第49卷 第6期 吉林大学学报(理学版) Vol.49 No.6
2011年11月 Journal of Jilin University (Science Edition) Nov 2011

研究快报

随机微分方程 Milstein 方法的几乎必然及矩指数稳定性

张雨馨[1,2], 王 鹏[1]
(1. 吉林大学 数学学院, 长春 130012; 2. 哈尔滨工程大学 理学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 考虑随机微分方程 Milstein 方法的几乎必然及矩指数稳定性, 给出了当步长趋于零时极限意义下随机微分方程 Milstein 方法的稳定性, 并证明了在一定条件下显式和半隐式 Milstein方法都具有这些稳定性.

关键词: Milstein 方法; 半隐式 Milstein 方法; 线性增长条件
中图分类号: O211.63 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2011)06-1058-03

Almost Sure and Moment Exponential Stability of Milstein Methods for Stochastic Differential Equations

ZHANG Yu-xin[1,2], WANG Peng[1]
(1. *College of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*;
2. *College of Science*, *Harbin Engineering University*, *Harbin* 150001, *China*)

Abstract: The almost sure and moment exponential stability of the Milstein scheme for stochastic differential equations were studied. We focused our attention on these stability properties in the limit as the timestep tends to zero and we proved that under proper conditions, explicit and semi-implicit Milstein methods maintain these stability properties.

Key words: Milstein method; semi-implicit Milstein method; linear growth condition

假设$(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$为完备的概率空间, 其中$\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$是$\mathscr{F}$上满足一般条件的$\sigma$代数流. 考虑自治的 Itô 随机微分方程

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(t))\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t), \quad t \geqslant 0, \quad \boldsymbol{y}(0) \neq 0 \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{W}(t) = (W^1(t), \cdots, W^m(t))^{\mathrm{T}}$是 m 维 Brownian 运动. 对于随机微分方程(1), 常用的数值方法是 Euler-Maruyama(EM)近似和 Milstein 格式, 文献[1-8]研究了这些方法的稳定性. 文献[5]证明了在一定的条件下, 对于充分小的步长, EM 方法保持了几乎必然和矩指数稳定性. 基于此, 本文研究θ-Milstein方法的稳定性.

选取步长 h 离散时间区间, $t_n = nh$, $\boldsymbol{Y}_n = \boldsymbol{Y}(t_n) \approx \boldsymbol{y}(t_n)$, $\boldsymbol{Y}_0 = \boldsymbol{y}(0)$. 当 $m=1$ 时, 应用到方程(1)上的 θ-Milstein 方法格式如下:

$$\boldsymbol{Y}_{n+1} = \boldsymbol{Y}_n + \theta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}_{n+1})h + (1-\theta)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}_n)h + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{Y}_n)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}_n)\{(\Delta W_n)^2 - h\}, \tag{2}$$

其中: $\theta \in [0,1]$是固定的参数; $\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n)$; $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{y})$: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$是$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$关于$\boldsymbol{y}$ 的 Jacobian 矩

收稿日期: 2011-09-29.
作者简介: 张雨馨(1982—), 女, 汉族, 博士研究生, 讲师, 从事随机微分方程数值解的研究, E-mail: xyz.jl@163.com. 通讯作者: 王 鹏(1977—), 男, 汉族, 博士, 讲师, 从事随机微分方程数值解的研究, E-mail: pwang@jlu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11101184).

阵. 当 $\theta=0$ 时，式(2)为显式 Milstein 方法，当 $\theta\in(0,1]$时，式(2)称为半隐式 Milstein 方法.

下面研究 $m=1$ 时显式 Milstein 方法的稳定性. 令 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$满足全局线性增长条件：

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})|\leqslant K_1|\boldsymbol{y}|,\qquad \forall \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d, \tag{3}$$

其中常数 $K_1>0$. 并且假设存在一个常数 $K_2>0$，使得

$$\left|\frac{\partial g^i(\boldsymbol{y})}{\partial y^j}\right|\leqslant K_2,\qquad \forall \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d, \tag{4}$$

其中：$1\leqslant i\leqslant d$；$1\leqslant j\leqslant d$.

定理 1　令式(3)和(4)成立. 如果

$$-\lambda:=\sup_{y\in\mathbb{R}^d,y\neq0}\left(\frac{\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\rangle+|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})|^2/2}{|\boldsymbol{y}|^2}-\frac{\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\rangle^2}{|\boldsymbol{y}|^4}\right)<0, \tag{5}$$

并且$\boldsymbol{g}(0)=0$，则对于任给的$\varepsilon\in(0,\lambda)$都存在一个常数$h^*\in(0,1)$，使得对于任意的$0<h<h^*$，显式 Milstein 方法都满足

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{nh}\log|\boldsymbol{Y}_n|\leqslant-(\lambda-\varepsilon)\ \text{a. s.} \tag{6}$$

进一步，对于任给的 $\varepsilon\in(0,\lambda)$及充分小的 $p>0$，都存在一个常数 $h^*\in(0,1)$，使得对于任意的 $0<h<h^*$，显式 Milstein 方法都满足

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{nh}\log E(|\boldsymbol{Y}_n|^p)\leqslant-p(\lambda-\varepsilon). \tag{7}$$

证明：对于任给的$\varepsilon\in(0,\lambda)$和充分小的$p>0$，选择充分小的$h^*$. 由条件(3)和(4)以及数学期望的性质，可得

$$E(|\boldsymbol{Y}_{n+1}|^p)\leqslant E(|\boldsymbol{Y}_n|^p)(1-p(\lambda-\varepsilon)h), \tag{8}$$

其中：$h<h^*$；$n\geqslant0$. 应用式(8)并通过递推可得

$$E(|\boldsymbol{Y}_n|^p)\leqslant|\boldsymbol{Y}_0|^p(1-p(\lambda-\varepsilon)h)^n\leqslant|\boldsymbol{Y}_0|^p\mathrm{e}^{-pn(\lambda-\varepsilon)h},\qquad\forall n\geqslant1.$$

从而式(7)成立. 利用 Markov 不等式和 Borel-Cantelli 引理，可以推导出对于几乎所有的$\omega\in\Omega$，

$$\frac{1}{nh}\log|\boldsymbol{Y}_n|\leqslant-(\lambda-\varepsilon)+\frac{2\log(n)}{pnh}$$

成立，其中 n 充分大. 令 $n\to\infty$ 即可得出式(6).

下面考察 $m=1$ 时半隐式 Milstein 方法的稳定性. 给出单边 Lipschitz 条件：

$$\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\rangle\leqslant\mu|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2,\qquad\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d, \tag{9}$$

其中$\mu\in\mathbb{R}$ 是一个常数.

定理 2　假设式(3)，(4)，(7)都成立，并且$\boldsymbol{g}(0)=0$. 给定 $\theta\in(0,1]$，假设 $\theta\mu+\frac{1}{2}\rho<0$，其中

$$\rho:=\sup_{y\in\mathbb{R}^d,y\neq0}\left(\frac{|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})|^2+2(1-\theta)\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\rangle}{|\boldsymbol{y}|^2}-\frac{2\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\rangle^2}{|\boldsymbol{y}|^4}\right), \tag{10}$$

则对于任给的 $\varepsilon\in(0,|\theta\mu+\rho/2|)$，都存在一对常数 $p\in(0,1)$和 $h^*\in(0,1)$，使得对于任意的 $0<h<h^*$，半隐式 Milstein 方法都具有性质

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{nh}\log E(|\boldsymbol{Y}_n|^p)\leqslant p\left(\theta\mu+\frac{1}{2}\rho+\varepsilon\right)<0 \tag{11}$$

及

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{nh}\log|\boldsymbol{Y}_n|\leqslant\theta\mu+\frac{1}{2}\rho+\varepsilon<0\ \text{a. s.} \tag{12}$$

可以把上述定理平行推广到具有对角噪声的多维随机微分方程上，即

$$g^{k,j}(\boldsymbol{y})=0,\quad\frac{\partial g^{j,j}(\boldsymbol{y})}{\partial y^k}=0,\quad\forall \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d,$$

其中：$d=m$；$j,k=1,2,\cdots,m$，并且$j\neq k$.

定理3 令式(3)成立. 假设

$$-\lambda := \sup_{y\in\mathbb{R}^d, y\neq 0}\left(\frac{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\rangle + 2^{-1}\sum_{j=1}^{m}|\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{y})|^2}{|\boldsymbol{y}|^2} - \frac{\sum_{j=1}^{m}\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{y})\rangle^2}{|\boldsymbol{y}|^4}\right) < 0, \tag{13}$$

及

$$\boldsymbol{g}(0) = 0, \quad \left|\frac{\partial g^{k,k}(\boldsymbol{y})}{\partial y^k}\right| \leqslant L, \quad \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d, \tag{14}$$

其中$L>0$是一个常数且$1\leqslant k\leqslant m$. 则对于任给的$\varepsilon\in(0,\lambda)$, 都存在一个常数$h^*\in(0,1)$, 使得对于任意的$0<h<h^*$, 显式 Milstein 方法都满足

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{nh}\log|\boldsymbol{Y}_n| \leqslant -(\lambda-\varepsilon) \text{ a. s.} \tag{15}$$

更进一步, 对于任给的$\varepsilon\in(0,\lambda)$和充分小的$p>0$, 都存在一个常数$h^*\in(0,1)$, 使得对于任意的$0<h<h^*$, 显式 Milstein 方法都满足

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{nh}\log E(|\boldsymbol{Y}_n|^p) \leqslant -p(\lambda-\varepsilon). \tag{16}$$

定理4 令式(3),(9),(14)都成立, 并且假设$\theta\mu+\frac{1}{2}\rho<0$, 其中

$$\rho := \sup_{y\in\mathbb{R}^d, y\neq 0}\left(\frac{|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})|^2 + 2(1-\theta)\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\rangle}{|\boldsymbol{y}|^2} - 2\sum_{j=1}^{m}\frac{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{y})\rangle^2}{|\boldsymbol{y}|^4}\right), \tag{17}$$

则对于任给的$\varepsilon\in(0,|\theta\mu+\rho/2|)$, 都存在一对常数$p\in(0,1)$和$h^*\in(0,1)$, 使得对于任意的$0<h<h^*$, 半隐式 Milstein 方法都具有性质

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{nh}\log E(|\boldsymbol{Y}_n|^p) \leqslant p\left(\theta\mu + \frac{1}{2}\rho + \varepsilon\right) < 0 \tag{18}$$

和

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{nh}\log|\boldsymbol{Y}_n| \leqslant \theta\mu + \frac{1}{2}\rho + \varepsilon < 0 \text{ a. s.} \tag{19}$$

定理2~定理4的证明与定理1类似, 故略.

衷心感谢吉林大学数学学院李勇教授的悉心指导.

参 考 文 献

[1] Buckwar E, Kelly C. Towards a Systematic Linear Stability Analysis of Numerical Methods for Systems of Stochastic Differential Equations [J]. SIAM J Numer Anal, 2010, 48(1): 298-321.

[2] Buckwar E, Sickenberger T. A Comparative Linear Mean-Square Stability Analysis of Maruyama and Milstein-Type Methods [J]. Math Comput Simu, 2011, 81: 1110-1127.

[3] Higham D J. A-Stability and Stochastic Mean-Square Stability [J]. BIT, 2000, 40(2): 404-409.

[4] Higham D J. Mean-Square and Asymptotic Stability of the Stochastic Theta Method [J]. SIAM J Numer Anal, 2000, 38(3): 753-769.

[5] Higham D J, MAO Xue-rong, YUAN Cheng-gui. Almost Sure and Moment Exponential Stability in the Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations [J]. SIAM J Numer Anal, 2007, 45(2): 592-609.

[6] Saito Y, Mitsui T. Mean-Square Stability of Numerical Schemes for Stochastic Differential Systems [J]. Vietnam J Math, 2002, 30: 551-560.

[7] Saito Y, Mitsui T. Stability Analysis of Numerical Schemes for Stochastic Differential Equations [J]. SIAM J Numer Anal, 1996, 33(6): 2254-2267.

[8] Higham D J, MAO Xue-rong, Stuart A M. Exponential Mean-Square Stability of Numerical Solutions to Stochastic Differential Equations [J]. J Comput Math, 2003, 6: 297-313.