云南大学学报 (自然科学版), 2007, 29 (6): 589~ 595　　CN 53- 1045/N　ISSN 0258- 7971
Journal of Yunnan University

Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Mei 对称性与 Mei 守恒量*

贾利群[1], 张　宇[2], 郑世旺[3]

(1. 江南大学 理学院, 江苏 无锡　214122; 2. 平顶山学院 电气信息工程学院, 河南 平顶山　467002;
3. 商丘师范学院 物理与信息工程系, 河南 商丘　476000)

摘要: 研究 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Mei 对称性和 Mei 守恒量. 建立 Chetaev 型约束力学系统的 Appell 方程和系统的运动微分方程; 分析 Lagrange 函数和 A 函数的关系; 讨论 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Mei 对称性和 Mei 守恒量的一般研究方法; 在群的无限小变换下, 给出 Appell 方程 Mei 对称性的定义和判据; 得到 Mei 对称性的结构方程以及 Mei 守恒量的表达式. 举例说明结果的应用.

关键词: Appell 方程; Chetaev 型约束力学系统; Mei 对称性; Mei 守恒量
中图分类号: O 316　　文献标识码: A　　文章编号: 0258- 7971(2007)06- 0589- 07

1918 年, 德国女科学家 Noether A E 揭示了对称性与守恒量之间的潜在关系[1]. 但是, Noether 理论的科学价值直到 20 世纪 70 年代才被人们真正认识. 从此, 对称性与守恒量的研究飞速发展, 并已取得丰硕成果[2~8]. 近年来, Appell 体系的对称性与守恒量的研究也有了一些初步进展. 为寻找 Appell 方程的求解途径, 梅凤翔首先由形式不变性(即 Mei 对称性) 通过 Noether 对称性间接得到了 Noether 守恒量[9]; 李仁杰和乔永芬等人由形式不变性通过 Noether 对称性间接得到了变质量完整系统的守恒量[10]; 罗绍凯由形式不变性分别通过 Noether 对称性和 Lie 对称性间接得到转动相对论完整系统 Appell 方程的守恒量[11], 罗绍凯还由形式不变性通过 Lie 对称性间接得到了一般完整系统的守恒量[12].

本文研究 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Mei 对称性和由 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量. 首先, 建立 Chetaev 型约束力学系统的 Appell 方程和系统的运动微分方程; 其次, 利用 Appell 方程和 Lagrange 方程的等价性, 分析 Lagrange 函数和 A 函数的关系, 讨论 Appell 体系中 Chetaev 型约束力学系统 Mei 对称性和 Mei 守恒量的一般研究方法; 第 3, 在群的无限小变换下, 定义系统的 Mei 对称性、弱 Mei 对称性和强 Mei 对称性, 并得到相应的判据; 第 4, 得到了 Mei 对称性的结构方程以及 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量的表达式. 最后, 给出 1 个算例, 并对本文结论进行讨论.

1　Chetaev 型约束力学系统的 Appell 方程

假设 Chetaev 型约束力学系统由 N 个质点组成, 其中第 i 个质点的质量和位矢分别为 m_i, $\boldsymbol{r}_i$, 系统的位形由 n 个广义坐标确定 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 确定, 系统所受的 g 个理想 Chetaev 型的非完整约束方程、约束对虚位移的限制条件和加速度能量分别为

$$f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, g), \tag{1}$$

* 收稿日期: 2007- 03- 30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572021).
作者简介: 贾利群(1953-), 男, 教授, 主要从事一般力学(分析力学) 方面的研究.

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, g), \tag{2}$$

$$S = S(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i^2, \tag{3}$$

(2), (3) 式以及下文均采用 Einstein 求和约定. 系统的 Appell 方程可表示为

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} = Q_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} = Q'_s + Q''_s + \Gamma_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{4}$$

其中

$$\Gamma_s = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{5}$$

$$Q_s = Q'_s + Q''_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{6}$$

λ_β 为与第 β 个约束所对应的约束乘子, Γ_s, Q'_s, Q''_s 和 $Q_s = Q_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 分别为与第 s 个广义坐标 q_s 对应的广义约束反力、广义非势力、广义有势力和广义力. 令

$$A = A(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) = S - \ddot{q}_s Q''_s, \tag{7}$$

称之为 A 函数. 由(4) 式和(7) 式, 可将系统的 Appell 方程改写为

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_s} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} - Q''_s = Q'_s + \Gamma_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{8}$$

利用微分运算规则, 由(3) 式可直接算得[12]

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s}, \tag{9}$$

将方程(9) 代入方程(8), 得

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q'_s + \Gamma_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{10}$$

即

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_s} = \Lambda_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{11}$$

其中

$$\Lambda_s = Q'_s + \Gamma_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{12}$$

可姑且称为与第 s 个广义坐标 q_s 对应的广义非势合力. 如果系统非奇异, 利用(11) 式可求出所有广义加速度 —— 系统的运动微分方程

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{13}$$

2 Lagrange 函数与 A 函数的关系

一般情况下, Lagrange 函数表述为如下形式

$$L = a_{ij}(t, \boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + b_i(t, \boldsymbol{q})\dot{q}_i + c(t, \boldsymbol{q}), \tag{14}$$

其中第 1 项对应于动能, 后 2 项与广义势能函数对应. 利用方程(10) 中的 $\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s}$ 可求出 Lagrange 函数与 A 函数的关系. 作如下运算

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = \dot{a}_{sj}\dot{q}_j + a_{sj}\ddot{q}_j + \dot{b}_s - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_s}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial b_i}{\partial q_s}\dot{q}_i - \frac{\partial c}{\partial q_s},$$

适当调整脚标, 可得

$$A = \dot{a}_{ij}\dot{q}_j\ddot{q}_i + a_{ij}\ddot{q}_j\ddot{q}_i + \dot{b}_i\ddot{q}_i - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_s}\dot{q}_i\dot{q}_j\ddot{q}_s - \frac{\partial b_i}{\partial q_s}\dot{q}_i\ddot{q}_s - \frac{\partial c}{\partial q_s}\ddot{q}_s + d(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{15}$$

显然, 如果已知 Lagrange 函数 L, 便可由此求出 A 函数. 反之亦然. 由(14), (15) 可知, (15) 式中的 $d(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$

与 Lagrange 函数 L 无关.

在 Lagrange 函数为动势结构的情况,即 $b_i = 0$, $a_{ij} = 0(i \neq j)$,若设 $a_{ss} = \mathrm{const}(i = j = s)$, $d = 0$,则有

$$L = a_{ss}\dot{q}_s^2 + c(t, \boldsymbol{q}), \tag{16}$$

$$A = a_{ss}\ddot{q}_s^2 - \frac{\partial c(t, \boldsymbol{q})}{\partial q_s}\ddot{q}_s. \tag{17}$$

其中 c 对应于势能,它不能仅为时间 t 的函数.

3　Appell 方程 Mei 对称性和 Mei 守恒量的一般研究方法

方程(10)和(11)表明,Chetaev 型约束力学系统的 Appell 方程与 Chetaev 型约束力学系统的 Lagrange 的方程等价. 假设 Lagrange 系统(10)非奇异,即 $\det(\partial^2 L/\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k) \neq 0$,则由方程(10)可求出与方程(13)相同的所有广义加速度.

由上述分析可知,由于 Appell 方程(11)与 Lagrange 方程(10)等价,所以只需要利用(14),(15)式,将 Chetaev 型非完整约束的 Lagrange 系统 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量表达式[13]中的 Lagrange 函数 L 用由(15)式决定的 $a_{ij}(t, \boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + b_i(t, \boldsymbol{q})\dot{q}_i + c(t, \boldsymbol{q})$ 代替,即可得到 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程(方程(11),(1)) Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量表达式.

4　Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Mei 对称性

引入时间和广义坐标的无限小变换

$$t^* + \Delta t,\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{18}$$

或其展开式

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}),\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{19}$$

其中, ε 为无限小参数, ξ_0, ξ_s 为无限小变换生成元. 引进无限小变换生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} \tag{20}$$

以及它的一次扩展和二次扩展

$$\tilde{X}^{(1)} = X^{(0)} + \left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s},\ \tilde{X}^{(2)} = \tilde{X}^{(1)} + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right) - \ddot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}. \tag{21}$$

其中函数对时间 t 的全导数采用沿系统运动轨道曲线的方式,有

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}. \tag{22}$$

由(19)式可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}q_s^*}{\mathrm{d}t^*} = \dfrac{\mathrm{d}q_s + \varepsilon\mathrm{d}\xi_s}{\mathrm{d}t + \varepsilon\mathrm{d}\xi_0} = \dot{q}_s + \varepsilon(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + O(\varepsilon^2),\\ \dfrac{\mathrm{d}^2q_s^*}{\mathrm{d}t^{*2}} = \ddot{q}_s + \varepsilon[(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0] + O(\varepsilon^2),\end{cases} \tag{23}$$

假设在经历无限小变换(19)后,系统的动力学函数 A, Λ_s 和 f_β 分别变为 A^*, Λ_s^* 和 f_β^*,注意到方程(11),将 A^*, Λ_s^* 和 f_β^* 在 $(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}})$ 处沿系统运动轨道曲线作 Taylor 级数展开,其中函数对时间 t 的全导数采用沿系统运动轨道曲线的方式,有

$$A^* = A\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}, \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^{*2}}\right) = A(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) +$$

$$\varepsilon\left\{\frac{\partial A}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial A}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial A}{\partial\dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + \frac{\partial A}{\partial\ddot{q}_s}[(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0]\right\} + O(\varepsilon^2),$$

$$A^* = A(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon\tilde{X}^{(2)}(A) + O(\varepsilon^2), \tag{24}$$

$$\Lambda_s^* = \Lambda_s^*\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{d\boldsymbol{q}^*}{dt^*}\right) = \Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon \tilde{X}^{(1)}(\Lambda_s) + O(\varepsilon^2) \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{25}$$

$$f_\beta^* = f_\beta\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{d\boldsymbol{q}^*}{dt^*}\right) = f_\beta\left(t, \boldsymbol{q}, \frac{d\boldsymbol{q}}{dt}\right) + \varepsilon \tilde{X}^{(1)}(f_\beta) + O(\varepsilon^2) \quad (\beta = 1, 2, \cdots, g). \tag{26}$$

定义 1　如果用经无限小变换(19) 变换后的动力学函数 A^*, Λ_s^* 代替变换前的动力学函数 A, Λ_s,, 系统的 Appell 方程(11) 的形式保持不变, 即

$$\frac{\partial A^*}{\partial \ddot{q}_s} = \Lambda_s^* \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{27}$$

则这种对称性称为 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程(方程(11), (1)) 的 Mei 对称性.

定义 2　如果用经无限小变换(19) 变换后的动力学函数 A^*, Λ_s^* 代替变换前的动力学函数 A, Λ_s, 系统的 Appell 方程(11) 和 Chetaev 型非完整约束方程(1) 的形式都保持不变, 即

$$f_\beta^* = f_\beta\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{d\boldsymbol{q}^*}{dt}\right) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, g), \tag{28}$$

和方程(11) 同时成立, 则这种对称性称为 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程(方程(11), (1)) 的弱 Mei 对称性.

容易证明, 约束方程(1) 加在虚位移 δq_s 上的条件方程(2) 可改写为下述方程

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, g; \ s = 1, 2, \cdots, n), \tag{29}$$

方程(29) 称为附加限制方程.

定义 3　如果用经无限小变换(19) 变换后的动力学函数 A^*, Λ_s^* 代替变换前的动力学函数 A, Λ_s, 系统的 Appell 方程(11) 和 Chetaev 型非完整约束方程(1) 的形式都保持不变, 并要求无限小变换生成元 ξ_0, ξ_s 满足附加限制方程(29), 则这种对称性称为 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程(方程(11), (1)) 的强 Mei 对称性.

5　Mei 对称性的判据

将(24), (25) 代入(27) 式, 忽略 ε^2 以上的高阶小项, 并利用方程(11) 可得

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}[\tilde{X}^{(2)}(A)] = \tilde{X}^{(1)}(\Lambda_s), \tag{30}$$

方程(30) 称为系统 Mei 对称性的判据方程. 由(26) 式可知, Chetaev 型非完整约束方程(1) 在变换(19) 下的不变性, 可归结为如下约束限制方程

$$\tilde{X}^{(1)}[f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})] = 0. \tag{31}$$

于是, 有

判据 1　对于给定的 A 函数和诸广义非势合力 Λ_s, 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 使判据方程(30) 成立, 则 Appell 方程在无限小变换(19) 下的不变性称为 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程(方程(11), (1)) 的 Mei 对称性.

判据 2　对于给定的 A 函数和诸广义非势合力 Λ_s, 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 使判据方程(30) 和约束限制方程(31) 成立, 则 Appell 方程在无限小变换(19) 下的不变性称为 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程(方程(11), (1)) 的弱 Mei 对称性.

判据 3　对于给定的 A 函数和诸广义非势合力 Λ_s, 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 使附加限制方程(29)、判据方程(30) 和约束限制方程(31) 成立, 则 Appell 方程在无限小变换(19) 下的不变性称为 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程(方程(11), (1)) 的强 Mei 对称性.

6　系统 Appell 方程 Mei 对称性的结构方程和 Mei 守恒量

根据 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程和 Lagrange 方程的等价性, 以及 Chetaev 型约束力学系统

Lagrange 方程的 Mei 对称性理论, 可给出如下命题[13]:

命题　如果 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程(方程(11), (1))的 Mei 对称性、弱 Mei 对称性和强 Mei 对称性的生成元 ξ_0, ξ_1 以及规范函数 $G_M = G_M(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程

$$\tilde{X}^{(1)}[a_{ij}(t, \boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + b_i(t, \boldsymbol{q})\dot{q}_i + c(t, \boldsymbol{q})]\frac{\overline{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} + \tilde{X}^{(1)}\{\tilde{X}^{(1)}[a_{ij}(t, \boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + b_i(t, \boldsymbol{q})\dot{q}_i + c(t, \boldsymbol{q})]\} + \tilde{X}^{(1)}(\Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\overline{\mathrm{d}}G_M}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{32}$$

则 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程(方程(11), (1)) 的 Mei 对称性、弱 Mei 对称性和强 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量为

$$I_M = \tilde{X}^{(1)}[a_{ij}(t, \boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + b_i(t, \boldsymbol{q})\dot{q}_i + c(t, \boldsymbol{q})]\xi_0 + \frac{\partial\tilde{X}^{(1)}[a_{ij}(t, \boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + b_i(t, \boldsymbol{q})\dot{q}_i + c(t, \boldsymbol{q})]}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_M = \text{const}. \tag{33}$$

在 Lagrange 函数为动势结构的情况下, 即 $b_i = 0$, $a_{ij} = 0(i \neq j)$, 若设 $a_{ss} = \text{const}(i = j = s)$, 注意到(16) 式, 则结构方程(32) 和守恒量(33) 式变为

$$\tilde{X}^{(1)}[a_{ss}\dot{q}_s^2 + c(t, \boldsymbol{q})]\frac{\overline{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t} + \tilde{X}^{(1)}\{\tilde{X}^{(1)}[a_{ss}\dot{q}_s^2 + c(t, \boldsymbol{q})]\} + \tilde{X}^{(1)}(\Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\overline{\mathrm{d}}G_M}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{34}$$

$$I_M = \tilde{X}^{(1)}[a_{ss}\dot{q}_s^2 + c(t, \boldsymbol{q})]\xi_0 + \frac{\partial\tilde{X}^{(1)}[a_{ss}\dot{q}_s^2 + c(t, \boldsymbol{q})]}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_M = \text{const}. \tag{35}$$

7　算　例

Chetaev 型约束力学系统的加速度能量、约束方程、有势广义力和非势广义力分别为

$$S = \frac{1}{2}(\ddot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2), \tag{36}$$

$$f = \dot{q}_1 + bt\dot{q}_2 - bq_2 + t = 0, \tag{37}$$

$$Q''_1 = Q''_2 = Q'_1 = Q'_2 = 0. \tag{38}$$

(37) 式中 b 为常量. 试研究系统 Appell 方程的 Mei 对称性和 Mei 守恒量.

由(7) 式, (38) 式和(30) 式可得

$$A = \frac{1}{2}(\ddot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2), \tag{39}$$

由(16), (17) 知, 可取 $c = 0$, 则

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2). \tag{40}$$

由方程(8), (37) 以及(5), (39) 式可得

$$\frac{\partial A}{\partial\ddot{q}_1} = \ddot{q}_1 = \Gamma_1 = \lambda, \quad \frac{\partial A}{\partial\ddot{q}_2} = \ddot{q}_2 = \Gamma_2 = \lambda bt, \tag{41}$$

由方程(37), (41) 可得

$$\lambda = -\frac{1}{1 + b^2t^2}, \tag{42}$$

(42) 式代入方程(41) 可得

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{1 + b^2t^2}, \quad \Gamma_2 = -\frac{bt}{1 + b^2t^2}, \tag{43}$$

最后, 研究 Chetaev 型约束力学系统 Appell 方程的 Mei 对称性和 Mei 守恒量. 取无限小变换生成元

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = -bt\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + bq_1 + bt, \quad \xi_2 = 1, \tag{44}$$

则可算得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1 = b,\ \tilde{X}^{(1)}\left[\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\right] = b\dot{q}_1,\ \tilde{X}^{(1)}\left\{\tilde{X}^{(1)}\left[\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\right]\right\} = b^2,$$

$$\tilde{X}^{(1)}(\Lambda_1) = \tilde{X}^{(1)}(\Lambda_2) = \tilde{X}^{(1)}(f) = 0, \tag{45}$$

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_1}[\tilde{X}^{(1)}(A)] = \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_2}[\tilde{X}^{(1)}(A)] = 0.$$

利用(44),(45)式容易验证判据方程(30)和限制方程(31)成立,由(37)和(44)式可知,附加限制方程(29)不成立.因此,由判据2可知,本算例Chetaev型约束力学系统Appell方程具有Mei对称性和弱Mei对称性.由结构方程(34)可得

$$G_M = -b^2 t, \tag{46}$$

利用(35)式可得本算例Chetaev型约束力学系统Appell方程的Mei对称性直接导致的Mei守恒量为

$$I_M = b(-bt\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + bq_1) = \text{const}. \tag{47}$$

8 结 语

Appell方程是分析力学中的一种非常重要的方程.但是,长期以来对该方程的求解成果甚少[9].本文得到了Chetaev型约束力学系统Appell方程Mei守恒量的结构方程以及Mei守恒量的表达式.

在本文中,如果非势广义力 $Q'_s = 0$, $f_\beta = f_\beta(t, \boldsymbol{q}) = 0$,Chetaev型约束力学系统的Appell方程问题就退化为Chetaev型约束的保守系统Appell方程问题;如果Chetaev型约束力学系统的Appell方程问题就退化为完整约束的保守系统Appell方程问题.显然,本文结论对这两种情况依然成立,因此本文结论具有较普遍的意义.

参考文献:

[1] NOTHER A E. Invariante variationsprobleme[J]. Nachr Akad Wiss Göttingen Math Phys, 1918, 1(2): 235-258.

[2] SANTILLI R M. Foundations of theoretical mechanics I[M]. New York: Springer Verlay, 1978.

[3] 梅凤翔. 包含伺服约束的非完整系统的Lie对称性与守恒量[J]. 物理学报, 2000, 49(7): 1 207-1 210.

[4] 葛伟宽. Poincar Chetaev方程的Noether对称性[J]. 物理学报, 2002, 51(6): 1 156-1 158.

[5] 梅凤翔. 广义Hamilton系统的Lie对称性与守恒量[J]. 物理学报, 2003, 52(5): 1 048-1 050.

[6] 贾利群, 郑世旺. 带有附加项的广义Hamilton系统的Mei对称性[J]. 物理学报, 2006, 55(8): 3 829-3 832.

[7] ZHENG Shi-wang, JIA Li-qun, YU Hong-sheng. Mei symmetry of Tzenoff equations of holonomic system[J]. Chin Phys, 2006, 15(7): 1 399-1 402.

[8] 贾利群, 张耀宇, 郑世旺. 事件空间中非Chetaev型非完整约束系统的Hojman守恒量[J]. 物理学报, 2007, 56(2): 649-654.

[9] MEI Feng-xiang. Form invariance of appell equations[J]. Chin Phys, 2001, 10(3): 177-180.

[10] 李仁杰, 乔永芬, 孟军. 变质量完整系统Gibbs-Appell方程的形式不变性[J]. 物理学报, 2002, 51(1): 1-5.

[11] 罗绍凯. 转动相对论系统的Appell方程及其形式不变性[J]. 物理学报, 2002, 51(4): 712-717.

[12] 罗绍凯. Appell方程的形式不变性与Lie对称性[J]. 长沙大学学报, 2002, 16(4): 1-3.

[13] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2004.

Mei symmetry and Mei conserved quantity for Appell equation in Chetaev constraint mechanical systems

JIA Li-qun[1], ZHANG Yao-yu[2], ZHENG Shi-wang[3]

(1. School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China;

2. Electric and Information Engineering College, Pingdingshan University, Pingdingshan 467002, China;

3. Department of Physics and Information Engineering, Shangqiu Teachers College, Shangqiu 476000, China)

Abstract: Mei symmetry and Mei conserved quantity for Appell equation in Chetaev constraint mechanical systems are investigated. Appell equations and differential equations of motion for Chetaev constraint mechanic systems are established. The relation between Lagrange function and A function is analyzed. An general research approach of Mei symmetry and Mei conserved quantity for Appell equation in Chetaev constraint mechanical system is discussed. The definition and the criterion of Mei symmetry of Appell equations under the infinitesimal transformations of groups are given. The constructional equation of Mei symmetry and the expression of Mei conserved quantity are also obtained. An example is given to illustrate the application of the results.

Key words: Appell equation; Chetaev constraint mechanical system; Mei symmetry; Mei conserved quantity

* *

(上接第 588 页)

Effect of u and d quark mass on the phase transition of quark matter in supernova

LAI Xiang-jun, LIU Men-quan, LIU Hong-lin, LUO Zhi-quan
(Institute of Theoretical Physics, China West Normal University, Nanchong 637002, China)

Abstract: The effect of u and d quark mass on the conversion of the two- flavor quark matter to more stable strange quark matter has been analyzed. It is shown that the u and d quark mass has slight influence on equilibrium parameters, involving quark temperature, quark abundances and total neutrino energies. So the u and d quark mass can reasonably be neglected when the conversion processes are studied in a supernova core. It further indicates that the u, d quarks are not good quantum transition flavors and the structure of photon comprised of quarks is also supported.

Key words: quark transitions; supernova; reaction rates