第 50 卷 第 1 期　　吉林大学学报(理学版)　　Vol. 50 No. 1
2012 年 1 月　　Journal of Jilin University (Science Edition)　　Jan 2012

混合随机阵列加权和的若干收敛性质

胡学平, 李会葆
(安庆师范学院 数学与计算科学学院, 安徽 安庆 246133)

摘要: 在 $\{a_{nk},\ 1\leqslant k\leqslant k_n,\ n\geqslant 1\}$ 一致可积的条件下, 利用 $\tilde{\rho}$ 混合、$\tilde{\varphi}$ 混合序列矩不等式和截尾法, 证明了 $\tilde{\rho}$ 混合、$\tilde{\varphi}$ 混合阵列行加权和最大值 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{j}a_{nk}X_{nk}-E\sum\limits_{k=1}^{j}a_{nk}X_{nk}\Big)$ 的弱收敛、L^r 收敛和完全收敛性.

关键词: $\tilde{\rho}$ 混合序列; $\tilde{\varphi}$ 混合序列; L^r 收敛; 完全收敛; $\{a_{nk}\}$-一致可积
中图分类号: O211.4　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1671-5489(2012)01-0049-05

Some Convergence Properties for Weighted Sum of Mixing Random Arrays

HU Xue-ping, LI Hui-bao
(*School of Mathematics and Computation Science*, *Anqing Teachers College*, *Anqing* 246133, *Anhui Province*, *China*)

Abstract: Using the moment inequality for $\tilde{\rho}$-mixing sequences, $\tilde{\varphi}$-mixing sequences and truncated method, we investigated the weak convergence, the L^r convergence and the complete convergence for weighted sum $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{j}a_{nk}X_{nk}-E\sum\limits_{k=1}^{j}a_{nk}X_{nk}\Big)$ of $\tilde{\rho}$-mixing arrays and $\tilde{\varphi}$-mixing arrays under the condition of $\{a_{nk},\ 1\leqslant k\leqslant k_n,\ n\geqslant 1\}$-uniform integrability. The results presented in this paper have extended and improved some results in related literature.

Key words: $\tilde{\rho}$-mixing sequence; $\tilde{\varphi}$-mixing sequence; L^r convergence; complete convergence; $\{a_{nk}\}$-uniform integrability

0 引　言

目前, 关于 $\tilde{\rho}$ 混合序列和 $\tilde{\varphi}$ 混合序列的研究已取得许多成果[1-5]. 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 上的随机变量序列, $\mathscr{F}_S=\sigma(X_k,\ k\in S\subset N)$ 是 σ-域, 在 $\mathscr{A}$ 中给定 σ-域 F 和 G, 令

$$\rho(F,G)=\sup\{|\mathrm{Corr}(X,Y)|;\ X\in L^2(F),\ Y\in L^2(G)\};$$

$$\varphi(F,G)=\sup\{|P(B|A)-P(B)|;\ A\in F,\ P(A)>0,\ B\in G\},$$

其中 $\mathrm{Corr}(X,Y)$ 表示随机变量 X,Y 的相关系数. 对 $k\geqslant 0$, 令

$$\tilde{\rho}(k)=\sup\{\rho(\mathscr{F}_S,\mathscr{F}_T):\text{有限子集 } S,T\subset N,\text{ 且 }\mathrm{dist}(S,T)\geqslant k\},$$

$$\tilde{\varphi}(k)=\sup\{\varphi(\mathscr{F}_S,\mathscr{F}_T):\text{有限子集 } S,T\subset N,\text{ 且 }\mathrm{dist}(S,T)\geqslant k\},$$

显然 $0\leqslant\tilde{\rho}(k+1)\leqslant\tilde{\rho}(k)\leqslant\tilde{\rho}(0)=1$, $0\leqslant\tilde{\varphi}(k+1)\leqslant\tilde{\varphi}(k)\leqslant\tilde{\varphi}(0)=1$.

定义 1[1-2]　如果存在 $k_0\geqslant 1$, 使得 $\tilde{\rho}(k_0)<1$ $(\tilde{\varphi}(k_0)<1)$, 则称随机变量序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是 $\tilde{\rho}(\tilde{\varphi})$ 混

收稿日期: 2011-03-29.
作者简介: 胡学平(1972—), 男, 汉族, 硕士, 副教授, 从事随机过程及其应用的研究, E-mail: hxpprob@yahoo.com.cn.
基金项目: 安徽省教育厅自然科学基金重点项目(批准号: Kj2010A234).

合序列.

Ordóñez[6]在研究两两独立随机变量加权和的弱收敛性时提出了$\{a_{nk}\}$-一致可积; 文献[7]在一些不同的可积条件下研究了相依序列的收敛性质.

定义 2[6] 设$\{X_{nk},1\leqslant k\leqslant k_n\uparrow\infty,n\geqslant 1\}$为一随机变量阵列, $\{a_{nk},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$为一实数阵列, 且对任意的$n\in N$, 存在常数$C>0$, 使得$\sum\limits_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|\leqslant C$. 若满足

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|E|X_{nk}|I(|X_{nk}|>x)=0,$$

则称随机阵列$\{X_{nk}\}$关于实数阵列$\{a_{nk}\}$为一致可积的, 简称为$\{a_{nk}\}$-一致可积.

若

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^rE|X_{nk}|^rI(|X_{nk}|>x)=0,\tag{1}$$

则称随机阵列$\{|X_{nk}|^r\}(r>0)$关于实数阵列$\{|a_{nk}|^r\}$为一致可积的.

易证式(1)等价于

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^rx^rP(|X_{nk}|>x)=0\text{ 或}\lim_{x\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^rxP(|X_{nk}|^r>x)=0,\tag{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^r\int_{x^r}^{\infty}P(|X_{nk}|^r>t)\mathrm{d}t=0.\tag{3}$$

注 1 定义 2 比一致可积弱, 当$a_{nk}=k_n^{-1}$时为 Cesàro 一致可积[8], 式(2)中的两个等式等价.

本文在$\{a_{nk}\}$-一致可积的条件下, 研究混合阵列形如$S_{nj}=\sum\limits_{k=1}^{j}a_{nk}X_{nk}$加权和最大值的若干性质, 从而推广了文献[3]在 Cesàro 一致可积条件下的相关结论. 本文约定c表示正常数, 且在不同之处表示不同的值, 即使在同一式中也可表示不同的值. $I(A)$为A的示性函数.

引理 1[3] 设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是$\tilde{\rho}$混合序列, $EX_n=0$, $E|X_n|^r<\infty$, $r>0$, 则存在仅依赖于r和$\tilde{\rho}$的常数c, 使得$\forall n\geqslant 1$, $\forall a\geqslant 0$, 有

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k(a)|^r\leqslant c\log^r n\sum_{i=a+1}^{a+n}E|X_i|^r,\qquad 0<r\leqslant 2.$$

引理 2[3] 设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是$\tilde{\varphi}$混合序列, $EX_n=0$, $E|X_n|^r<\infty$, $r\geqslant 1$, 则存在仅依赖于$\tilde{\varphi}$的常数c, 使得$\forall n\geqslant 1$, $\forall a\geqslant 0$, 有

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k(a)|^r\leqslant c\log^r n\sum_{i=a+1}^{a+n}E|X_i|^r,\qquad 1\leqslant r\leqslant 2.$$

1 主要结果

定理 1 设$\{X_{nk},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$是一个行$\tilde{\rho}$混合随机阵列, $\{a_{nk},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$为一实数阵列, 若对$0<p<r<2$, 满足如下条件:

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\sup\limits_{n\geqslant 1}\sum\limits_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^px^rP(|X_{nk}|>x)=0$;

(ii) $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|a_{nk}|=O(k_n^{-1/r})$, $n\to\infty$. 则$\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}(S_{nj}-ES_{nj})\xrightarrow{P}0$, $n\to\infty$.

证明: 取$x_n=k_n^{1/r}$, 对X_{nk}截尾, 记

$$X'_{nk}\triangleq X_{nk}I(|X_{nk}|\leqslant x_n),\qquad X''_{nk}\triangleq X_{nk}-X'_{nk}=X_{nk}I(|X_{nk}|>x_n),$$

$$S'_{nj}=\sum_{k=1}^{j}a_{nk}X'_{nk},\qquad S''_{nj}=\sum_{k=1}^{j}a_{nk}X''_{nk}.$$

因为

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}|S_{nj}-ES_{nj}|\geqslant\varepsilon)\leqslant P\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}|S'_{nj}-ES'_{nj}|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\Big)+P\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}|S''_{nj}-ES''_{nj}|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\Big)=:\mathrm{I}+\mathrm{II},$$

故只需证明 $\mathrm{I}\to 0$，$\mathrm{II}\to 0$. 根据 Markov 不等式、C_r-不等式及引理 1，有

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&\leqslant cE(\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}|S'_{nj}-ES'_{nj}|)^2\leqslant c\log^2k_n\sum_{k=1}^{k_n}E(a_{nk}X'_{nk})^2=c\log^2k_n\sum_{k=1}^{k_n}a_{nk}^2EX_{nk}^2I(|X_{nk}|\leqslant x_n)=\\&c\log^2k_n\sum_{k=1}^{k_n}\int_0^{x_n^2}a_{nk}^2P(X_{nk}^2I(|X_{nk}|\leqslant x_n)\geqslant t)\mathrm{d}t\leqslant\\&c\log^2k_n\sum_{k=1}^{k_n}\int_0^{x_n}(\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|a_{nk}|^{2-p})|a_{nk}|^pP(|X_{nk}|\geqslant t)t\mathrm{d}t\leqslant\\&ck_n^{(p-2)/r}\log^2k_n\sum_{k=1}^{k_n}\int_0^{x_n}|a_{nk}|^pP(|X_{nk}|\geqslant t)t\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

根据条件(i)可知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，使得当 $t>M$ 时，有 $\sup\limits_{n\geqslant1}\sum\limits_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^pP(|X_{nk}|>x)\leqslant\varepsilon x^{-r}$. 所以当 $x_n>M$时，有

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&<ck_n^{(p-2)/r}\log^2k_n\Big(\int_0^M t\sup_{n\geqslant1}\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^pP(|X_{nk}|\geqslant t)\mathrm{d}t+\int_M^{x_n}\varepsilon t^{1-r}\mathrm{d}t\Big)\leqslant\\&ck_n^{(p-2)/r}\log^2k_n(M+\varepsilon x_n^{2-r})=cMk_n^{(p-2)/r}\log^2k_n+c\varepsilon k_n^{(p-r)/r}\log^2k_n.\end{aligned}$$

从而当 $0<p<r<2$ 时，$\mathrm{I}\to0$，$n\to\infty$.

下证 $\mathrm{II}\to 0$. 由 X''_{nk}的定义及条件(i)有

$$\begin{aligned}\mathrm{II}&\leqslant cP\Big(\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}||X''_{nk}-EX''_{nk}|>\frac{\varepsilon}{2}\Big)\leqslant cP(\exists k;\ 1\leqslant k\leqslant k_n,\text{使得}|X_{nk}|>x_n)\leqslant\\&\sum_{k=1}^{k_n}P(|X_{nk}|\geqslant x_n)\to0,\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

定理 2　设$\{X_{nk},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant1\}$是一个行 $\tilde\rho$ 混合随机阵列，$\{a_{nk},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant1\}$为一实数阵列，若对 $0<p<r<2$，满足如下条件：

(i) $\sup\limits_{n\geqslant1}\sum\limits_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^pE|X_{nk}|^rI(|X_{nk}|>x)<\infty$，$x>0$；

(ii) $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|a_{nk}|=O(k_n^{-1/r})$，$n\to\infty$.

则$\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}(S_{nj}-ES_{nj})\xrightarrow{L^r}0$，$n\to\infty$.

证明：沿用定理 1 的记号，取 $x_n=k_n^{(2-r)/8}$，根据 C_r-不等式、Jensen 不等式及引理 1，有

$$\begin{aligned}&E|\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}(S_{nj}-ES_{nj})|^r\leqslant cE|\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}(S'_{nj}-ES'_{nj})|^r+cE|\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}(S''_{nj}-ES''_{nj})|^r\leqslant\\&c[E(\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}(S'_{nj}-ES'_{nj}))^2]^{r/2}+c\log^rk_n\sum_{k=1}^{k_n}E|a_{nk}X''_{nk}|^r\leqslant\\&c\Big[\log^2k_n\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^2E|X'_{nk}|^2\Big]^{r/2}+c\log^rk_n\sum_{k=1}^{k_n}E|a_{nk}X_{nk}|^rI(|X_{nk}|>x_n)\leqslant\\&c\Big[\log^2k_n\sum_{k=1}^{k_n}(\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|a_{nk}|)^2x_n^2\Big]^{r/2}+\\&c\log^rk_n\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^{r-p}|a_{nk}|^pE|X_{nk}|^rI(|X_{nk}|>x_n)\leqslant\\&c(k_n)^{(r-2)(4-p)/8}\log^rk_n+ck_n^{(p-r)/r}\log^rk_n\Big[\sup_{n\geqslant1}\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^pE|X_{nk}|^rI(|X_{nk}|>x_n)\Big],\end{aligned}$$

所以当 $0<p<r<2$ 时, 根据定理条件(i)和分析知识可证得结论.

推论1 设$\{X_{nk},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$是一个行 $\tilde{\varphi}$ 混合随机阵列, $\{a_{nk},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$为一实数阵列, 若对 $1\leqslant r<2$, $0<p<r$, 满足如下条件:

(i) $\sup\limits_{n\geqslant 1}\sum\limits_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^pE|X_{nk}|^rI(|X_{nk}|>x)<\infty$, $x>0$;

(ii) $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|a_{nk}|=O(k_n^{-1/r})$, $n\to\infty$.

则 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}(S_{nj}-ES_{nj})\xrightarrow{L^r}0$, $n\to\infty$.

证明: 根据引理2, 类似定理2证明可证.

定理3 设$\{X_{nk},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$是一个行 $\tilde{\rho}$ 混合随机阵列, $\{a_{nk},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$为一实数阵列, 且对充分大的 n, 存在正常数 L,M, 使得 $L\leqslant k_n/n\leqslant M$. 若对 $0<r<2$, $\delta>2+r$ 及 $\alpha r\geqslant 1$, 满足如下条件:

(i) $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|a_{nk}|=O(k_n^{-\alpha})$, $n\to\infty$;

(ii)

$$\lim_{x\to\infty}x^r\log^\delta x\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^{1/\alpha}P(|X_{nk}|>x)=0. \tag{4}$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}k_n^{\alpha r-2}P(\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}|S_{nj}-ES_{nj}|>\varepsilon)<\infty,\qquad \forall\varepsilon>0.$$

证明: 取 $x_n=k_n^{\alpha(2-r)/4}$, 对任意的 $\varepsilon>0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}k_n^{\alpha r-2}P(\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}|S_{nj}-ES_{nj}|>\varepsilon)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}k_n^{\alpha r-2}P\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}|S'_{nj}-ES'_{nj}|>\frac{\varepsilon}{2}\Big)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}k_n^{\alpha r-2}P\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}|S''_{nj}-ES''_{nj}|>\frac{\varepsilon}{2}\Big)=:\mathrm{I}_{n1}+\mathrm{I}_{n2}.$$

因此只需证明 $\mathrm{I}_{nk}<\infty$ $(k=1,2)$即可, 根据 Markov 不等式、引理1 及$|X_{nk}|\leqslant x_n$, 得

$$\mathrm{I}_{n1}\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}k_n^{\alpha r-2}E(\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}|S'_{nj}-ES'_{nj}|^2)\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}k_n^{\alpha r-2}\log^2k_n\sum_{k=1}^{k_n}E|a_{nk}X'_{nk}|^2\leqslant$$
$$c\sum_{n=1}^{\infty}k_n^{\alpha r-2}\log^2k_n\sum_{k=1}^{k_n}(\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}a_{nk}^2)x_n^2=c\sum_{n=1}^{\infty}k_n^{-1-\alpha(2-r)/2}\log^2k_n\leqslant$$
$$c\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1-\alpha(2-r)/2}\log^2n<\infty.$$

由 Markov 不等式及引理1, 有

$$\mathrm{I}_{n2}\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}k_n^{\alpha r-2}E(\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}|S''_{nj}-ES''_{nj}|^r)\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}k_n^{\alpha r-2}\log^rk_n\sum_{k=1}^{k_n}E|a_{nk}X''_{nk}|^r\leqslant$$
$$c\sum_{n=1}^{\infty}k_n^{\alpha r-2}\log^rk_n\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^rE|X_{nk}|^rI(|X_{nk}|>x_n)=$$
$$c\sum_{n=1}^{\infty}k_n^{\alpha r-2}\log^rk_n\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^rx_n^rP(|X_{nk}|>x_n)+$$
$$c\sum_{n=1}^{\infty}k_n^{\alpha r-2}\log^rk_n\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^r\int_{x_n^r}^{\infty}P(|X_{nk}|^r>t)\mathrm{d}t=:A_n+B_n.$$

由式(4)知, 存在 $M>0$, 使得当 $x>M$ 时, 有

$$\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^{1/\alpha}P(|X_{nk}|>x)\leqslant x^{-r}\log^{-\delta}x.$$

因为 $x_n\to\infty$，从而 $\exists n_0$，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $x_n>M$. 注意到 $\delta>2+r$，于是有

$$A_n=c\sum_{n=1}^{n_0-1}k_n^{\alpha r-2}\log^r k_n\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^r x_n^r P(|X_{nk}|>x_n)+c\sum_{n=n_0}^{\infty}k_n^{\alpha r-2}\log^r k_n\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^r x_n^r P(|X_{nk}|>x_n)\leqslant$$

$$c\sum_{n=n_0}^{\infty}k_n^{\alpha r-2}\log^r k_n\sum_{k=1}^{k_n}|\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}a_{nk}|^{r-1/\alpha}|a_{nk}|^{1/\alpha}x_n^r P(|X_{nk}|>x_n)\leqslant$$

$$c\sum_{n=n_0}^{\infty}k_n^{-1}\log^r k_n\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^{1/\alpha}x_n^r P(|X_{nk}|>x_n)\leqslant$$

$$c\sum_{n=n_0}^{\infty}k_n^{-1}\log^r k_n\log^{-\delta}x_n\leqslant c\sum_{n=n_0}^{\infty}n^{-1}\log^{r-\delta}n<\infty.$$

式(4)又等价于 $\lim\limits_{x\to\infty}x\log^\delta x\sup\limits_{n\geqslant1}\sum\limits_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^{1/\alpha}P(|X_{nk}|^r>x)=0$. 因此对以上的 n_0 及 M，有

$$B_n\leqslant c\sum_{n=n_0}^{\infty}k_n^{-1}\log^r k_n\int_{x_n^r}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^{1/\alpha}P(|X_{nk}|^r>t)\,dt\leqslant c\sum_{n=n_0}^{\infty}k_n^{-1}\log^r k_n\int_{x_n^r}^{\infty}t^{-1}\log^{-\delta}t\,dt\leqslant$$

$$c\sum_{n=n_0}^{\infty}k_n^{-1}\log^r k_n\log^{1-\delta}x_n\leqslant c\sum_{n=n_0}^{\infty}n^{-1}\log^{r+1-\delta}n<\infty.$$

推论 2　设 $\{X_{nk},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant1\}$ 是一个行 $\tilde\varphi$ 混合随机阵列，$\{a_{nk},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant1\}$ 为一实数阵列，且对充分大的 n，存在正常数 L,M，使得 $L\leqslant k_n/n\leqslant M$，若对 $1\leqslant r<2$，$\delta>2+r$ 及 $\alpha r\geqslant1$，满足如下条件：

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}x^r\log^\delta x\sup\limits_{n\geqslant1}\sum\limits_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^{1/\alpha}P(|X_{nk}|>x)=0$；

(ii) $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|a_{nk}|=O(k_n^{-\alpha})$，$n\to\infty$.

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}k_n^{\alpha r-2}P(\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}|S_{nj}-ES_{nj}|>\varepsilon)<\infty,\qquad\forall\varepsilon>0.$$

证明：根据引理 2，类似定理 3 证明可证.

参　考　文　献

[1] Bradley R C. Equivalent Mixing Conditions for Random Fields [J]. The Annals of Probability, 1993, 21(4): 1921-1926.

[2] WU Qun-ying, LIN Liang. Convergence Properties of $\tilde\varphi$-Mixing Random Sequences [J]. J of Engineering Math, 2004, 21(1): 75-80. (吴群英，林亮. $\tilde\varphi$ 混合序列的完全收敛性和强收敛性 [J]. 工程数学学报，2004，21(1): 75-80.)

[3] 吴群英. 混合序列的概率极限理论 [M]. 北京：科学出版社，2006.

[4] WU Qun-ying. Strong Convergence Rate for $\tilde\rho$-Mixing Radom Sequences with Different Distributions [J]. J Math Research Exposition, 2004, 24(1): 173-179. (吴群英. 不同分布 $\tilde\rho$ 混合序列的强收敛速度 [J]. 数学研究与评论，2004，24(1): 173-179.)

[5] GAN Shi-xin. Almost Sure Convergence for $\tilde\rho$-Mixing Random Vaiable Sequences [J]. Statis Prob Lett, 2004, 67(4): 289-298.

[6] Ordóñez C M. Convergence of Weighted Sums of Random Variables and Uniform Integrability Concerning the Weights [J]. Collect Math, 1994, 45(2): 121-132.

[7] Sung S H, Lisawadi S, Volodin A. Weak Laws of Large Numbers for Arrays under a Condition of Uniform Integrability [J]. J Korean Math Sco, 2008, 45(1): 289-300.

[8] Chandra T K. Uniform Integrability in the Cesàro Sence and the Weak Law of Large Numbers [J]. Sankhya: The Indian Yournal of Statistics: Ser A, 1989, 51: 309-317.

(责任编辑：赵立芹)