第49卷 第6期
2011年11月

吉林大学学报(理学版)
Journal of Jilin University (Science Edition)

Vol.49 No.6
Nov 2011

研究简报

单个总体方差差异的 U 统计量检验法

陆媛媛, 宋立新
(吉林师范大学 数学学院, 吉林 四平 136000)

摘要: 给出一种利用非参数统计中 U 统计量构造检验单个总体方差差异的方法, 与 χ^2 检验法相比, 该方法不仅适用于更宽泛的场合, 而且其渐近相对效率为1.
关键词: U 统计量; 方差检验; 渐近正态性; 渐近相对效率
中图分类号: O212.7 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)06-1064-04

U-Statistics Testing Method in Testing Variance Differences of a Single Population

LU Yuan-yuan, SONG Li-xin
(*College of Mathematics, Jilin Normal University, Siping* 136000, *Jilin Province, China*)

Abstract: A method about testing variance differences of a single population was constructed based on U-statistics. This method, compared with the χ^2 testing, can be applied to more general situations, and its asymptotic relative efficiency is 1.
Key words: U-statistics; variance testing; asymptotic normality; asymptotic relative efficiency

由于方差反映随机变量取值的离散程度, 因此, 在实际应用中检验单个总体方差差异问题较常见. 设统计总体为 X, 分布函数为 $F(x;\mu,\sigma^2)$, $EX=\mu$, $DX=\sigma^2$, $0<\sigma^2<\infty$ 均未知, $EX^4<\infty$. 从总体 X 中抽取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 欲检验原假设 H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$(已知) vs 备择假设 H_1: $\sigma^2>\sigma_0^2$. 当 X 服从正态分布时, χ^2 检验法是解决该问题最常用的典型方法. 但在非正态的一般情况下, 目前尚未见解决这类问题的报道.

关于 U 统计量的研究目前已取得了一些成果[1-4]. 本文利用 U 统计量构造了解决上述问题的一种检验方法, 与 χ^2 检验法相比, 不仅适用于更宽泛的场合, 而且渐近相对效率为1.

1 U 统计量的建立

对于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 及任意的 $1\leqslant\alpha_1,\alpha_2\leqslant n$, 令 $h(X_{\alpha_1},X_{\alpha_2})=\dfrac{1}{2}[(X_{\alpha_1}-X_{\alpha_2})^2]$, 又令

$$U_n=\frac{1}{2\mathrm{C}_n^2}\sum_{\alpha_1\neq\alpha_2}h(X_{\alpha_1},X_{\alpha_2})=\frac{1}{\mathrm{C}_n^2}\sum_{\alpha_1<\alpha_2}h(X_{\alpha_1},X_{\alpha_2})=\frac{1}{\mathrm{C}_n^2}\sum_{\alpha_1<\alpha_2}\frac{1}{2}[(X_{\alpha_1}-X_{\alpha_2})^2]=$$
$$\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\alpha_1<\alpha_2}(X_{\alpha_1}-X_{\alpha_2})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2=S_n^2,$$

其中 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. 可以证明 U_n 是 U 统计量, 因为 $Eh(X_{\alpha_1},X_{\alpha_2})=\sigma^2$, 所以 $h(X_{\alpha_1},X_{\alpha_2})$ 是核函数, 而

收稿日期: 2011-03-18.
作者简介: 陆媛媛(1978—), 女, 汉族, 博士, 讲师, 从事运筹学与数理统计的研究, E-mail: luyuanyuan_2006@sina.com. 通讯作者: 宋立新(1954—), 男, 汉族, 教授, 从事数理统计的研究, E-mail: slx3290773@163.com.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10971084)和吉林省教育厅"十一五"规划重点项目(批准号: 吉教科合字[2010]141).

$h(X_{\alpha_1},X_{\alpha_2})$根据构造还是对称函数，且其求和是对 $X_1,X_2\cdots,X_n$ 中任取两个组合求和，则 U_n 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$关于参数 σ^2 的 U 统计量. 下面求 U_n 的数学期望和方差，显然有 $EU_n=ES_n^2=\sigma^2$，表明 U_n 还是 σ^2 的无偏估计. 如果用 $DU_n=DS_n^2$ 求出 U_n 的方差，则过于繁杂，且不利于求出 U_n 的渐近分布.

1）按求 U 统计量方差的方法求出 Var U_n[5].

$$\mathrm{Var}\,U_n=\mathrm{Var}\left(\frac{1}{\mathrm{C}_n^2}\sum_{\alpha_1<\alpha_2}h(X_{\alpha_1},X_{\alpha_2})\right)=\frac{1}{(\mathrm{C}_n^2)^2}\sum_{\alpha_1<\alpha_2}\sum_{\beta_1<\beta_2}\mathrm{Cov}(h(X_{\alpha_1},X_{\alpha_2}),h(X_{\beta_1},X_{\beta_2})).\tag{1}$$

若令 $\tau_c^2=\mathrm{Cov}(h(X_{\alpha_1},X_{\alpha_2}),h(X_{\beta_1},X_{\beta_2}))$，$c=\begin{cases}0, & \alpha_1\neq\beta_1,\ \alpha_2\neq\beta_2,\\ 1, & \alpha_1=\beta_1,\ \alpha_2\neq\beta_2\ \text{或}\ \alpha_1\neq\beta_1,\ \alpha_2=\beta_2,\\ 2, & \alpha_1=\beta_1,\ \alpha_2=\beta_2.\end{cases}$

则由 $\alpha_1\neq\alpha_2$，$\beta_1\neq\beta_2$ 知，τ_c^2 是两个涉及样本中恰有 c 个相同两个核的协方差，即

$$\text{式(1)}=\frac{1}{(\mathrm{C}_n^2)^2}\sum_{c=0}^{2}\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_2^c\mathrm{C}_{n-2}^{2-c}\tau_c^2=\frac{1}{\mathrm{C}_n^2}\sum_{c=0}^{2}\mathrm{C}_2^c\mathrm{C}_{n-2}^{2-c}\tau_c^2.$$

2）下证 $0=\tau_0^2<\tau_1^2\leqslant\tau_2^2<\infty$. $\tau_0^2=\mathrm{Cov}(h(X_{\alpha_1},X_{\alpha_2}),h(X_{\beta_1},X_{\beta_2}))$. 此时，$\alpha_1\neq\beta_1$，$\alpha_2\neq\beta_2$，且 $\alpha_1\neq\alpha_2$，$\beta_1\neq\beta_2$，所以$(X_{\alpha_1},X_{\alpha_2})$与$(X_{\beta_1},X_{\beta_2})$独立，从而 $h(X_{\alpha_1},X_{\alpha_2})$与 $h(X_{\beta_1},X_{\beta_2})$也独立，即 $\tau_0^2=0$.

$\tau_1^2=\mathrm{Cov}(h(X_{\alpha_1},X_{\alpha_2}),h(X_{\alpha_1},X_{\alpha_3}))$. 因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ i. i. d，$h(X_{\alpha_1},X_{\alpha_2})$是对称核函数，所以可取 X_1,X_2,X_3 代替 $X_{\alpha_1},X_{\alpha_2},X_{\alpha_3}$，则有

$$\tau_1^2=\mathrm{Cov}\left(\frac{1}{2}(X_1-X_2)^2,\frac{1}{2}(X_1-X_3)^2\right)=\frac{1}{4}[E(X_1-X_2)^2(X_1-X_3)^2]-[E((X_1-EX_1)^2)]^2=$$
$$\frac{1}{4}\{E((X-EX)^2)^2-[E(X-EX)^2]^2\}=\frac{1}{4}\mathrm{Var}((X-EX)^2),\tag{2}$$

$$\tau_2^2=\mathrm{Var}\left(\frac{1}{2}(X_1-X_2)^2\right)=\frac{1}{4}E(X_1-X_2)^4-[E(X_1-EX_1)^2]^2=$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{Var}((X-EX)^2)+[E(X-EX)^2]^2.\tag{3}$$

又因为 $EX^4<\infty$，所以 $\sigma_2^2<\infty$，相比较有 $0=\tau_0^2<\tau_1^2\leqslant\tau_2^2<\infty$.

2　U_n 的大样本性质

定理 1[5]　U_n 是 σ^2 的一致最小方差无偏估计(UMVUE)，且在几乎处处意义下是唯一的.

定理 2[5]　设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 $F(x)$的简单样本，U_n 是 σ^2 的 U 统计量，其核为 $h(X_1,X_2)$，且有 $Eh(X_1,X_2)^2<+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}n\mathrm{Var}\,U_n=4\tau_1^2$，即 U_n 均方收敛于 σ^2，从而有 $U_n\xrightarrow{p}\sigma^2$.

定理 3[5]　如果 $Eh^2(X_1,X_2)<\infty$，且 $\tau_1^2>0$，则当 $n\to\infty$ 时，有 $\sqrt{n}(U_n-\sigma^2)\xrightarrow{L}N(0,4\tau_1^2)$.

3　τ_1^2 的估计

根据 U_n 的渐近正态性，可对假设进行大样本近似检验，但由于 τ_1^2 与 F 有关，是未知的，不能直接进行假设检验，因此，需利用样本 $X_1,X_2\cdots,X_n$ 对 τ_1^2 给出一个相合估计 $\hat{\tau}_1^2$[6]，根据式(2)，有

$$4\tau_1^2=\mathrm{Var}((X-EX)^2)=E(X-EX)^4-[E(X-EX)^2]^2=E(X-\mu)^4-(\sigma^2)^2.$$

根据大数定律和 Slutsky 定理，因为 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^4\xrightarrow{p}E(X-\mu)^4$，$S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})\xrightarrow{p}\sigma^2$，所以若令

$$4\hat{\tau}_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^4-\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]^2=A_4-(S_n^2)^2,\tag{4}$$

则 $4\hat{\tau}_1^2=A_4-(S_n^2)^2\xrightarrow{p}4\tau_1^2$，再根据 Slutsky 定理知，$\sqrt{n}(U_n-\sigma^2)\xrightarrow{L}N(0,4\hat{\tau}_1^2)$.

4　假设检验

对于 H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2$ vs H_1：$\sigma^2>\sigma_0^2$，在 H_0 成立时，取 $T_n=\sqrt{n}(U_n-\sigma_0^2)/\sqrt{4\hat{\tau}_1^2}$，对于给定的显著性水

平 α, 拒绝域为 $W=\{(X_1,X_2\cdots,X_n)\mid T_n\geqslant u_{1-\alpha}\}$, 其中 $u_{1-\alpha}$是 $N(0,1)$下侧 $1-\alpha$ 分位数, 同理, 另一种单侧检验和双侧检验均可类似求出.

5 检验的渐近相对效率

给出一个总体分布方差的 U 统计量检验方法, 自然要研究其功效, 但由于其备择假设不是简单假设, 较复杂, 求其功效较困难, 此时可以与已知该类问题的典型方法进行比较, 因此, 需要求出比较它们优劣的 Pitman 渐近相对效率[7-8].

因为χ^2 检验法是最典型的一个正态总体分布方差的参数假设检验方法, 所以应与χ^2 检验法进行比较.

5.1 χ^2 检验法

引理1 $\chi^2(n-1)$可用正态分布近似, 其关系式为$\dfrac{\chi^2(n-1)-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}}\xrightarrow{L}N(0,1)$, 其中: $E\chi^2(n-1)=(n-1)$; $D\chi^2(n-1)=2(n-1)$.

当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$时, 从 X 中抽取 $X_1,X_2,\cdots,X_n$. 令 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, $S_n^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$, 则 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.

欲检验 H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$ vs H_1: $\sigma^2>\sigma_0^2$. 当 H_0 成立时, $\chi^2=\dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$, 给定显著性水平 α, 则检验的拒绝域 $W=\{\chi^2\geqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}$. 由引理 1 知, χ^2 检验的大样本近似拒绝域为 $W=\left\{\dfrac{\chi^2(n-1)-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}}\geqslant u_{1-\alpha}\right\}$.

5.2 本文检验法与χ^2 检验的渐近相对效率比较

若设 $\theta=\sigma^2-\sigma_0^2$, 则原假设和备择假设可变为 H_0: $\theta=0$ vs H_1: $\theta>0$.

1) 当χ^2 检验法在 H_0 成立时, 其检验统计量为$\chi^2=\dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$. 若 $n\to\infty$, 则

$$\frac{\chi^2(n-1)-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}}=\frac{(n-1)S_n^2/\sigma_0^2-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}}=\sqrt{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{S_n^2-\sigma_0^2}{\sigma_0^2}\right)\xrightarrow{L}N(0,1),$$

其近似拒绝域为 $W=\left\{\sqrt{\dfrac{n-1}{2}}\left(\dfrac{S_n^2-\sigma_0^2}{\sigma_0^2}\right)\geqslant u_{1-\alpha}\right\}$.

计算功效的参数 θ 与样本容量有关, 而且样本容量 n 越大, 计算功效的参数与原假设即原点 O 越接近. 因此, 取一个参数序列 $\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n\geqslant\cdots>0$, 其中 $\theta_n=\dfrac{\delta}{\sqrt{n}}=\sigma_n^2-\sigma_0^2$, $\delta>0$. 显然 n 越大, θ_n 越接近于原点 O, 且当 $n\to\infty$ 时, $\theta_n\to 0$.

下面计算在参数 θ_n 处的功效, 并使得该功效等于给定的 β. 即在备择假设成立时计算概率 $P\left\{\sqrt{\dfrac{n-1}{2}}\left(\dfrac{S_n^2-\sigma_0^2}{\sigma_0^2}\right)\geqslant u_{1-\alpha}\right\}$. 当备择假设成立时, $\sqrt{\dfrac{n-1}{2}}\left(\dfrac{S_n^2-\sigma_n^2}{\sigma_n^2}\right)\xrightarrow{L}N(0,1)(n\to\infty)$.

对于任意给定的β, 有

$$\beta=P\left\{\sqrt{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{S_n^2-\sigma_0^2}{\sigma_0^2}\right)\geqslant u_{1-\alpha}\right\}=P\left\{\sqrt{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{S_n^2-\sigma_n^2+\sigma_n^2-\sigma_0^2}{\sigma_n^2}\cdot\frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2}\right)\geqslant u_{1-\alpha}\right\}.$$

当 $\theta_n\to 0$ 时, $\sigma_n^2\to\sigma_0^2$, $\sigma_n^2/\sigma_0^2\to 1$, $\sqrt{n-1}/\sqrt{n}\to 1$, 根据 Slutsky 定理的"去 0 律"和"去 1 律", 有

$$\sqrt{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(\frac{S_n^2-\sigma_n^2}{\sigma_n^2}+\frac{\sigma_n^2-\sigma_0^2}{\sigma_n^2}\right)\left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2}\right)=\sqrt{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(\frac{S_n^2-\sigma_n^2}{\sigma_n^2}\right)\left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2}\right)+\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\theta_n}{\sigma_0^2}\right)\xrightarrow{L}N\left(\frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma_0^2},1\right),$$

从而当 $n\to\infty$ 时, 由 $\beta=P\left\{\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{2}}\cdot\dfrac{S_n^2-\sigma_0^2}{\sigma_0^2}\right)\geqslant u_{1-\alpha}\right\}$, 有 $u_{1-\alpha}-\dfrac{\delta}{\sqrt{2}\cdot\sigma_0^2}=u_{1-\beta}$. 一般地, 水平 α 较小

时，功效 β 较大，故 $u_{1-\alpha}>0$，$u_{1-\beta}<0$，所以 $n_{\chi^2}=\dfrac{2\sigma_0^4(u_{1-\alpha}-u_{1-\beta})^2}{\theta^2}$. 在参数 θ 接近原点 O 时，为了使其功效达到 β，χ^2 检验需要的样本容量为 n_{χ^2}.

2）U 统计量检验法. 当 H_0 在成立时，其检验统计量为 $T_n=\dfrac{U_n-\sigma_0^2}{\sqrt{\mathrm{Var}\ U_n}}\sim N(0,1)\ (n\to\infty)$，近似拒绝域为 $W=\left\{\dfrac{U_n-\sigma_0^2}{\sqrt{\mathrm{Var}\ U_n}}\geqslant u_{1-\alpha}\right\}$. 下面计算在参数 θ_n 处的功效，并使得该功效等于给定的 β. 即在备择假设成立时计算概率 $P\left\{\dfrac{U_n-\sigma_0^2}{\sqrt{\mathrm{Var}\ U_n}}\geqslant u_{1-\alpha}\right\}$. 当备择假设成立时，$\dfrac{U_n-\sigma_n^2}{\sqrt{\mathrm{Var}\ U_n}}\sim N(0,1)$，则

$$\beta=P\left\{\frac{U_n-\sigma_0^2}{\sqrt{\mathrm{Var}\ U_n}}=\frac{U_n-\sigma_n^2}{\sqrt{\mathrm{Var}\ U_n}}+\frac{\sigma_n^2-\sigma_0^2}{\sqrt{\mathrm{Var}\ U_n}}\geqslant u_{1-\alpha}\right\}=P\left\{\left(\frac{U_n-\sigma_n^2}{\sqrt{\mathrm{Var}\ U_n}}+\frac{\delta/\sqrt{n}}{\sqrt{4\hat{\tau}_n^2/n}}\right)\geqslant u_{1-\alpha}\right\}=$$

$$P\left\{\left(\frac{U_n-\sigma_n^2}{\sqrt{\mathrm{Var}\ U_n}}+\frac{\delta}{2\hat{\tau}_1}\right)\geqslant u_{1-\alpha}\right\}.$$

因为 $\dfrac{U_n-\sigma_n^2}{\sqrt{\mathrm{Var}\ U_n}}+\dfrac{\delta}{2\hat{\tau}_1}\sim N\left(\dfrac{\delta}{2\hat{\tau}_1},1\right)$，所以当 $n\to\infty$ 时，$\beta=P\left\{N\left(\dfrac{\delta}{2\hat{\tau}_1},1\right)\geqslant u_{1-\alpha}\right\}$，$u_{1-\beta}=u_{1-\alpha}-\dfrac{\delta}{2\hat{\tau}_1}$，当总体为正态分布时，

$$4\hat{\tau}_1^2=\mathrm{Var}((X-EX)^2)=E(X-EX)^4-[E(X-EX)^2]^2=3\sigma_0^4-2\sigma_0^4=\sigma_0^4,$$

$$\frac{\delta}{\sqrt{2\sigma_0^4}}=u_{1-\alpha}-u_{1-\beta},\quad \delta^2=2\sigma_0^4(u_{1-\alpha}-u_{1-\beta})^2,\quad n_{U_n}=\frac{2\sigma_0^4(u_{1-\alpha}-u_{1-\beta})^2}{\theta^2}.$$

当参数 θ 接近原点时，为使其功效达到 β，U 统计量检验法需要的样本容量为 n_{U_n}. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(n_{\chi^2}/n_{U_n})=1$ 知，当总体为正态分布时，U 统计量检验法与 χ^2 检验法的渐近相对效率为 1.

综上可见：当总体服从正态分布时，本文构造的 U 统计量检验与 χ^2 检验法具有相同的功效；本文构造的 U 统计量检验与 χ^2 检验法相比适合于 4 阶矩存在的总体更加宽泛的场合，因此，它是一种检验单个总体方差差异的实用方法.

参　考　文　献

［1］ WANG Fang, CHENG Shi-hong. Almost Sure Central Limit Theorems for U-Statistics［J］. Chinese Annals of Mathematics: Ser A, 2003, 24(6): 735-742.（王芳，程士宏. U-统计量的几乎处处中心极限定理［J］. 数学年刊：A 辑，2003，24(6)：735-742.）

［2］ WANG Fang, CUI Heng-jian, JIN Jiao. Symmetric Center Test by Using U-Statistics［J］. Journal of Beijing Normal University: Natural Science, 2009, 45(1): 17-21.（王芳，崔恒建，金蛟. 分布对称中心的 U 检验方法［J］. 北京师范大学学报：自然科学版，2009，45(1)：17-21.）

［3］ Bentkus Vidmantas, JING Bing-yi, ZHOU Wang. On Normal Approximations to U-Statistics［J］. Annals of Probability, 2009, 37(6): 2174-2199.

［4］ Dehling H, Wendler M. Central Limit Theorem and the Bootstrap for U-Statistics of Strongly Mixing Data［J］. Journal of Multivariate Analysis, 2010, 101(1): 126-137.

［5］ 孙山泽. 非参数统计讲义［M］. 北京：北京大学出版社，2000：29-41.

［6］ 陈希孺. 数理统计引论［M］. 北京：科学出版社，2007：82-95.

［7］ 王静龙，梁小筠. 非参数统计分析［M］. 北京：高等教育出版社，2006：154-155.

［8］ SONG Li-xin, ZHAO Zhi-wen, CHEN Kun. U-Statistics Testing Method in Testing the Equality of Two Population Means［J］. Journal of Jilin University: Science Edition, 2010, 48(6): 957-960.（宋立新，赵志文，陈鲲. 两总体分布均值相等的 U 统计量检验法［J］. 吉林大学学报：理学版，2010，48(6)：957-960.）