left(\frac{b(t)}{|a(t)|}+Apc^l\right)u\min_{\sigma b\leqslant u\leqslant b}\{u\mathrm{e}^{-u},u^2\mathrm{e}^{-d^mu}\}\geqslant\left(\frac{b(t)}{|a(t)|}+Apc^l\right)uF(b)\geqslant\\&\left(\frac{b(t)}{|a(t)|}+Apc^l\right)u\sup_{x\in(0,\infty)}\min_{u\in[\sigma x,x]}\left\{\frac{u}{\mathrm{e}^u},\frac{u^2}{\mathrm{e}^{d^mu}}\right\}>\frac{b(t)}{|a(t)|}u\max_{t\in[0,\omega]}\frac{|a(t)|}{b(t)}\geqslant u,\quad t\in R.\end{aligned}$$

即定理 2 的条件(H_1)满足, 根据推论 2 可知, 方程(13)至少存在 3 个正周期解.

参 考 文 献

[1] WAN A-ying, JIANG Da-qing, XU Xiao-jie. A New Existence Theory for Positive Periodic Solutions to Functional Differential Equations [J]. Computers Math Appl, 2004, 47(8/9): 1257-1262.

[2] LI Xiao-yue, LIN Xiao-ning, JIANG Da-qing, et al. Existence and Multiplicity of Positive Periodic Solutions to Functional Differential Equations with Impulse Effects [J]. Nonlinear Analysis, 2005, 62(4): 683-701.

[3] LI Xiao-yue, ZHANG Xiao-ying, JIANG Da-qing. A New Existence Theory for Positive Periodic Solutions to Functional Differential Equations with Impulse Effects [J]. Computers Math Appl, 2006, 51(12): 1761-1772.

[4] WU Yue-xiang. Existence of Multiple Periodic Solutions for a Kind of Functional Differential Equations [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(2): 302-306. (武跃祥. 一类泛函微分方程多个周期正解的存在性 [J]. 工程数学学报, 2008, 25(2): 302-306.)

[5] WEN Xiang-dan, YUAN Cheng-jun, XU Yan-hua. Positive Periodic Solutions to a Kind of Delay Functional Differential Equations with Impulse Effects [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2008, 46(6): 1073-1080. (文香丹, 苑成军, 徐艳华. 一类有脉冲一阶泛函微分方程的正周期解 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2008, 46(6): 1073-1080.)

[6] CHEN Peng-yu, CHEN Qi-yu. Positive Periodic Solutions to a Kind of Impulsive Differential Equation with Delay [J]. Journal of Lanzhou Jiaotong University, 2010, 29(1): 151-153. (陈鹏玉, 陈麒玉. 一类含有时滞的脉冲微分方程的正周期解 [J]. 兰州交通大学学报, 2010, 29(1): 151-153.)

[7] KANG Shu-gui. Existence of Triple Positive Periodic Solutions for a Class of Delay Functional Differential Equations [J]. Journal of Shanxi Datong University: Natural Science, 2007, 23(1): 1-2. (康淑瑰. 一类时滞泛函微分方程三个周期正解的存在性 [J]. 山西大同大学学报: 自然科学版, 2007, 23(1): 1-2.)

[8] DU Rui-xia, LIU Ping, LUO Yong. Analysis of Positive Periodic Solutions of Nonlinear Functional Differential System with Feedback Control and a Parameter [J]. Journal of Mathematcial Study, 2010, 43(1): 1-10.

[9] Leggett R W, Williams L R. Multiple Positive Fixed Points of Nonlinear Operators on Ordered Banach Spaces [J]. Indiana University Mathematics Journal, 1979, 28(4): 673-688.