研究简报

二次广义 Hermite 矩阵方程的解

袁晖坪
(重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067)

摘要: 利用广义 Hermite 矩阵探讨一类二次矩阵方程的求解问题, 得到了矩阵方程 $\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{A}$ 存在广义 Hermite 矩阵解的充分必要条件及其相应解的表达式, 并给出了矩阵方程 $\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{B}$ 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆时的通解表达式.

关键词: 广义 Hermite 矩阵; 二次矩阵方程; 矩阵解; 通解
中图分类号: O151.21　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1671-5489(2012)02-0281-03

Solutions of Quadratic Generalized Hermite Matrix Equation

YUAN Hui-ping
(*College of Mathematics and Statistics*, *Chongqing Technology and Business University*, *Chongqing* 400067, *China*)

Abstract: The solutions of quadratic matrix equation were discussed via the generalized Hermite matrix. The findings show that there are necessary and sufficient conditions of matrix equation $\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{A}$ having their generalized Hermite matrix solution, and the simple expressions of the generalized Hermite matrix solution can also be obtained. Besides, the general solutions of the matrix equations $\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{B}$ were given.

Key words: generalized Hermite matrix; quadratic matrix equation; matrix solution; general solution

矩阵方程在力学、计算物理、地质学、参数识别、自动控制、线性系统理论、非线性规化与动态分析等领域应用广泛[1-8]. Hermite 矩阵是一类特殊的矩阵, 在优化理论、计算数学、信号分析等领域应用广泛. 近年来, 对 Hermite 矩阵已有许多推广研究, 如次 Hermite 矩阵、广义 Hermite 矩阵等[2-8]. 文献[4]研究了矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{YB}$ 的半正定解; 文献[5]研究了矩阵方程 $\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{A}$ 的 Hermite 解. 本文在此基础上讨论一类二次广义 Hermite 矩阵方程的求解问题, 得到了矩阵方程 $\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{A}$ 存在 $\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵解的充分必要条件, 并给出了相应解的表达式及矩阵方程 $\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{B}$ 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆时的通解表达式, 推广了文献[4-5]的结果.

定义1[8] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复矩阵, 若存在 n 阶复可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{PA}$ ($\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{PA}$) 或 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{PAP}^{-1}$ ($\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{PAP}^{-1}$) (其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置共轭), 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵($\boldsymbol{P}$-广义斜 Hermite 矩阵).

引理1[5] 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为任意 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{P},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}$ 均为可逆阵, 则

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{P})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P})^{-1},\qquad \boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{P})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P})$$

是矩阵方程 $\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{A}$ 的解.

由引理1显然可得:

推论1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为任意 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{P},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}$ 均为可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{X}=c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{P})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P})^{-1}$ 和 $\boldsymbol{Y}=c^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{P})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P})$ 是矩阵方程 $\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{A}$ 的解(c 为非零复数).

定理1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆 $\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵, $\boldsymbol{M}$ 为任一 n 阶 $\boldsymbol{P}$-广义斜 Hermite 矩阵, 且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M}$,

收稿日期: 2011-08-22.
作者简介: 袁晖坪(1958—), 男, 汉族, 教授, 从事矩阵论的研究, E-mail: yhp@ctbu.edu.cn.
基金项目: 重庆市自然科学基金(批准号: CSTS2005BB0243)和重庆市教委科技项目基金(批准号: KJ0707023).

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M}$均为可逆矩阵, 则$\boldsymbol{Y}=c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})$和$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{P}$为矩阵方程$\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{A}$的解(其中复数$c$的模等于1).

证明: 由条件有$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{PA}$, $\boldsymbol{M}^*\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{PM}$, 即$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{PAP}^{-1}$, $\boldsymbol{M}^*=-\boldsymbol{PMP}^{-1}$, 因而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}[c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})]^*\boldsymbol{P}=\bar{c}\boldsymbol{P}^{-1}[(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{M}^*)(\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{M}^*)^{-1}]\boldsymbol{P}=\\&\bar{c}\boldsymbol{P}^{-1}[(\boldsymbol{PAP}^{-1}+\boldsymbol{PMP}^{-1})(\boldsymbol{PAP}^{-1}-\boldsymbol{PMP}^{-1})^{-1}]\boldsymbol{P}=\\&\bar{c}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}=\bar{c}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})^{-1},\end{aligned}$$

于是由引理1知, 结论成立.

定理2 设$\boldsymbol{A}$为n阶可逆$\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵, $\boldsymbol{M}$为任一n阶$\boldsymbol{P}$-广义斜 Hermite 矩阵, 且$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M}$均为可逆矩阵, 则$\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})^{-1}$为矩阵方程$\boldsymbol{XAP}^{-1}\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{AP}^{-1}$的解.

证明: 根据定理2的条件, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{P}&=\boldsymbol{P}^{-1}((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})^{-1})^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{M}^*)^{-1}(\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{M}^*)\boldsymbol{P}=\\&\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{PAP}^{-1}+\boldsymbol{PMP}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{PAP}^{-1}-\boldsymbol{PMP}^{-1})\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M}),\end{aligned}$$

所以由引理1知, $\boldsymbol{K}$为矩阵方程$\boldsymbol{XA}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{P})=\boldsymbol{A}$的解.

又显然, 矩阵方程$\boldsymbol{XAP}^{-1}\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{AP}^{-1}$与$\boldsymbol{XA}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{P})=\boldsymbol{A}$同解, 故$\boldsymbol{K}$为矩阵方程$\boldsymbol{XAP}^{-1}\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{AP}^{-1}$的解.

由定理2显然可得:

推论2 设$\boldsymbol{A}$为n阶可逆$\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵, $\boldsymbol{M}$为任一n阶$\boldsymbol{P}$-广义斜 Hermite 矩阵, 且$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M}$均为可逆矩阵, 则$\boldsymbol{K}=c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})^{-1}$为矩阵方程$\boldsymbol{XAP}^{-1}\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{AP}^{-1}$的解(其中复数$c$的模等于1).

定理3 设$\boldsymbol{A}$为n阶可逆$\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵, $\boldsymbol{K}$为矩阵方程$\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{PAX}=\boldsymbol{PA}$的可逆解, 且$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K}$为可逆矩阵, 则存在$n$阶$\boldsymbol{P}$-广义斜 Hermite 矩阵$\boldsymbol{M}$, 使得$\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A})$.

证明: 因为$\boldsymbol{K}$为矩阵方程$\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{PAX}=\boldsymbol{PA}$的可逆解, 所以$\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{PAK}=\boldsymbol{PA}$, 即$\boldsymbol{K}^*=\boldsymbol{PAK}^{-1}(\boldsymbol{PA})^{-1}$.

令$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K})^{-1}$, 下证$\boldsymbol{M}$为$\boldsymbol{P}$-广义斜 Hermite 矩阵. 事实上,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^*&=(\boldsymbol{E}^*-\boldsymbol{K}^*)^{-1}(\boldsymbol{E}^*+\boldsymbol{K}^*)\boldsymbol{A}^*=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{PAK}^{-1}(\boldsymbol{PA})^{-1})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{PAK}^{-1}(\boldsymbol{PA})^{-1})\boldsymbol{PAP}^{-1}=\\&\boldsymbol{PA}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{PA})^{-1}(\boldsymbol{PA})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}^{-1})(\boldsymbol{PA})^{-1}\boldsymbol{PAP}^{-1}=\\&\boldsymbol{PA}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K}^{-1})\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PA}(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1},\end{aligned}$$

又$(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{E})$, 即$(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{E})^{-1}$, 所以

$$\boldsymbol{M}^*=\boldsymbol{PA}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K})(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}=-\boldsymbol{PMP}^{-1},$$

即$\boldsymbol{M}^*\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{PM}$, 故$\boldsymbol{M}$为$\boldsymbol{P}$-广义斜 Hermite 矩阵. 又

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K})^{-1}=\boldsymbol{A}[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K})+(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K})](\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K})^{-1}=2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K})^{-1}$$

为可逆阵, 再由$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K})$, 即$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})\boldsymbol{K}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A}$得, $\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A})$.

定理4 设$\boldsymbol{A}$为n阶可逆$\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵, $\boldsymbol{M}$为任一n阶$\boldsymbol{P}$-广义斜 Hermite 矩阵, 且$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M}$均为可逆矩阵, 满足$\boldsymbol{AM}+\boldsymbol{MA}=\boldsymbol{O}$, 则$\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})^{-1}$为矩阵方程$\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{A}$的$\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵解.

证明: 由$\boldsymbol{AM}+\boldsymbol{MA}=\boldsymbol{O}$, 得$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})^2$, 即$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})^{-1}$, 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{P}&=(\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{M}^*)^{-1}(\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{M}^*)\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{PAP}^{-1}+\boldsymbol{PMP}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{PAP}^{-1}-\boldsymbol{PMP}^{-1})\boldsymbol{P}=\\&\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})^{-1}=\boldsymbol{PK},\end{aligned}$$

即$\boldsymbol{K}$为$\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵. 又由定理2知, $\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})^{-1}$为矩阵方程$\boldsymbol{XAP}^{-1}\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{AP}^{-1}$的解, 即$\boldsymbol{KAP}^{-1}\boldsymbol{K}^*=\boldsymbol{AP}^{-1}$, 故$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{KAP}^{-1}\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{KAP}^{-1}\boldsymbol{PK}=\boldsymbol{KAK}$, 即$\boldsymbol{K}$为矩阵方程$\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{A}$的$\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵解.

定理5 设$\boldsymbol{A}$为n阶可逆$\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵, $\boldsymbol{K}$为矩阵方程$\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{A}$的可逆$\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵解, 且$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K}$为可逆矩阵, 则存在$n$阶$\boldsymbol{P}$-广义斜 Hermite 矩阵$\boldsymbol{M}$, 使得$\boldsymbol{AM}+\boldsymbol{MA}=\boldsymbol{O}$, 且

$\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A})$.

证明：由条件有 $\boldsymbol{K}^{*}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{KAK}=\boldsymbol{A}$，因而，$\boldsymbol{K}^{*}\boldsymbol{PAK}=\boldsymbol{PKP}^{-1}\boldsymbol{PAK}=\boldsymbol{PKAK}=\boldsymbol{PA}$，即 $\boldsymbol{K}$ 为矩阵方程 $\boldsymbol{X}^{*}\boldsymbol{PAX}=\boldsymbol{PA}$ 的可逆 $\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵解，又 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K}$ 为可逆矩阵，于是，由定理3知，存在 n 阶 $\boldsymbol{P}$-广义斜 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{M}$，使得 $\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A})$．再由 $\boldsymbol{K}^{*}=\boldsymbol{PKP}^{-1}$ 及

$$\boldsymbol{K}^{*}=(\boldsymbol{M}^{*}-\boldsymbol{A}^{*})(\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{M}^{*})^{-1}=(-\boldsymbol{PMP}^{-1}-\boldsymbol{PAP}^{-1})(\boldsymbol{PAP}^{-1}-\boldsymbol{PMP}^{-1})^{-1}=$$
$$-\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}, \tag{1}$$

得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A})^{-1}$，故 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{2}=(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A})^{2}$，即 $\boldsymbol{AM}+\boldsymbol{MA}=\boldsymbol{O}$.

定理5消弱了文献[5]中定理4的条件.

定理6　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆 $\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵，$\boldsymbol{K}$ 为矩阵方程 $\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{A}$ 的可逆 $\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵解($\boldsymbol{K}\neq\boldsymbol{E}$)，则存在 n 阶 $\boldsymbol{P}$-广义斜 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{M}$，使得 $\boldsymbol{AM}+\boldsymbol{MA}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M}$ 均可逆，且 $\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A})\Leftrightarrow\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K}$ 可逆.

证明：必要性．当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M}$ 均可逆，且 $\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A})$ 时，有 $\boldsymbol{K}-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}[(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})]=-2(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{A}$ 可逆.

充分性．当 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K}$ 可逆时，由 $\boldsymbol{K}$ 为矩阵方程 $\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{A}$ 的可逆 $\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵解，有 $\boldsymbol{K}^{*}=\boldsymbol{PKP}^{-1}$，$\boldsymbol{KAK}=\boldsymbol{A}$，因而 $\boldsymbol{K}^{*}\boldsymbol{PAK}=\boldsymbol{PKP}^{-1}\boldsymbol{PAK}=\boldsymbol{PKAK}=\boldsymbol{PA}$，即 $\boldsymbol{K}$ 为矩阵方程 $\boldsymbol{X}^{*}\boldsymbol{PAX}=\boldsymbol{PA}$ 的可逆 $\boldsymbol{P}$-广义 Hermite 矩阵解．由定理3知，存在 n 阶 $\boldsymbol{P}$-广义斜 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{M}$，使得 $\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A})$．再由 $\boldsymbol{K}^{*}=\boldsymbol{PKP}^{-1}$ 及式(1)可知，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M}$ 均可逆，且

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})=\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})^{-1},$$

因而 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})^{2}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{M})^{2}$，即 $\boldsymbol{AM}+\boldsymbol{MA}=\boldsymbol{O}$.

定理7　设有两个 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{ST}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{KL}$($\boldsymbol{S},\boldsymbol{T},\boldsymbol{K},\boldsymbol{L}$ 均为可逆矩阵)，则矩阵方程 $\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{B}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{KQS}^{-1},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{L}$(其中 $\boldsymbol{Q}$ 为可逆矩阵).

证明：因为 $(\boldsymbol{KQS}^{-1})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{L})=(\boldsymbol{KQS}^{-1})\boldsymbol{ST}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{L})=\boldsymbol{KL}=\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{KQS}^{-1}$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{L}$ 为矩阵方程 $\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{B}$ 的解．另一方面，设 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 为矩阵方程 $\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{B}$ 的任一解，则 $\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{B}$，即 $(\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{XS})(\boldsymbol{TYL}^{-1})=\boldsymbol{E}$．令 $\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{XS}=\boldsymbol{Q}$，则 $\boldsymbol{TYL}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{-1}$，即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{KQS}^{-1}$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{L}$．综上知，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{KQS}^{-1}$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{L}$ 为矩阵方程 $\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{B}$ 的通解.

当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{Y}$ 为可逆矩阵时，文献[4]中的矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{YB}$ 可视为本文讨论的矩阵方程 $\boldsymbol{XAY}=\boldsymbol{B}$ 的特殊情形.

参考文献

[1] Hasanov V I, Ivano I G. On Two Perturbation Estimates of the Extreme Solutions to the Equations $\boldsymbol{X}\pm\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}$ [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2006, 413(1): 81-92.

[2] Hasanov V I. Positive Definite Solutions of the Matrix Equations $\boldsymbol{X}\pm\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}^{-q}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}$ [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2005, 404(15): 166-182.

[3] PENG Zhen-yun, El-Sayed S M. On Positive Definite Solution of a Nonlinear Matrix Equation [J]. Num Linear Algebra Appl, 2007, 14(2): 99-113.

[4] Jameson A, Kxeindler E, Laneaster R. Symmetric Positive Semi-definite and Positive Real Solutions of $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}^{\mathrm{T}}$ and $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{YB}$ [J]. Linear Algebra and Its Applications, 1992, 160(1): 189-215.

[5] YANG Chang-lan, WANG Long-bo. Hermition Matrix Equation [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2004, 24(3): 500-502.（杨昌兰，王龙波．Hermite 矩阵方程 [J]．数学研究与评论，2004，24(3)：500-502.）

[6] DU Zhong-fu. Positive Definite Solutions of the Matrix Equation $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}^{-\alpha}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{X}^{-\beta}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$ [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2010, 48(1): 26-32.（杜忠复．矩阵方程 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}^{-\alpha}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{X}^{-\beta}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$ 的正定解 [J]．吉林大学学报：理学版，2010，48(1)：26-32.）

[7] Hill R D, Waters S R. On k-Real and k-Hermitian Matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 1992, 169(1): 17-29.

[8] YUAN Hui-ping. Generalized Unitary Matrix and Generalized Hermite Matrix [J]. Journal of Mathematics, 2003, 23(3): 375-380.（袁晖坪．广义酉矩阵与广义 Hermite 阵 [J]．数学杂志，2003，23(3)：375-380.）

（责任编辑：赵立芹）