

研究简报

压缩真空中理想玻色-爱因斯坦 凝聚体杂质间的相互作用

王艳¹, 杨慧², 郑丽³, 姜文英⁴, 潘淑梅², 郑泰玉²

(1. 长春职业技术学院 汽车分院, 长春 130033; 2. 东北师范大学 物理学院, 长春 130024;
3. 大连工业大学 信息科学与工程学院, 辽宁 大连 116034;
4. 桂林电子科技大学 电子工程与自动化学院, 广西 桂林 541004)

摘要: 应用 Riemann Zeta 函数研究一维压缩真空中理想玻色-爱因斯坦凝聚体杂质间的 Casimir 效应, 计算了真空压缩态下系统的 Casimir 能量和杂质间的 Casimir 力, 并讨论了 Casimir 力和压缩系数与杂质间距离的关系。

关键词: 压缩真空态; 玻色-爱因斯坦凝聚; Casimir 效应

中图分类号: O469 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2012)03-0549-03

Interaction between Contaminants in Ideal Bose-Einstein Condensates in the Squeezed Vacuum

WANG Yan¹, YANG Hui², ZHENG Li³, JIANG Wen-ying⁴, PAN Shu-mei², ZHENG Tai-yu²

(1. *Institute of Automobile, Changchun Vocational Institute of Technology, Changchun 130033, China;*
2. *School of Physics, Northeast Normal University, Changchun 130024, China;*
3. *College of Information Science and Engineering, Dalian Polytechnic University, Dalian 116034, Liaoning Province, China;*
4. *School of Electronic Engineering and Automation, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, Guangxi Zhuang Autonomous Region, China*)

Abstract: The Casimir effect between contaminants of the Bose-Einstein condensed system in the one-dimensional squeezed vacuum states was studied by means of Riemann Zeta function. The Casimir energy of the system in the squeezed vacuum state and the Casimir force between the contaminants were calculated, the relationship of the Casimir force with squeezing parameter and distance was discussed.

Key words: squeezed vacuum states; Bose-Einstein condensates; Casimir effect

玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)在光学、原子分子物理、凝聚态物理、激光物理、统计物理和材料学等领域应用广泛^[1-4]。Casimir效应在量子场论、凝聚态物理、原子和分子物理、万有引力和宇宙学及数学物理等领域应用广泛^[5-6]。Casimir力是由真空电磁场中的零点涨落产生的,并在实验上分别测量到吸引力和排斥力^[7-8]。目前,Casimir效应的研究已引起人们广泛关注^[9]。

在凝聚体中,若将杂质作为边界,则系统的能量与杂质间的距离有关,杂质间也会产生作用,这种类似于真空中的Casimir效应称为类Casimir效应^[10]。本文应用Riemann Zeta函数研究一维真空压缩

收稿日期: 2011-05-26.

作者简介: 王艳(1963—),女,汉族,副教授,从事数学物理的研究, E-mail: 85259918@qq.com. 通讯作者: 潘淑梅(1964—),女,汉族,硕士,讲师,从事量子物理的研究, E-mail: pansm717@nenu.edu.cn; 郑泰玉(1960—),女,朝鲜族,博士,教授,博士生导师,从事理论物理的研究, E-mail: zhengty@nenu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11175044; 11105021)和吉林省自然科学基金(批准号: 201115007).

态玻色-爱因斯坦凝聚体杂质间的 Casimir 效应.

1 杂质间的 Casimir 力

本文采用类似文献[10]的模型, 假设 Bose-Einstein 凝聚体系采用一维有质量的标量场方程描述:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(t, x) = 0, \quad (1)$$

其中 m 为玻色子质量. 其边界条件满足

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, a). \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)可得:

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(+)}(t, x) &= \sqrt{\frac{c}{2a\omega_n}} e^{i(\omega_n t - k_n x)}, \\ \varphi_n^{(-)}(t, x) &= \sqrt{\frac{c}{2a\omega_n}} e^{-i(\omega_n t - k_n x)}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\omega_n = \sqrt{\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 k_n^2}, \quad k_n = \frac{2\pi n}{a}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

对场量子化可得

$$\varphi(t, x) = \sum_n [\varphi_n^{(-)}(t, x) a_n + \varphi_n^{(+)}(t, x) a_n^+] = \sum_n \left[\sqrt{\frac{c}{2a\omega_n}} e^{-i(\omega_n t - k_n x)} a_n + \sqrt{\frac{c}{2a\omega_n}} e^{i(\omega_n t - k_n x)} a_n^+ \right], \quad (5)$$

其中 a_n 和 a_n^+ 分别为场的产生算符和湮灭算符, 满足如下对易关系:

$$[a_n, a_n^+] = \delta_{n, n'}, \quad [a_n, a_n] = [a_n^+, a_n^+] = 0, \quad a_n |0\rangle = 0. \quad (6)$$

能量密度算符为

$$T_{00}(x) = \frac{\hbar c}{2} \{ c^{-2} [\partial_t \varphi(x)]^2 + [\partial_x \varphi(x)]^2 \}, \quad (7)$$

系统的 Hamilton 量为

$$H = \int_0^a T_{00}(x) dx. \quad (8)$$

将式(7)代入式(8)可得系统的 Hamilton 量为

$$H = \int_0^a \frac{\hbar c}{2} (c^{-2} [\partial_t \varphi(x)]^2 + [\partial_x \varphi(x)]^2) dx. \quad (9)$$

在压缩真空态下, 杂质间的能量可表示为

$$E_{\text{sq}} = \prod_n \langle 0_n | S_n^+ H S_n | 0_n \rangle_{\text{sq}}, \quad (10)$$

其中 S_n 为单模压缩算符, 表达式为

$$S_n = \exp \left[\frac{1}{2} \lambda_n a_n^2 - \frac{1}{2} \lambda_n (a_n^+)^2 \right], \quad S_n S_n^+ = 1, \quad (11)$$

式中 λ_n 为第 n 个模式的压缩系数.

利用

$$S_n^+ a_n S_n = a_n \cosh \lambda_n - a_n^+ \sinh \lambda_n, \quad S_n^+ a_n^+ S_n = a_n^+ \cosh \lambda_n - a_n \sinh \lambda_n \quad (12)$$

以及式(3)~(9), 可将式(10)变为

$$E_{\text{sq}} = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \cosh 2\lambda_n. \quad (13)$$

为简单, 考虑 $\lambda_n = \lambda$, $m=0$ 的情况. 利用公式

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \pi^{-z/2} \zeta(z) = \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \pi^{(z-1)/2} \zeta(1-z), \quad (14)$$

其中: $\Gamma(z)$ 为 Gamma 函数; $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ 为 Riemann Zeta 函数, 可得压缩态下的类 Casimir 力为

$$F_{\text{sq}} = -\frac{\partial E_0}{\partial a} = \frac{\pi hc}{12a^2/(\cosh 2\lambda)} = -\frac{\pi hc}{24d'^2}, \quad (15)$$

其中 $d' = a/\sqrt{\cosh 2\lambda}$.

当 $\lambda = 0$ 时, 可得真空态下的 Casimir 力

$$F_0 = -\frac{\partial E_0}{\partial a} = -\frac{\pi hc}{12a^2}. \quad (16)$$

由方程(15)和(16)可见, 在压缩态下相距为 d' 的杂质间 Casimir 力与真空态下相距为 a 的杂质间 Casimir 力相等.

2 数值计算与分析

在不同的压缩系数 λ 下, 压缩态的类 Casimir 力 F 随杂质间距离 a 的变化关系如图 1 所示, 其中曲线 a 对应 $\lambda = 0$, 即真空态的情况; 曲线 b 和 c 分别对应 $\lambda = 0.7$ 和 $\lambda = 1.2$, 即压缩态情况. 由图 1 可见: Casimir 力 F 随杂质间的距离 a 增大而变小; 压缩系数越大, 力越大; 在真空态下力最小.

综上, 本文计算了压缩态下理想玻色-爱因斯坦凝聚体中的类 Casimir 能量和力, 并给出了类 Casimir 力随压缩系数和杂质间距离的变化关系. 对于一维情况, 在压缩态或真空态下, Casimir 能量与距离均为负二次幂的关系. 由于 $d' > a$, 因此当玻色-爱因斯坦凝聚体中杂质的间距相同时, 压缩态下的杂质间类 Casimir 力大于真空态下的杂质间类 Casimir 力. 表明在压缩态下更利于在实验中测得玻色-爱因斯坦凝聚体中杂质间的力.

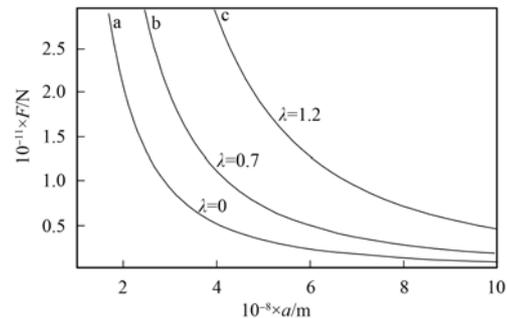


图 1 压缩态的类 Casimir 力 F 随杂质间距离 a 的变化关系

Fig.1 Plots of the force F versus a at different values of λ

参 考 文 献

- [1] Anderson M H, Ensher J R, Mathews M R, et al. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor [J]. Science, 1995, 269: 198-201.
- [2] Bradley C C, Sackett C A, Tollett J J, et al. Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions [J]. Phys Rev Lett, 1995, 75(9): 1687-1690.
- [3] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, et al. Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms [J]. Phys Rev Lett, 1995, 75(22): 3969-3973.
- [4] WANG Yan, LI Tong, ZHENG Li, et al. The Interaction between Contaminants in Ideal Bose-Einstein Condensates for Periodic Boundary Condition [J]. Journal of Northeast Normal University: Natural Science Edition, 2011, 43(4): 81-83. (王艳, 李彤, 郑丽, 等. 周期边界下玻色爱因斯坦凝聚体杂质间相互作用 [J]. 东北师大学报: 自然科学版, 2011, 43(4): 81-83.)
- [5] Casimir H B G. The Energy between Two Large Uncharged Conducting Plates [J]. Proc Kon Nederl Akad Wet, 1948, 51: 793-797.
- [6] Klimchitskaya G L, Mohideen U, Mostepanenko V M. Theoretical Ingredients of a Casimir Analog Computer [J]. Rev Mod Phys, 2009, 81: 1827-1885.
- [7] Lamoreaux S K. Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 mm Range [J]. Phys Rev Lett, 1997, 78(1): 5-8.
- [8] Munday J N, Capasso F, Parsegian V A. Measured Long-Range Repulsive Casimir-Lifshitz Forces [J]. Nature, 2009, 457: 170-173.
- [9] Sushkov A O, Kim W J, Dalvit D A R, et al. Observation of the Thermal Casimir Force [J]. Nature Physics, 2011, 7: 230-233.
- [10] Alexander Oshmyansky. A Proposed Casimir-Like Effect between Contaminants in Ideal Bose-Einstein Condensates [J/OL]. 2007-03-08. <http://arXiv:cond-mat/0703211v1>. (责任编辑: 王健)