云南大学学报(自然科学版), 2007, 29(4): 325~329　　CN 53-1045/N　ISSN 0258-7971
Journal of Yunnan University

一类解耦双曲守恒律系统的狄拉克激波*

程红军, 张　通, 杨汉春
(云南大学 数学系, 云南 昆明　650091)

摘要: 研究一类解耦的具有线性退化特征的非严格或严格双曲守恒律系统的黎曼问题. 借助特征分析方法, 在广义 Rankine-Hugoniot 条件和熵条件下, 获得该问题的狄拉克激波解.

关键词: 双曲守恒律系统; 狄拉克激波(δ-激波); 广义 Rankine-Hugoniot 条件; 熵条件
中图分类号: O 175.29　　文献标识码: A　　文章编号: 0258-7971(2007)04-0325-05

考虑如下双曲守恒律系统的黎曼问题:

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, \\ v_t + (g(u)v)_x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

初始数据为

$$(v, u)(0, x) = (v_\pm, u_\pm), (\pm x > 0), \tag{2}$$

这里假设 $f(u)$ 是凸函数, $g(u)$ 是光滑的增函数.

系统(1) 是一类解耦的 Burgers 型双曲守恒律方程组, 许多文献对它的一些特殊情形作出了重要的研究. 张同等[1,2] 讨论了(1) 在 $f(u) = u^2$ 和 $g(u) = u$ 时的黎曼问题, 获得了 δ-激波解, 并证明了 δ-激波粘性扰动的稳定性. 在文献[3] 中, Le Floch 研究了当 $f'(u) \equiv g(u)$ 时的柯西问题, 获得包含 δ-激波的测度解. 丁夏畦等[4] 利用 Lebesgue-Stieltjes 积分, 定义一种新的弱解, 证明了(1) 在 $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, $g(u) = u$ 时的含有 δ-激波的柯西问题解的存在性与唯一性, 文献[5] 从定态解出发研究了 δ-激波的粘性稳定性, 等等. δ-激波是一类新的非线性波, 在其间断线 $x = x(t)$ 上, 状态变量 u 和 v 中至少有一个变成奇异测度. 它表达了质量集中的现象, 具有重要的物理意义. 许多文献(如文献[1, 2, 6, 7]) 提出广义 Rankine-Hugoniot 条件, 来刻划 δ-激波的位置、传播速度和权之间的关系, 以建立其数学理论.

在本文中, 我们考虑系统(1) 的 3 种情形: (C_1) 重特征线性退化的非严格双曲系统; (C_2) 一特征线性退化, 另一特征真正非线性的非严格双曲系统; (C_3) 一特征线性退化, 另一特征真正非线性的严格双曲系统. 本文先给出系统(1) 在 3 种情形 $(C_1 \sim C_3)$ 下的 δ-激波的广义 Rankine-Hugoniot 条件, 然后, 借助特征分析法, 利用熵条件, 通过求解广义 Rankine-Hugoniot 条件, 获得了黎曼问题(1) 与(2) 的 δ-激波解.

1　特征与分类

系统(1) 的特征值和相应的右特征向量分别为

$$\lambda_1 = g(u),\quad r_1 = (0, 1)^{\mathrm{T}},$$
$$\lambda_2 = f'(u),\quad r_2 = (f'(u) - g(u),\ vg'(u))^{\mathrm{T}}.$$

---

* 收稿日期: 2006-03-28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10461010); 云南大学"中青年骨干教师培养计划"资助项目.
作者简介: 程红军(1980-　), 男, 河南人, 硕士生, 主要从事双曲守恒律方面的研究.
通讯作者: 杨汉春(1968-　), 男, 云南人, 博士, 教授, 主要从事双曲守恒律方面的研究.

通过简单的计算有

$$\nabla\lambda_1\cdot r_1\equiv 0,\ \nabla\lambda_2\cdot r_2=f''(u)(f'(u)-g(u)),$$

因此, 在 Lax[8] 意义下, λ_1 是线性退化的; 当 $f'(u)\neq g(u)$ 时, λ_2 是真正非线性的.

特别地, 当 $f'(u)\equiv g(u)$ 时, (1) 转化为

$$\begin{cases} u_t+(f(u))_x=0, \\ v_t+(f'(u)v)_x=0. \end{cases} \tag{3}$$

此时

$$\lambda_1=\lambda_2=f'(u),\ r=(0,1)^T,\ \nabla\lambda_1\cdot r=\nabla\lambda_2\cdot r\equiv 0,$$

因此系统(3) 是重特征且线性退化的, 它的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f'(u),\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0.$$

故其特征线是直线, 且沿着特征线 u 取常值.

根据 $g(u)$ 与 $f'(u)$ 的关系, 情形$(C_1)\sim(C_3)$ 可以表述为:

(C_1): 对任意的 u, 均有 $g(u)=f'(u)$. 此时(1) 转变为(3), 系统有 2 个完全重合的特征, 因此是一个极端非严格双曲守恒律系统. 此重合特征是线性退化的.

(C_2): 存在某点 u_0 使得 $g(u_0)=f'(u_0)$, 且对任意的 u 均有 $g'(u)<f''(u)$. 在这种情形中, 系统(1) 有 2 个不完全重合的特征, 二者仅在 u_0 相等, 因此是一个非严格双曲守恒律系统. 特征 λ_1 线性退化, 而 λ_2 是真正非线性的.

(C_3): 对任意的 u 有 $g(u)>f'(u)$ 或者 $g(u)<f'(u)$. 这种情形下, 系统(1) 有 2 个完全不重合的特征, 因而是一个严格双曲守恒律系统. 特征 λ_1 线性退化, 而 λ_2 是真正非线性的.

对于(C_1), 很容易验证, 除了常状态和真空解

$$Vac:\begin{cases} \xi=f'(u), \\ v=0 \end{cases} \tag{4}$$

以外, 黎曼问题(3) 与(2) 的自相似波$(u,v)(\xi)\left(\xi=\frac{x}{t}\right)$ 为接触间断

$$J_1:\xi=f'(u_l)=f'(u_r). \tag{5}$$

对于(C_2) 和(C_3), 第 1 簇特征的自相似波仅有接触间断

$$J_2:\xi=g(u_l)=g(u_r), \tag{6}$$

第 2 簇特征的自相似波是中心疏散波

$$R:\begin{cases} \xi=f'(u), \\ vg'(u)\mathrm{d}u+(g(u)-f'(u))\mathrm{d}v=0,\ (u_l<u_r) \end{cases} \tag{7}$$

和激波

$$S:\begin{cases} \sigma=(f(u_l)-f(u_r))/(u_l-u_r), \\ [f(u)]/[u]=[g(u)v]/[v],\ (u_l>u_r). \end{cases} \tag{8}$$

2 狄拉克激波的广义 Rankine–Hugoniot 条件

设系统(1) 的初始数据为$(v,u)(0,x)=(v_0,u_0)(x)$, 若 $u'_0(x_0)<0$, 容易验证 v 和 $\partial_x u$ 将在一有限时间同时发生爆破[2,6,7]. 因此对于初始数据(2), 当 $u_+<u_-$ 时, δ– 激波将可能出现.

定义 1 称(v,u) 为(1) 的测度解, 如果对任意的测验函数 $\varphi\in C_0^\infty((0,\infty)\times R^1)$, (v,u) 都满足

$$\begin{cases} \int_0^\infty\int_{R^1}(u\varphi_t+f(u)\varphi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0, \\ \int_0^\infty\int_{R^1}((\varphi_t+g(u)\varphi_x)v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \end{cases} \tag{9}$$

现在寻找以 $x=x(t)$ 为间断线, 形式为

$$(v,u)(t,x)=\begin{cases}(v_-,u_-),\ x<x(t),\\(w(t)\delta(x-x(t)),u_\delta(t)),\ x=x(t),\\(v_+,u_+),\ \ x>x(t)\end{cases}\tag{10}$$

的间断解. 这里 $\delta(x)$ 是以 $x=x(t)$ 为支撑的狄拉克–广义函数, $x(t),\ u_\delta(t)\in C^1[0,+\infty]$.

定理 2　若(10) 满足下列广义 Rankine–Hugoniot 条件(简称广义 R–H 条件)

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\sigma_\delta,\\ \dfrac{dw}{dt}=[v]\sigma_\delta-[g(u)v],\\ [u]\sigma_\delta-[f(u)]=0\end{cases}\tag{11}$$

和

$$\sigma_\delta=g(u_\delta),\tag{12}$$

这里$[G]=G_2-G_1$. 则(10) 是系统(1) 在测度意义下的解.

在条件(11) 中, 第1个方程称为运动方程, 第2个方程称为质量守恒方程. 它们描述了 δ–激波的位置 $x=x(t)$, 传播速度 $\sigma_\delta(t)$ 与权 $w(t)$ 之间的关系.

为了证明此定理, 我们只需证(v,u) 满足(9) 的第 2个方程即可.

证明　对于任意的 $\varphi\in C_0^\infty((0,\infty)\times R^1)$, 我们有

$$\begin{aligned}I=&\int_0^{+\infty}\int_{R^1}((\varphi_t+g(u)\varphi_x)v)\,dx\,dt=\\&\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{x(t)}((\varphi_t+g(u_1)\varphi_x)v_1)dx\,dt+\int_0^{+\infty}\int_{z(t)}^{+\infty}((\varphi_t+g(u_2)\varphi_x)v_2)\,dx\,dt+\\&\int_0^{+\infty}w(t)(\varphi_t(t,x(t))+g(u_\delta)\varphi_x(t,x(t)))\,dx\,dt=\\&\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{x(t)}[(v_1\varphi)_t+(v_1g(u_1)\varphi)_x]dx\,dt-\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{x(t)}[(v_1)_t+(v_1g(u_1))_x]\varphi dx\,dt+\\&\int_0^{+\infty}\int_{x(t)}^{+\infty}[(v_2\varphi)_t+(v_2g(u_2)\varphi)_x]dx\,dt-\int_0^{+\infty}\int_{+\infty}^{x(t)}[(v_2)_t+(v_2g(u_2))_x]\varphi dx\,dt+\\&\int_0^{+\infty}w(t)\frac{d\varphi(t,x(t))}{dt}dt=\\&\int_0^{+\infty}[(v_2-v_1)x'(t)-(v_2g(u_2)-v_1g(u_1))]\varphi(t,x(t))dt-\int_0^{\infty}\frac{dw(t)}{dt}\varphi(t,x(t))dt=\\&\int_0^{+\infty}\left\{([v]x'(t)-[vg(u)])-\frac{dw(t)}{dt}\right\}\varphi(t,x(t))\,dt.\end{aligned}$$

由条件(11) 有 $I=0$. 证毕.

特别地, 当 $f'(u)\equiv g(u)$ 时, 将(9) ~ (12) 中的 $g(u)$ 替换为 $f'(u)$, 可得(3) 的测度解和广义 Rankine–Hugoniot 条件.

除了广义 R–H 条件(11) 和(12) 之外, 为了保证 δ–激波的唯一性, 补充熵条件如下

$$\lambda_1^+<\sigma_\delta<\lambda_1^-,\ \ \lambda_2^+<\sigma_\delta<\lambda_2^-.\tag{13}$$

此熵条件表明, 在(x,t)–平面上, 由间断两侧发出的 4 簇特征线全部进入 δ–激波间断线 $x=x(t)$.

满足(11) ~ (13) 的间断被称为系统(1) 的狄拉克激波, 简记为 δ.

3　黎曼问题的狄拉克激波解

这一节, 我们分别在情形(C_1) ~ (C_3) 下求解黎曼问题(1) 与(2), 对于由古典波构成的解参看文献[2, 3, 6, 7], 这里仅研究该问题的 δ–激波解.

(1) 情形(C_1)

当 $u_+ < u_-$ 时,线性退化的特征线在区域 $f'(u_+)t < x(t) < f'(u_-)t$ 内重叠,因此,解中将出现 δ-激波.

在初值为

$$t = 0: x(0) = 0,\quad w(0) = 0,\quad u_\delta(0) = 0 \tag{14}$$

的条件下,解常微分方程组(11) 和(12)(其中的 $g(u)$ 替换为 $f'(u)$),可得

$$\begin{cases} \sigma_\delta = \dfrac{[f(u)]}{[u]}, \\ w(t) = \left([v]\dfrac{[f(u)]}{[u]} - [f'(u)v]\right)t, \\ x = x(t) = \sigma_\delta t = \dfrac{[f(u)]}{[u]}t, \\ u_\delta = (f')^{-1}(\sigma_\delta). \end{cases} \tag{15}$$

此时熵条件(13) 等价于

$$u_+ < u_\delta < u_-, \tag{16}$$

容易验证(15) 满足熵条件(16).

此种情形的 δ- 激波解由(10) 表示,其中 $x(t)$, $w(t)$ 和 $u_\delta(t)$ 由(15) 给出.

(2) 情形(C_2)

当 $u_+ < u_-$ 时,我们有

$$\lambda_1^- > \lambda_1^+,\quad \lambda_2^- > \lambda_2^+, \tag{17}$$

因此,对于系统(1) 中第一个方程来说,一个古典激波(S) 形成. 由(8) 知其传播速度为

$$\sigma = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = f'(\bar{u}),\quad \bar{u} \in [u_+, u_-]. \tag{18}$$

从而

$$\lambda_2^- > \sigma > \lambda_2^+, \tag{19}$$

由此,当 $g(u_-) > f'(\bar{u}) > g(u_+)$,即 $\lambda_1^- > \sigma > \lambda_1^+$ 时,解中将出现 δ- 激波.

解常微分方程组的初值问题(11),(12) 和(14) 可得

$$\begin{cases} \sigma_\delta = \dfrac{[f(u)]}{[u]}, \\ w(t) = \left([v]\dfrac{[f(u)]}{[u]} - [g(u)v]\right)t, \\ x = x(t) = \sigma_\delta t = \dfrac{[f(u)]}{[u]}t, \\ u_\delta = g^{-1}(\sigma_\delta). \end{cases} \tag{20}$$

此时容易验证(20) 满足熵条件(13).

此种情形下的 δ- 激波解由(10) 表示,其中 $x(t)$, $w(t)$ 和 $u_\delta(t)$ 由(20) 给出.

(3) 情形(C_3)

这里仅研究 $g(u) > f'(u)$ 的情形,对于 $g(u) < f'(u)$ 的情形,类似可得.

当 $u_+ < u_-$ 时,除(17),(18) 和(19) 成立之外,还可得到

$$\lambda_1^- > \lambda_2^-,\quad \lambda_1^+ > \lambda_2^+, \tag{21}$$

此时当 $f(\bar{u}) > g(u_+)$,即 $\sigma > \lambda_1^+$ 时,解中出现 δ- 激波.

解常微分方程组的初值问题(11),(12) 和(14),可得 $x(t)$, $w(t)$ 和 $u_\delta(t)$ 仍由(20) 给出,且满足熵条件(13). 此种情形下的 δ- 激波解仍由(10) 表示.

注 可以证明,3 种情况下的狄拉克激波解在粘性扰动下都是稳定的[2,5~7].

综上可知, 关于狄拉克激波出现的原因, 系统是严格双曲还是非严格双曲并不是其本质, 其形成的数学机制是线性退化的特征线的重叠. 对于给定的初始数据$(u_{\pm}, v_{\pm})$, 解中出现狄拉克激波的充分必要条件是特征线为 4 进的.

参考文献:

[1] TAN De-chun, ZHANG Tong. Two dimensional Riemann problem fora hyperbolic system of nonlinear conservation laws (Ⅰ): Four Jcases[J]. Journal of Differential Equations, 1994, 111: 203-254.

[2] TAN De-chun, ZHANG Tong, ZHENG Yu-xi. Delta-shock wavesas limits of vanishing viscosity for hyperbolic systems of conversation laws[J]. J Differential Equations, 1994, 112(1): 1-32.

[3] LE FLOCH P. An existence and uniqueness result for two nonstrictly hyperbolic systems[J]. Ecole Polytechnique: Centre de Mathematiques Appliquees, 1990, 219: 126-138.

[4] 丁夏畦, 王振. 用 Lebesgue- Stieltjes 积分定义的间断解的存在唯一性[J]. 中国科学(A 辑), 1996, 39(2): 15-25.

[5] 杨汉春. 具粘性项的非严格双曲守恒律组的定态解[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 1997, 19(3): 304-308.

[6] LI Jie-quan, YANG Shu-li, ZHANG Tong. The two-dimensional Riemann problem in gas dynamics[M]. New York: Longman Scientic and Technical, 1998.

[7] YANG Han-chun. Riemann problem for a class of coupled hyperbolic of conservation laws[J]. Journal of Differential Equations, 1999, 159(2): 447-484.

[8] LAX P D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves[Z]. Philadelphia: SIAM, 1973.

Delta shock waves for a class of decoupled hyperbolic system of conservation laws

CHENG Hong-jun, ZHANG Tong, YANG Han-chun

(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract: Riemann problems for a class of decoupled non-strictly or strictly hyperbolic system of conservation laws, which have a linearly degenerate characteristic, are studied. With the help of characteristic method, under generalized Rankine-Hugoniot relation and entropy condition, delta-shock solutions are obtained.

Key words: hyperbolic system of conservation laws; delta shock wave; generalized Rankube-Hugoniot relation; entropy condition