半群 $PC(n,r)$ 的幂等元秩

赵 平[1], 游泰杰[2], 徐 波[2]
(1. 贵阳医学院 基础医学院, 贵阳 550004; 2. 贵州师范大学 数学与计算机科学学院, 贵阳 550001)

摘要: 设 PC_n 是有限链 $[n]$ 上的降序且保序部分变换半群. 对任意的 $3\leqslant r\leqslant n-1$, 考虑半群 $PC(n,r)=\{\alpha\in PC_n: |\mathrm{Im}(\alpha)|\leqslant r\}$ 的秩和幂等元秩, 证明了半群 $PC(n,r)$ 是由秩为 r 的幂等元生成的, 并得到了 $PC(n,r)$ 的秩和幂等元秩均为 $\sum\limits_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}$.

关键词: 变换半群; 降序; 保序; 幂等元秩; 秩
中图分类号: O152.7　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1671-5489(2012)01-0044-05

Idempotent Rank of Semigroup $PC(n,r)$

ZHAO Ping[1], YOU Tai-jie[2], XU Bo[2]
(1. *School of Basic Medicine*, *Guiyang Medical College*, *Guiyang* 550004, *China*;
2. *School of Mathematics and Computer Science*, *Guizhou Normal University*, *Guiyang* 550001, *China*)

Abstract: Let PC_n be the semigroup of all order-decreasing and order-preserving partial transformations on a finite-chain $[n]$. For an arbitrary integer r such that $3\leqslant r\leqslant n-1$, the rank and idempotent rank of the semigroup $PC(n,r)=\{\alpha\in PC_n: |\mathrm{Im}(\alpha)|\leqslant r\}$ were studied. We showed that $PC(n,r)$ is generated by idempotents of rank r. Furthermore, we obtained that the rank and idempotent rank of $PC(n,r)$ are both equal to $\sum\limits_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}$.

Key words: transformation semigroup; order-decreasing; order-preserving; idempotent rank; rank

0 引　言

设 $[n]=\{1,2,\cdots,n\}$ 并赋予自然数的大小序, Sing_n 是 $[n]$ 上的奇异变换半群. 设 $\alpha\in\mathrm{Sing}_n$, 若对任意的 $x\in[n]$, 有 $x\alpha\leqslant x$, 则称 α 是降序的; 若对任意的 $x,y\in[n]$, $x\leqslant y\Rightarrow x\alpha\leqslant y\alpha$, 则称 α 是保序的. 设 D_n 和 O_n 分别为 Sing_n 中的所有降序变换集和所有保序变换集, 则 D_n 和 O_n 是 Sing_n 的子半群. 设 $PO_n=O_n\cup\{\alpha: \mathrm{Dom}\,\alpha\subset[n],\ (\forall x,y\in\mathrm{Dom}(\alpha))x\leqslant y\Rightarrow x\alpha\leqslant y\alpha\}$ 是保序部分变换半群(不含 $[n]$ 上的恒等变换), $PD_n=D_n\cup\{\alpha: \mathrm{Dom}(\alpha)\subset[n],\ (\forall x\in\mathrm{Dom}(\alpha))x\alpha\leqslant x\}$ 是降序部分变换半群(不含 $[n]$ 上的恒等变换). 记 $C_n=D_n\cap O_n$, $PC_n=PD_n\cap PO_n$, 则 C_n 和 PC_n 是 PO_n (或 PD_n) 的子半群, C_n 和 PC_n 分别称为降序且保序变换半群和降序且保序部分变换半群.

一个有限半群 S 的秩通常定义为: $\mathrm{rank}\ S=\min\{|A|: A\subseteq S,\langle A\rangle=S\}$. 如果 S 由它的幂等元集 E 生成, 则 S 的幂等元秩定义为: $\mathrm{id\ rank}\ S=\min\{|A|: A\subseteq E,\langle A\rangle=S\}$. 显然 $\mathrm{rank}\ S\leqslant\mathrm{id\ rank}\ S$. 对于有

收稿日期: 2011-02-19.
作者简介: 赵 平(1973—), 男, 汉族, 硕士研究生, 副教授, 从事半群理论及编码理论的研究, E-mail: zhaoping731108@hotmail.com.
基金项目: 贵州省科学技术基金(批准号: 黔科合[2010]3174).

限变换半群秩的相关研究目前已取得许多成果[1-9]．Gomes 等[1]研究了 O_n 和 PO_n 的秩和幂等元秩；Garba[2]推广了文献[1]的结果，考虑了半群 $L(n,r)=\{\alpha\in O_n：|\mathrm{Im}(\alpha)|\leqslant r\}$ 和 $M(n,r)=\{\alpha\in PO_n：|\mathrm{Im}(\alpha)|\leqslant r\}$ $(2\leqslant r\leqslant n-2)$ 的秩和幂等元秩；Higgins[3]研究了 O_n 和 C_n 的幂等元深度，并得到了 C_n 的秩和幂等元秩为 $n-1$．Laradji 等[4]证明了半群 $C(n,r)=\{\alpha\in C_n：|\mathrm{Im}(\alpha)|\leqslant r\}$ $(1\leqslant r\leqslant n-1)$ 的秩和幂等元秩均为 $\binom{n-1}{r-1}$．赵平等[8]证明了降序且保序部分变换半群 PC_n 的秩和幂等元秩均为 $2n-1$．本文考虑 PC_n 的理想：

$$PC(n,r)=\{\alpha\in PC_n：|\mathrm{Im}(\alpha)|\leqslant r\}.$$

对 $3\leqslant r\leqslant n-1$，$n\geqslant 4$，证明了半群 $PC(n,r)$ 是由秩为 r 的幂等元生成的，且它的秩和幂等元秩均是 $\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}$．

注 1　当 $r=n-1$ 时，$PC_n=PC(n,n-1)$ 且 $\sum_{k=n-1}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}=2n-1$．因此，本文的结果推广了文献[8]的结果．

1　预备知识

设 P,Q 是 $[n]$ 的非空子集，若对任意的 $a\in P$，$b\in Q$，有 $a<b$，则称 P 小于 Q，记为 $P<Q$．设 $\alpha\in PC(n,r)(PO_n)$，如果 $x<y(\forall x,y\in\mathrm{Im}(\alpha))$，显然有 $x\alpha^{-1}<y\alpha^{-1}$．因此，对任意的 $\alpha\in PC(n,r)$ $(r\geqslant 2)$，由降序性和保序性易验证 α 有如下表示法(称为 α 的标准表示)：

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_r\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r\end{pmatrix},$$

这里：$a_1<a_2<\cdots<a_r$；$A_1<A_2<\cdots<A_r$；$a_i\leqslant\min A_i$，$i=1,2,\cdots,r$.

为叙述方便，在 $PC(n,r)$ 上引入如下的二元关系：对任意的 $\alpha,\beta\in PC(n,r)$，定义

$$(\alpha,\beta)\in\mathscr{L}^{\diamond}\Leftrightarrow\mathrm{Im}(\alpha)=\mathrm{Im}(\beta),$$
$$(\alpha,\beta)\in\mathscr{R}^{\diamond}\Leftrightarrow\mathrm{Ker}(\alpha)=\mathrm{Ker}(\beta),$$
$$(\alpha,\beta)\in\mathscr{J}^{\diamond}\Leftrightarrow|\mathrm{Im}(\alpha)|=|\mathrm{Im}(\beta)|,$$

则 $\mathscr{L}^{\diamond},\mathscr{R}^{\diamond}$ 与 $\mathscr{J}^{\diamond}$ 都是 $PC(n,r)$ 上的等价关系．易见 $\mathscr{L}^{\diamond}\subseteq\mathscr{J}^{\diamond}$，$\mathscr{R}^{\diamond}\subseteq\mathscr{J}^{\diamond}$．对于 $0\leqslant k\leqslant r\leqslant n-1$，记

$$J_k^{\diamond}=\{\alpha\in PC(n,r)：|\mathrm{Im}(\alpha)|=k\},$$

则 $\mathscr{J}^{\diamond}$-类 $J_r^{\diamond},J_{r-1}^{\diamond},\cdots,J_1^{\diamond},J_0^{\diamond}$(这里 $J_0^{\diamond}$ 由空变换组成)恰好是 $PC(n,r)$ 的 $r+1$ 个 $\mathscr{J}^{\diamond}$-类.

设 A 是 $[n]$ 的子集，C 是 A 的子集，如果 C 满足：$x,y\in C$，$z\in A$ 且 $x\leqslant z\leqslant y\Rightarrow z\in C$，则称 C 是 A 上的凸子集.

如果 ρ 是 A 上的等价关系，且 ρ 的每个类都是 A 上的凸子集，则称 ρ 为 A 上的凸等价关系．如果 ρ 是 A 上的凸等价关系，且 $|A/\rho|=r$，则称 ρ 为 A 上权重为 r 的凸等价关系．对于 $0\leqslant t\leqslant r\leqslant n-1$ 和 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant n$，令

$$[s,t]=\{\alpha\in PC(n,r)：|\mathrm{Dom}(\alpha)|=s，|\mathrm{Im}(\alpha)|=t\},$$

则显然有 $J_k^{\diamond}=\bigcup_{i=k}^{n}[i,k]$．进一步，$PC(n,r)$ 的顶端 $\mathscr{J}^{\diamond}$-类 $J_r^{\diamond}$ 中 $\mathscr{L}^{\diamond}$-类的个数是 $[n]$ 中基数为 r 的子集的个数，为 $\binom{n}{r}$，$J_r^{\diamond}$ 中 $\mathscr{R}^{\diamond}$-类的个数是基数为 k(这里 $r\leqslant k\leqslant n$)的子集 A 上权重为 r 的凸等价关系 ρ 的个数，为 $\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}$.

设 S 是 $PC(n,r)$ 的子集．通常用 $E(S)$ 表示 S 中所有幂等元组成的集合．本文未定义的术语及符号请参见文献[10].

2 主要结果

定理1 设$3\leqslant r\leqslant n-1$, $n\geqslant 4$, 则

$$\operatorname{rank}(PC(n,r)) = \operatorname{id\,rank}(PC(n,r)) = \sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}.$$

引理1 设$\alpha\in PC(n,r)$, 则α是幂等元的充要条件是对任意的$t\in\operatorname{Im}(\alpha)$, 有

$$t = \min\{x: x\in t\alpha^{-1}\}.$$

证明: 由于$\alpha\in P_n$是幂等元的充要条件是对任意的$t\in\operatorname{Im}(\alpha)$, 有$t\in t\alpha^{-1}$, 因此$\alpha\in PC(n,r)$是幂等元的充要条件是对任意的$t\in\operatorname{Im}(\alpha)$, 有$t=\min\{x: x\in t\alpha^{-1}\}$(因为由$t\in t\alpha^{-1}$且$x\in t\alpha^{-1}$可推出$t=t\alpha=x\alpha\leqslant x$).

引理2 对$0\leqslant s\leqslant 1$, 有$E(J_s^{\diamond})\subseteq\langle E(J_{s+1}^{\diamond})\rangle$.

证明: 设θ是空变换, 则$J_0^{\diamond}=E(J_0^{\diamond})=\{\theta\}$. 任意取$x,y\in[n]$且$x\neq y$, 并令

$$\beta = \begin{pmatrix} x \\ x\end{pmatrix},\qquad \gamma = \begin{pmatrix} y \\ y\end{pmatrix},$$

则$\beta,\gamma\in E(J_1^{\diamond})$且$\theta=\beta\gamma$. 因此, $E(J_0^{\diamond})\subseteq\langle E(J_1^{\diamond})\rangle$. 对任意的$\alpha\in E(J_1^{\diamond})$, 不妨设$\alpha=\begin{pmatrix} A \\ a\end{pmatrix}\in E(J_1^{\diamond})$, 则由引理1知, $a=\min A$. 下面分两种情形证明$E(J_1^{\diamond})\subseteq\langle E(J_2^{\diamond})\rangle$.

1) $|A|=1$. 显然$A=\{a\}$. 取$x,y\in[n]\backslash A$且$x\neq y$, 并令

$$\beta = \begin{pmatrix} A & x \\ a & x\end{pmatrix},\qquad \gamma = \begin{pmatrix} a & y \\ a & y\end{pmatrix},$$

则$\beta,\gamma\in E(J_2^{\diamond})$且$\alpha=\beta\gamma$.

2) $|A|\geqslant 2$. 注意到$a=\min A$. 记$b=\max(A\backslash\{a\})$, 则$b\geqslant a+1$. 取$x\in[n]\backslash\{a,a+1\}$, 并令

$$\beta = \begin{pmatrix} A\backslash\{b\} & b \\ a & b\end{pmatrix},\qquad \gamma = \begin{pmatrix} \{a,a+1\} & x \\ a & x\end{pmatrix},$$

则由引理1可得, $\beta,\gamma\in E(J_2^{\diamond})$. 再注意到$b\geqslant a+1$. 若$b=a+1$, 则$\alpha=\beta\gamma$; 若$b>a+1$, 令

$$\delta = \begin{pmatrix} a & \{a+1,b\} \\ a & a+1\end{pmatrix},$$

则由引理1可得, $\delta\in E(J_2^{\diamond})$且$\alpha=\beta\delta\gamma$.

引理3 对$2\leqslant s\leqslant r-1$且$3\leqslant r\leqslant n-1$, 有$E(J_s^{\diamond})\subseteq\langle E(J_{s+1}^{\diamond})\rangle$.

证明: 任取

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_s \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s\end{pmatrix}\in E([t,s]),$$

其中: $a_1<a_2<\cdots<a_s$; $A_1<A_2<\cdots<A_s$. 则由引理1可得, $a_i=\min A_i$. 记$d=t-s$. 下面分两种情形证明$\alpha\in\langle E(J_{s+1}^{\diamond})\rangle$.

1) $d=0$. 显然α是$\operatorname{Dom}(\alpha)$上的恒等变换. 注意到$t=s\leqslant r-1\leqslant n-2$. 取$x,y\in[n]\backslash\operatorname{Dom}(\alpha)$且$x\neq y$, 并定义$\beta$和$\gamma$分别是$\operatorname{Dom}(\alpha)\cup\{x\}$和$\operatorname{Dom}(\alpha)\cup\{y\}$上的恒等变换, 则$\beta,\gamma\in E(J_{s+1}^{\diamond})$且$\alpha=\beta\gamma$.

2) $d\geqslant 1$. 显然存在$k\in\{1,2,\cdots,s\}$, 使得$|A_k|\geqslant 2$. 下面再分两种子情形:

① $|A_k|=2$. 不妨设$A_k=\{a_k,b_k\}$, 则$b_k\geqslant a_k+1$且$a_k+1\neq a_i$(因为$A_1<A_2<\cdots<A_s$且$a_i=\min A_i$). 记$B=\operatorname{Im}(\alpha)\cup\{a_k+1\}$, 则$|B|=s+1\leqslant r\leqslant n-1$, 从而$[n]\backslash B\neq\varnothing$. 取$x\in[n]\backslash B$, 并注意到$A_1<A_2<\cdots<A_s$且$a_i=\min A_i$. 再令

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_{k-1} & a_k & b_k & A_{k+1} & \cdots & A_s \\ a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k & b_k & a_{k+1} & \cdots & a_s\end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{k-1} & \{a_k,a_k+1\} & a_{k+1} & \cdots & a_s & x \\ a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_s & x\end{pmatrix},$$

则由引理 1 可得，$\beta,\gamma\in E(J_{s+1}^{\diamond})$．再注意到 $b_k\geqslant a_k+1$．若 $b_k=a_k+1$，则 $\alpha=\beta\gamma$；若 $b_k>a_k+1$，则令

$$\delta=\begin{pmatrix}a_1&\cdots&a_{k-1}&a_k&\{a_k+1,b_k\}&a_{k+1}&\cdots&a_s\\a_1&\cdots&a_{k-1}&a_k&a_k+1&a_{k+1}&\cdots&a_s\end{pmatrix},$$

则由引理 1 可得，$\delta\in E(J_{s+1}^{\diamond})$ 且 $\alpha=\beta\delta\gamma$.

② $|A_k|\geqslant 3$．注意到 $a_k=\min A_k$．设 $b_k=\min(A_k\setminus\{a_k\})$，$c_k=\min(A_k\setminus\{a_k,b_k\})$．再注意到 $A_1<A_2<\cdots<A_s$ 且 $a_i=\min A_i$，并令

$$\beta=\begin{pmatrix}A_1&\cdots&A_{k-1}&a_k&A_k\setminus\{a_k\}&A_{k+1}&\cdots&A_s\\a_1&\cdots&a_{k-1}&a_k&b_k&a_{k+1}&\cdots&a_s\end{pmatrix},$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}a_1&\cdots&a_{k-1}&\{a_k,b_k\}&c_k&a_{k+1}&\cdots&a_s\\a_1&\cdots&a_{k-1}&a_k&c_k&a_{k+1}&\cdots&a_s\end{pmatrix},$$

则由引理 1 可得，$\beta,\gamma\in E(J_{s+1}^{\diamond})$ 且 $\alpha=\beta\gamma$.

综上可知，$\alpha\in\langle E(J_{s+1}^{\diamond})\rangle$．进而，$E([t,s])\subseteq\langle E(J_{s+1}^{\diamond})\rangle$，$t\geqslant s$．再由 $E(J_s^{\diamond})=\bigcup\limits_{t=s}^{n}E([t,s])$ 可得，$E(J_s^{\diamond})\subseteq\langle E(J_{s+1}^{\diamond})\rangle$.

引理 4　对 $0\leqslant s\leqslant r\leqslant n-1$，有 $J_s^{\diamond}\subseteq\langle E(J_s^{\diamond})\rangle$.

证明：设 θ 是空变换，若 $s=0$，则显然

$$J_0^{\diamond}=E(J_0^{\diamond})=\langle E(J_0^{\diamond})\rangle=\{\theta\}.$$

若 $s=1$，任取 $\alpha=\begin{pmatrix}A\\a\end{pmatrix}\in J_1^{\diamond}$，设 $c=\min A$，则 $a\leqslant c$（因为 $\alpha\in PC(n,r)$）．令

$$\beta=\begin{pmatrix}A\\c\end{pmatrix},\qquad\gamma=\begin{pmatrix}\{a,c\}\\a\end{pmatrix},$$

则由引理 1 可得，$\beta,\gamma\in E(J_1^{\diamond})$ 且 $\alpha=\beta\gamma$．进而由 α 的任意性可得，$J_1^{\diamond}\subseteq\langle E(J_1^{\diamond})\rangle$．若 $s\geqslant 2$，任取

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1&A_2&\cdots&A_s\\a_1&a_2&\cdots&a_s\end{pmatrix}\in[t,s],$$

其中：$a_1<a_2<\cdots<a_s$；$A_1<A_2<\cdots<A_s$．设 $c_i=\min A_i(i=1,2,\cdots,s)$，则 $a_i\leqslant c_i$（因为 $\alpha\in PC(n,r)$）．再注意到 $A_1<A_2<\cdots<A_s$，并令

$$\alpha_0=\begin{pmatrix}A_1&A_2&\cdots&A_s\\c_1&c_2&\cdots&c_s\end{pmatrix},$$

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}\{a_1,c_1\}&c_2&\cdots&c_s\\a_1&c_2&\cdots&c_s\end{pmatrix},$$

$$\alpha_i=\begin{pmatrix}a_1&\cdots&a_{i-1}&\{a_i,c_i\}&c_{i+1}&\cdots&c_s\\a_1&\cdots&a_{i-1}&a_i&c_{i+1}&\cdots&c_s\end{pmatrix},\qquad i=2,3,\cdots,s-1,$$

$$\alpha_s=\begin{pmatrix}a_1&\cdots&a_{s-1}&\{a_s,c_s\}\\a_1&\cdots&a_{s-1}&a_s\end{pmatrix},$$

则由引理 1 可得，$\alpha_i\in E(J_s^{\diamond})$．容易验证

$$\alpha=\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_s.$$

因此 $\alpha\in\langle E(J_s^{\diamond})\rangle$．进而 $[t,s]\subseteq\langle E(J_s^{\diamond})\rangle$，$t\geqslant s$．再由 $J_s^{\diamond}=\bigcup\limits_{t=s}^{n}[t,s]$ 可得，$J_s^{\diamond}\subseteq\langle E(J_s^{\diamond})\rangle$.

引理 5　设 $\alpha,\beta\in PC(n,r)$，若 $(\alpha,\beta)\in\mathscr{J}^{\diamond}$，$(\alpha,\alpha\beta)\in\mathscr{J}^{\diamond}$，则 $(\alpha\beta,\beta)\in\mathscr{L}^{\diamond}$，$(\alpha,\alpha\beta)\in\mathscr{R}^{\diamond}$.

证明：对任意的 $\alpha,\beta\in PC(n,r)$，若 $(\alpha,\beta)\in\mathscr{J}^{\diamond}$，$(\alpha,\alpha\beta)\in\mathscr{J}^{\diamond}$，则

$$|\mathrm{Im}(\alpha)|=|\mathrm{Im}(\beta)|=|\mathrm{Im}(\alpha\beta)|.$$

再由 $\mathrm{Im}(\alpha\beta)\subseteq\mathrm{Im}(\beta)$ 及 $\mathrm{Ker}(\alpha)\subseteq\mathrm{Ker}(\alpha\beta)$（由 $\alpha,\beta\in PC(n,r)$ 及 $|\mathrm{Im}\,\alpha|=|\mathrm{Im}\,\alpha\beta|$ 可得，$\mathrm{Im}\,\alpha\subseteq\mathrm{Dom}\,\beta$，从而可得 $\mathrm{Ker}(\alpha)\subseteq\mathrm{Ker}(\alpha\beta)$）可得，$\mathrm{Im}(\alpha\beta)=\mathrm{Im}(\beta)$，$\mathrm{Ker}(\alpha)=\mathrm{Ker}(\alpha\beta)$．因此 $(\alpha\beta,\beta)\in\mathscr{L}^{\diamond}$，

$(\alpha,\alpha\beta)\in\mathscr{R}^{\diamond}$.

下面证明定理1. 由引理2~引理4可推出, $PC(n,r)$是由顶端$\mathscr{J}^{\diamond}$-类$J_r^{\diamond}$中的幂等元生成的, 即$PC(n,r)=\langle E(J_r^{\diamond})\rangle$. 注意到$J_r^{\diamond}$中共有$\sum\limits_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}$个$\mathscr{R}^{\diamond}$-类. 由引理5易知, $PC(n,r)$的任意一个生成集都必须覆盖$J_r^{\diamond}$中的每个$\mathscr{R}^{\diamond}$-类, 进而

$$\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}\leqslant \operatorname{rank}(PC(n,r))\leqslant \operatorname{id\,rank}(PC(n,r))\leqslant |E(J_r^{\diamond})|.$$

再由引理1知, $J_r^{\diamond}$中每个$\mathscr{R}^{\diamond}$-类仅有唯一的幂等元, 从而$|E(J_r^{\diamond})|=\sum\limits_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}$. 因此

$$\operatorname{rank}(PC(n,r))=\operatorname{id\,rank}(PC(n,r))=\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{r-1}.$$

参 考 文 献

[1] Gomes G M S, Howie J M. On the Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations [J]. Semigroup Forum, 1992, 45(1): 272-282.

[2] Garba G U. On the Idempotent Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations [J]. Portugal Math, 1994, 51: 185-204.

[3] Higgins P M. Idempotent Depth in Semigroups of Order-Preserving Mappings [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sec A, 1994, 124(5): 1045-1058.

[4] Laradji A, Umar A. On Certain Finite Semigroups of Order-Decreasing Transformations Ⅰ [J]. Semigroup Forum, 2004, 69(2): 184-200.

[5] Levi I. Nilpotent Ranks of Semigroups of Partial Transformations [J]. Semigroup Forum, 2006, 72(3): 459-476.

[6] GAO Rong-hai, XU Bo. Idempotent Rank in Decreasing-Order Finite Partial Transformation Semigroups [J]. Journal of Southwest University: Natural Science Edition, 2008, 30(8): 9-12. (高荣海, 徐波. 降序有限部分变换半群的幂等元秩 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2008, 30(8): 9-12.)

[7] XU Bo, FENG Rong-quan, GAO Rong-hai. The Rank of a Class of Transformation Semigroups [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2010, 40(8): 222-224. (徐波, 冯荣权, 高荣海. 一类变换半群的秩 [J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(8): 222-224.)

[8] ZHAO Ping, YOU Tai-jie, XU Bo, et al. Idempotent Rank in Decreasing and Order-Preserving Finite Partial Transformation Semigroups [J]. Journal of Shandong University: Natural Science, 2011, 46(4): 75-77. (赵平, 游泰杰, 徐波, 等. 降序且保序有限部分变换半群的幂等元秩 [J]. 山东大学学报: 理学版, 2011, 46(4): 75-77.)

[9] ZHAO Ping, YOU Tai-jie, XU Bo. On the Rank of the Semigroup CPO_n [J]. Journal of Southwest University: Natural Science Edition, 2011, 33(6): 106-110. (赵平, 游泰杰, 徐波. 半群CPO_n的秩 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2011, 33(6): 106-110.)

[10] Howie J M. An Introduction to Semigroup Theory [M]. London: Academic Press, 1976.

(责任编辑: 赵立芹)