第50卷　第3期　　吉林大学学报(理学版)　　Vol. 50　No. 3
2012年5月　　Journal of Jilin University (Science Edition)　　May　2012

半群 PO_n 的极大子半带

徐　波[1], 赵　平[2]
(1. 贵州师范大学 数学与计算机科学学院, 贵阳 550001; 2. 贵阳医学院 基础医学院, 贵阳 550004)

摘要: 考虑有限链上的部分保序变换半群 PO_n, 通过对其幂等元的分析, 得到了 PO_n 极大子半带的结构与分类.

关键词: 变换半群; 保序; 极大子半带
中图分类号: O152.7　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1671-5489(2012)03-0445-07

Maximal Subsemibands of the Semigroup PO_n

XU Bo[1], ZHAO Ping[2]
(1. *School of Mathematics and Computer Science*, *Guizhou Normal University*, *Guiyang* 550001, *China*;
2. *School of Basic Medicine*, *Guiyang Medical College*, *Guiyang* 550004, *China*)

Abstract: The authors studied the semigroup PO_n, consisting of all singular partial order-preserving transformations on a finite chain. Analyzing the idempotent elements, we completely obtained the structures and classification of the maximal subsemibands of the semigroup PO_n.

Key words: transformation semigroup; order-preserving; maximal subsemibands

1　预备知识

设 $[n]=\{1,2,\cdots,n\}$ 并赋予自然序, Sing_n 和 P_n 分别是 $[n]$ 上的奇异变换半群和部分变换半群. 对 $\alpha\in P_n$, 若对任意的 $x,y\in\mathrm{Dom}(\alpha)$, $x\leqslant y\Rightarrow x\alpha\leqslant y\alpha$, 则称 α 是保序的. 设 PO_n 为 P_n 中除恒等变换外所有保序部分变换构成的集合, 则 PO_n 是 P_n 的子半群, PO_n 称为保序部分变换半群. 记 $O_n=PO_n\cap\mathrm{Sing}_n$, 则 O_n 是 PO_n 的子半群, 称为 $[n]$ 上的保序变换半群. 部分保序变换半群 PO_n 是部分变换半群 P_n 的一类特殊子半群, 关于 PO_n 的研究目前已有很多结果[1-6]. 徐波等[6]得到了部分保序变换半群 PO_n 的幂等生成极大子半群和极大正则子半群的结构. 本文在文献[6]的基础上, 考虑保序部分变换半群 PO_n 的极大子半带的结构和分类.

由文献[1]可知, PO_n 中的 Green 关系有如下刻画: 对任意 $\alpha,\beta\in PO_n$, 有

$$\alpha\mathscr{L}\beta\Leftrightarrow\mathrm{Im}(\alpha)=\mathrm{Im}(\beta),\qquad\alpha\mathscr{R}\beta\Leftrightarrow\mathrm{Ker}(\alpha)=\mathrm{Ker}(\beta),$$
$$\alpha\mathscr{D}\beta\Leftrightarrow|\mathrm{Im}(\alpha)|=|\mathrm{Im}(\beta)|,\qquad\mathscr{D}=\mathscr{J},$$

且 O_n 是 $\mathscr{H}$-平凡的(如果一个半群的每个 $\mathscr{H}$-类都只有一个元素, 则称其为 $\mathscr{H}$-平凡的). 对 $1\leqslant r\leqslant n-1$, 记 $J_r=\{\alpha\in PO_n\colon|\mathrm{Im}(\alpha)|=r\}$, 则 PO_n 有 n 个 $\mathscr{J}$-类 $J_0,J_1,\cdots,J_{n-1}$, 其中 J_0 为空变换构成的集合. 对 $1\leqslant r\leqslant s\leqslant n$, 令

$$[r,s]=\{\alpha\in PO_n\colon|\mathrm{Im}(\alpha)|=r,\ |\mathrm{Dom}(\alpha)|=s\},$$

收稿日期: 2011-06-21.
作者简介: 徐　波(1975—), 男, 汉族, 硕士, 副教授, 从事半群理论的研究, E-mail: xubo1975@gznu.edu.cn.
基金项目: 贵州省科学技术基金(批准号: 黔科合[2010]3174; 黔基合计字[2004]3047).

则 $J_r=\bigcup_{i=r}^{n}[i,r]$，且 $J_{n-1}=[n,n-1]\cup[n-1,n-1]$. 在顶端 $\mathscr{J}$-类 J_{n-1}中，类似于文献[3]，本文引入以下符号：

$$R_{(i,i+1)}=\{\alpha\in[n,n-1]:\mathrm{Ker}(\alpha)\text{ 的唯一非单点核类是}\{i,i+1\}\},\quad i=1,2,\cdots,n-1,$$
$$R_i=\{\alpha\in[n-1,n-1]:\mathrm{Dom}(\alpha)=[n]\setminus\{i\}\},\quad i=1,2,\cdots,n,$$
$$L_k=\{\alpha\in J_{n-1}:\mathrm{Im}(\alpha)=[n]\setminus\{k\}\},\quad k=1,2,\cdots,n,$$
$$H^k_{(i,i+1)}=R_{(i,i+1)}\cap L_k,\quad k\in[n],\quad i\in[n]\setminus\{n\},\quad H^k_{(i)}=R_i\cap L_k,\quad k,i\in[n].$$

因此 J_{n-1}有 n 个 $\mathscr{L}$类 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 和 $2n-1$ 个 $\mathscr{R}$ 类 $R_{(1,2)},R_{(2,3)},\cdots,R_{(n-1,n)},R_1,R_2,\cdots,R_n$.

用$[i\to i-1]$和$[i\to i+1]$分别表示降幂等元 e 和升幂等元 f [1]，这里：$ie=i-1$；$xe=x\,(x\neq i)$；$if=i+1$；$xf=x\,(x\neq i)$. 设 E_{n-1}是 O_n 中秩为 $n-1$ 的幂等元之集，则 E_{n-1}由 $n-1$ 个降幂等元$[i\to i-1]$和 $n-1$ 个升幂等元$[i\to i+1]$构成. 对于 $k=1,2,\cdots,n$，若用 δ_k 表示集合$[n]\setminus\{k\}$上的恒等映射，记 $F_{n-1}=\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$，则 PO_n 中秩为 $n-1$ 的幂等元集为 $E_{n-1}\cup F_{n-1}$.

PO_n 的理想构成一个链，即

$$K(n,0)\subset K(n,1)\subset\cdots\subset K(n,n-1)=PO_n,$$

其中 $K(n,r)=\{\alpha\in PO_n:|\mathrm{Im}(\alpha)|\leqslant r\}$. PO_n 的每个主因子是一个 Rees 商半群 $K(n,r)/K(n,r-1)$，记为 Q_r. 为方便，可将 Q_r 视为 $J_r\cup\{0\}$，即 $Q_r=J_r\cup\{0\}$，其乘法定义为

$$\alpha\cdot\beta=\begin{cases}\alpha\beta, & \alpha\beta\in J_r,\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

Q_r 对上述乘法“·”作成一个完全0-单半群.

设 U 是半群 S 的任意子集，用 $E(U)$表示 U 中的幂等元之集. 对任意的 $a\in S$，用 $V(a)$表示 a 在 S 中的所有逆元之集；$R_\alpha,L_\alpha,H_\alpha$ 分别表示 α 所在 $\mathscr{R}$类,$\mathscr{L}$类,$\mathscr{H}$类. 本文未定义的术语参见文献[7-10].

由上述事实和符号，易得：

引理1 设 $n\geqslant3$，则

$$E(R_{(i,i+1)})=\{[i\to i+1],[i+1\to i]\},\quad 1\leqslant i\leqslant n-1,\quad E(R_{(i)})=\{\delta_i\},\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$
$$E(L_1)=\{[1\to2],\delta_1\},\qquad E(L_n)=\{[n\to n-1],\delta_n\},$$
$$E(L_i)=\{[i\to i-1],[i\to i+1],\delta_i\},\qquad 2\leqslant i\leqslant n-1.$$

引理2 设 $n\geqslant3$，则

$$E([n,n-1])=E_{n-1},\quad E([n-1,n-1])=F_{n-1},\quad E(J_{n-1})=E_{n-1}\cup F_{n-1}.$$

引理3 设 $n\geqslant3$，$\alpha\in J_{n-1}$.

(i) 若 $\alpha\in H^i_{(k)}$且 $k>i$，则 $\alpha=e_k\cdot[k-1\to k]\cdot[i\to i+1]$；

(ii) 若 $\alpha\in H^i_{(k)}$且 $k<i$，则 $\alpha=e_k\cdot[k+1\to k]\cdots[i\to i-1]$；

(iii) 若 $\alpha\in H^i_{(k,k+1)}$且 $k>i$，则 $\alpha=[k\to k+1]\cdots[i\to i+1]$；

(iv) 若 $\alpha\in H^i_{(k,k+1)}$且 $k<i$，则 $\alpha=[k+1\to k]\cdots[i\to i-1]$.

引理4 设 $\alpha,\beta\in J_{n-1}$，则 $\alpha\beta\in J_{n-1}$当且仅当 $L_\alpha\cap R_\beta$ 中含有幂等元. 此时，$\alpha\beta\in L_\beta\cap R_\alpha$.

2 半群 PO_n 的极大子半带

设 P,Q 是$[n]$的非空子集，若对任意的 $a\in P$，$b\in Q$，有 $a<b$，则称 P 小于 Q，记为 $P<Q$. 设 $\alpha\in PO_n$，如果 $x<y\ (x,y\in\mathrm{Im}(\alpha))$，则显然有 $x\alpha^{-1}<y\alpha^{-1}$. 因此，对任意的 $\alpha\in PO_n(|\mathrm{Im}(\alpha)|=r\geqslant2)$，由保序性容易验证 α 具有如下表示法(称为 α 的标准表示)：

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_r\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r\end{pmatrix},$$

这里：$a_1<a_2<\cdots<a_r$；$A_1<A_2<\cdots<A_r$.

定义1 由幂等元生成的正则半群称为半带.

定义 2　设 S 是半群 PO_n 的真子半群，若 S 满足下列条件，则称 S 是 PO_n 的极大子半带：

（i）S 是半带；

（ii）对 PO_n 的任意子半带 T，有 $S\subset T\Rightarrow T=PO_n$.

为方便，引入符号

$$\Sigma_{[s,t]}^{[k,l]} = \bigcup_{i=k}^{l}\bigcup_{j=s}^{t} H^{i}_{(j,\,j+1)},\quad 1\leqslant k\leqslant l\leqslant n,\quad 1\leqslant s\leqslant t\leqslant n-1,$$

$$\widetilde{\Sigma}_{[s,t]}^{[k,l]} = \bigcup_{i=k}^{l}\bigcup_{j=s}^{t} H^{i}_{(j)},\quad 1\leqslant k\leqslant l\leqslant n,\quad 1\leqslant s\leqslant t\leqslant n.$$

本文的主要结果如下：

定理 1　设 $n\geqslant 3$，则半群 PO_n 的极大子半带有且仅有如下两类：

1）$A_k=K(n,n-2)\cup S_k$，其中 $S_k=\{\alpha\in J_{n-1}: k\in \mathrm{Dom}(\alpha)\}$，$1\leqslant k\leqslant n$；

2）$B_k=K(n,n-2)\cup M_k\cup N_k$，$1\leqslant k\leqslant n-1$，其中：

$$M_k = \Sigma_{[1,k-1]}^{[1,k]} \cup \widetilde{\Sigma}_{[1,k]}^{[1,k]};\qquad N_k = \Sigma_{[k+1,n-1]}^{[k+1,n]} \cup \widetilde{\Sigma}_{[k+1,n]}^{[k+1,n]}.$$

注 1　当 $k=1$ 时，$M_1=\widetilde{\Sigma}_{[1,1]}^{[1,1]}=H^1_{(1)}$；当 $k=n-1$ 时，$N_{n-1}=\widetilde{\Sigma}_{[n,n]}^{[n,n]}=H^n_{(n)}$.

为证明定理 1，需要以下引理.

引理 5[1]　设 $n\geqslant 3$，则 PO_n 是正则的，且 $PO_n=\langle E(J_{n-1})\rangle$.

引理 6[4]　设 M_k 和 N_k 为定理 1 中的定义，则：

（i）$M_k\subseteq\langle E(M_k)\rangle$；

（ii）$N_k\subseteq\langle E(N_k)\rangle$.

注 2　注意到 PO_n 是 $\mathscr{H}$-平凡的. 易见

$$H^{s+1}_{(s,s+1)} = \{[s+1\to s]\},\quad H^{s}_{(s,s+1)} = \{[s\to s+1]\},\quad 1\leqslant s\leqslant n-1, \tag{1}$$

$$H^{s}_{(s)} = \{\delta_s\},\qquad 1\leqslant s\leqslant n. \tag{2}$$

注 3　注意到 $M_k = \Sigma_{[1,k-1]}^{[1,k]} \cup \widetilde{\Sigma}_{[1,k]}^{[1,k]}$，$N_k = \Sigma_{[k+1,n-1]}^{[k+1,n]} \cup \widetilde{\Sigma}_{[k+1,n]}^{[k+1,n]}$. 由注 2 易得

$$E(M_k) = \{[1\to 2],[2\to 1],\cdots,[k-1\to k],[k\to k-1],\delta_1,\cdots,\delta_k\},$$

$$E(N_k) = \{[k+1\to k+2],[k+2\to k+1],\cdots,[n-1\to n],[n\to n-1],\delta_{k+1},\cdots,\delta_n\}.$$

又由引理 1 和引理 2 可得

$$E(M_k)\cup E(N_k) = E(J_{n-1})\setminus\{[k\to k+1],[k+1\to k]\}. \tag{3}$$

引理 7　设 M_k 和 N_k 定义如定理 1，则：

（i）对任意的 $\alpha\in M_k$，存在 $\beta\in M_k$，使得 $\alpha=\alpha\beta\alpha$；

（ii）对任意的 $\alpha\in N_k$，存在 $\beta\in N_k$，使得 $\alpha=\alpha\beta\alpha$.

证明：注意到

$$M_k = \Sigma_{[1,k-1]}^{[1,k]} \cup \widetilde{\Sigma}_{[1,k]}^{[1,k]},$$

其中：

$$\Sigma_{[1,k-1]}^{[1,k]} = \bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{k-1} H^{i}_{(j,\,j+1)};\qquad \widetilde{\Sigma}_{[1,k]}^{[1,k]} = \bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{k} H^{i}_{(j)}. \tag{4}$$

（i）任意取 $\alpha\in M_k$，则 $\alpha\in\Sigma_{[1,k-1]}^{[1,k]}$ 或 $\alpha\in\widetilde{\Sigma}_{[1,k]}^{[1,k]}$. 下面分两种情形证明存在 $\beta\in M_k$，使得 $\alpha=\alpha\beta\alpha$.

1）若 $\alpha\in\Sigma_{[1,k-1]}^{[1,k]}$，则存在 $1\leqslant i\leqslant k$，$1\leqslant j\leqslant k-1$，使得 $\alpha\in H^{i}_{(j,\,j+1)}$.

① $i=j$. 由式(1)可知，$\alpha=[j\to j+1]$. 取 $\beta=\alpha$，则显然 $\beta=\alpha\in M_k$ 且 $\alpha=\alpha\beta\alpha$.

② $j>i$. 根据 PO_n 中元的标准表示可知

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & \cdots & j-1 & \{j,\,j+1\} & j+2 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & j & j+1 & j+2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

令

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & \{i,i+1\} & i+2 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & i & i+2 & \cdots & n \end{pmatrix},\qquad j=i+1;$$

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & \cdots & i-1 & \{i,i+1\} & i+2 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j+1 & \cdots & n\end{pmatrix},\quad j>i+1,$$

则 $\alpha=\alpha\beta\alpha$ 且 $\beta\in H^{j}_{(i,i+1)}$. 再注意到 $1\leqslant i<j\leqslant k-1$, 则由式(4)可知, $H^{j}_{(i,i+1)}\subseteq M_k$, 从而 $\beta\in H^{j}_{(i,i+1)}\subseteq M_k$.

③ $i>j$. 根据 PO_n 中元的标准表示可知

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & \cdots & i-2 & \{i-1,i\} & i+1 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & i-2 & i-1 & i+1 & \cdots & n\end{pmatrix},\quad i=j+1;$$

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & \cdots & j-1 & \{j,j+1\} & j+2 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n\end{pmatrix},\quad i>j+1.$$

令

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & \cdots & i-2 & \{i-1,i\} & i+1 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & i-2 & i-1 & i+1 & \cdots & n\end{pmatrix},\quad i=j+1;$$

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & \cdots & j & j+1 & \cdots & i-2 & \{i-1,i\} & i+1 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & j & j+2 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & n\end{pmatrix},\quad i>j+1.$$

则 $\alpha=\alpha\beta\alpha$ 且 $\beta\in H^{j+1}_{(i-1,i)}$. 再注意到 $1\leqslant j<i\leqslant k$, 则由式(4)可知, $H^{j+1}_{(i-1,i)}\subseteq M_k$, 从而 $\beta\in H^{j+1}_{(i-1,i)}\subseteq M_k$.

2) 若 $\alpha\in\widetilde{\Sigma}^{[1,k]}_{[1,k]}$, 则存在 $1\leqslant s\leqslant k$, $1\leqslant t\leqslant k$, 使得 $\alpha\in H^{s}_{(t)}$.

① $s=t$. 由式(2)可知, $\alpha=\delta_s$. 取 $\beta=\alpha$, 则显然 $\beta=\alpha\in M_k$ 且 $\alpha=\alpha\beta\alpha$.

② $t>s$. 根据 PO_n 中元的标准表示可知

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & \cdots & s-1 & s & \cdots & t-1 & t+1 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & s-1 & s+1 & \cdots & t & t+1 & \cdots & n\end{pmatrix}.$$

令

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & \cdots & s-1 & \{s,s+1\} & s+2 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & s-1 & s & s+2 & \cdots & n\end{pmatrix},\quad t=s+1;$$

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & \cdots & s-1 & \{s,s+1\} & s+2 & \cdots & t & t+1 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & s-1 & s & s+1 & \cdots & t-1 & t+1 & \cdots & n\end{pmatrix},\quad t>s+1,$$

则 $\alpha=\alpha\beta\alpha$ 且 $\beta\in H^{t}_{(s,s+1)}$. 再注意到 $1\leqslant s<t\leqslant n$, 同由式(4)可知, $H^{t}_{(s,s+1)}\subseteq M_k$, 从而 $\beta\in H^{t}_{(s,s+1)}\subseteq M_k$.

③ $s>t$. 根据 PO_n 中元的标准表示可知

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & \cdots & t-1 & t+1 & t+2 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & t-1 & t & t+2 & \cdots & n\end{pmatrix},\quad s=t+1;$$

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & \cdots & t-1 & t+1 & t+2 & \cdots & s & s+1 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & t-1 & t & t+1 & \cdots & s-1 & s+1 & \cdots & n\end{pmatrix},\quad s>t+1.$$

令

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & \cdots & t-1 & \{t,t+1\} & t+2 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & t-1 & t+1 & t+2 & \cdots & n\end{pmatrix},\quad s=t+1$$

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & \cdots & t-1 & t & \cdots & s-2 & \{s-1,s\} & s+1 & \cdots & n\\ 1 & \cdots & t-1 & t+1 & \cdots & s-1 & s & s+1 & \cdots & n\end{pmatrix},\quad s>t+1,$$

则 $\alpha=\alpha\beta\alpha$ 且 $\beta\in H^{t}_{(s-1,s)}$. 再注意到 $1\leqslant t<s\leqslant n$, 则由式(4)可知, $H^{t}_{(s-1,s)}\subseteq M_k$, 从而 $\beta\in H^{t}_{(s-1,s)}\subseteq M_k$.

综上所述, 对任意的 $\alpha\in M_k$, 存在 $\beta\in M_k$, 使得 $\alpha=\alpha\beta\alpha$.

利用式(2),(4), 类似于(i)的证明, 可证(ii).

引理8(**Miller-Clifford 定理**)[8] 设 S 是正则半群, $a,b\in S$, 则 $\mathscr{H}$-类 H_b 包含 a 的逆元的充要条件是 $\mathscr{H}$-类 $R_a\cap L_b$ 和 $R_b\cap L_a$ 包含幂等元。

引理9 设 $\alpha\in J_{n-1}$, 则存在 $\alpha_1,\alpha_2\in V(\alpha)\cap J_{n-1}$, 使得 $(\alpha_1,\alpha_2)\notin\mathscr{R}$.

证明: 由引理1可知, $|E(R_\alpha)|\geqslant 1$ 且 $|E(L_\alpha)|\geqslant 2$. 设 $e_1,e_2\in E(L_\alpha)$, $e_1\neq e_2$, $f\in E(R_\alpha)$, 则 $(e_1,e_2)\notin\mathscr{R}$(否则, $e_1,e_2\in H_\alpha$, 与每个 $\mathscr{H}$-类至多包含一个幂等元矛盾). 注意到 $e_i\ \mathscr{L}\ \alpha\ \mathscr{R}\ f$, $i=1,2$.

进而由引理8可得，$R_{e_1}\cap L_f$ 和 $R_{e_2}\cap L_f$ 都包含 α 的逆元. 不妨分别设为 α_1,α_2，则 $e_i\mathscr{R}\alpha_i(i=1,2)$，从而$(\alpha_1,\alpha_2)\notin\mathscr{R}$. 由 $\alpha_i\mathscr{R}e_i\mathscr{L}\alpha$ 可知，$\alpha_i\mathscr{J}\alpha$，从而$|\mathrm{Im}(\alpha_i)|=|\mathrm{Im}(\alpha)|=n-1$. 因此 $\alpha_i\in J_{n-1}$.

引理10[2]　设 $2\leqslant r\leqslant n-2$，则 $K(n,r)$是正则的，且 $K(n,r)=\langle E(J_r)\rangle$.

引理11[6]　设 $n\geqslant 3$，则 PO_n 的极大幂等元生成子半群有且仅有如下3类：

1）$A(k)=K(n,n-2)\cup(J_{n-1}\backslash R_k)$，$1\leqslant k\leqslant n$；

2）$B(k)=K(n,n-2)\cup(\bigcup_{r=k+1}^{n}L_r)\cup(\bigcup_{j=1}^{k}R_j)\cup(\bigcup_{j=1}^{k-1}R_{(j,j+1)})$，$1\leqslant k\leqslant n-1$；

3）$C(k)=K(n,n-2)\cup(\bigcup_{r=1}^{k}L_r)\cup(\bigcup_{i=k+1}^{n}R_i)\cup(\bigcup_{j=k+1}^{n-1}R_{(j,j+1)})$，$1\leqslant k\leqslant n-1$.

引理12　设 $C_k=K(n,n-2)\cup S_k$，其中 $S_k=\{\alpha\in J_{n-1}:k\in\mathrm{Dom}(\alpha)\}$，$k\in[n]$，则 C_k 是极大子半带.

证明：设 $A(k)$如引理11中的定义. 由 S_k 的定义易知，$S_k=J_{n-1}\backslash R_k$，从而

$$C_k=K(n,n-2)\cup(J_{n-1}\backslash R_k)=A(k).$$

进而，由引理11知，C_k 是 PO_n 的极大幂等元生成子半群. 因此，要证明 C_k 是极大子半带，只需证明 C_k 是正则的. 由引理10知，$K(n,n-2)$是正则的. 对任意的 $\beta\in S_k=J_{n-1}\backslash R_k$，由引理9可知，存在 β 的逆元 β_1,β_2，使得$(\beta_1,\beta_2)\notin\mathscr{R}$，且 $\beta_1,\beta_2\in J_{n-1}$，于是 β_1,β_2 中必有一个属于 $J_{n-1}\backslash R_k$，即 $J_{n-1}\backslash R_k$ 中必存在 β 的逆元，从而 β 是正则的. 因此 C_k 是正则半群.

引理13　设 $B_k=K(n-2)\cup M_k\cup N_k$，$1\leqslant k\leqslant n-1$，其中 M_k 和 N_k 如定理1中的定义，则 B_k 是 PO_n 的极大子半带.

证明：首先，证明 B_k 是 PO_n 幂等元生成的子半群. 设 $B(k)$和 $C(k)$如引理11中定义. 由引理11知，$B(k)$和 $C(k)$都是 PO_n 的子半群. 容易验证 $B_k=B(k)\cap C(k)$. 因此 $B(k)$是 PO_n 的子半群. 由 $M_k\subseteq B_k$及 $N_k\subseteq B_k$ 可得，$\langle E(M_k)\rangle\subseteq B_k$ 且$\langle E(N_k)\rangle\subseteq B_k$，从而

$$K(n,n-2)\cup\langle E(M_k)\rangle\cup\langle E(N_k)\rangle\subseteq B_k.$$

再由引理6可得，$M_k\subseteq\langle E(M_k)\rangle$且 $N_k\subseteq\langle E(N_k)\rangle$，从而

$$B_k=K(n,n-2)\cup M_k\cup N_k\subseteq K(n,n-2)\cup\langle E(M_k)\rangle\cup\langle E(N_k)\rangle.$$

因此 $B_k=K(n,n-2)\cup\langle E(M_k)\rangle\cup\langle E(N_k)\rangle$. 进而，由式(3)可得

$$\begin{aligned}B_k&=\langle E(J_{n-2})\rangle\cup\langle E(M_k)\rangle\cup\langle E(N_k)\rangle=\langle E(J_{n-2})\cup E(M_k)\cup E(N_k)\rangle=\\&\langle E(J_{n-2})\cup E(J_{n-1})\backslash\{[k\to k+1],[k+1\to k]\}.\end{aligned}$$

其次，证明 B_k 是正则的. 由引理10知，$K(n,n-2)$是正则的. 任取 $\alpha\in M_k(N_k)$，由引理7可知，存在 $\beta\in M_k(N_k)$，使得 $\alpha=\alpha\beta\alpha$，即 α 是正则的. 因此 B_k 是正则的.

最后，证明 B_k 是极大子半带. 设 T 是 PO_n 的子半带且 $B_k\subset T$，则 $E(B_k)\subset E(T)$，于是 $E(T)\backslash E(B_k)\subseteq E(J_{n-1})$(因为 $E(K(n,n-2))\subseteq K(n,n-2)\subseteq B_k\subset T$)，从而

$$E(T)\backslash E(B_k)=E(T\cap J_{n-1})\backslash E(B_k\cap J_{n-1}).\tag{5}$$

由引理2及式(3)可知，

$$E(B_k\cap J_{n-1})=E(M_k)\cup E(N_k)=E(J_{n-1})\backslash\{[k\to k+1],[k+1\to k]\},\tag{6}$$

$$F_{n-1}\subset E(J_{n-1})\backslash\{[k\to k+1],[k+1\to k]\}\subseteq B_k\subset T.\tag{7}$$

进而，由式(5),(6)可得

$$E(T)\backslash E(B_k)\subseteq\{[k\to k+1],[k+1\to k]\}.$$

不妨设$[k\to k+1]\in E(T)\backslash E(B_k)$. 令 $\beta=\delta_{k+1}\cdot[k\to k+1]$，则

$$\beta=\begin{pmatrix}1&\cdots&k-1&k&k+2&\cdots&n\\1&\cdots&k-1&k+1&k+2&\cdots&n\end{pmatrix}\in H^{k}_{(k+1)}\cap T.$$

注意到$[k\to k+1]$，$\delta_{k+1}\in E(T)$(因为由式(7)可知，$\delta_{k+1}\in F_{n-1}\subset T$)，$\beta\in T$，$\delta_{k+1}\mathscr{R}\beta\mathscr{L}[k+1\to k]$. 由引理8可得，存在 $\beta^*\in V(\beta)$，使得 $\beta^*\in T\cap L_{\delta_{k+1}}\cap R_{[k+1\to k]}=T\cap H^{k+1}_{(k,k+1)}$，从而由式(1)可得，$[k+1\to k]=\beta^*\in T$. 又由式(7)可得，$E(J_{n-1})\subseteq T$. 再由引理2可得，$T=\langle E(J_{n-1})\rangle=PO_n$.

下面证明定理1. 由引理12和引理13知, A_k 和 B_k 都是 PO_n 的极大子半带.

用反证法证明 PO_n 的极大子半带仅有定理1中的形式. 假设 S 是 PO_n 的极大子半带, 但不是定理1中的形式. 则由 S_k 的定义及式(6)可知,

$$E(J_{n-1})\setminus\{\delta_k\}\subseteq S_k\subseteq A_k,\qquad 1\leqslant k\leqslant n,\tag{8}$$

$$E(J_{n-1})\setminus\{[k\to k+1],[k+1\to k]\}\subseteq B_k,\qquad 1\leqslant k\leqslant n-1.\tag{9}$$

注意到 $K(n,n-2)\subseteq A_k$, $K(n,n-2)\subseteq B_k$. 可断言: 对任意的 $\alpha\in J_{n-1}$, 有

$$S\cap E(R_\alpha)\neq\varnothing.\tag{10}$$

否则, 存在 $\alpha\in J_{n-1}$, 使得 $E(R_\alpha)\subseteq J_{n-1}\setminus S$, 从而由引理1及式(8),(9)可知, 存在某个 A_s 或 B_t 是 PO_n 的包含 S 的子半带. 又由 S 的极大性可得, $S=A_s$ 或 $S=B_t$, 与 S 不是定理1中的形式矛盾.

下面证明 $E(J_{n-1})\subseteq E(S)$. 由式(10)可知, 对任意的 $1\leqslant i\leqslant n-1$, $1\leqslant j\leqslant n$, 有

$$S\cap E(R_{(i,i+1)})\neq\varnothing,\qquad S\cap E(R_j)\neq\varnothing,$$

从而由引理1可得

$$S\cap\{[i\to i+1],[i+1\to i]\}\neq\varnothing,\tag{11}$$

$$S\cap\{\delta_j\}\neq\varnothing.\tag{12}$$

由式(12)可知, $\delta_j\in S$, $1\leqslant j\leqslant n$, 从而 $F_{n-1}\subseteq S$. 再由式(11)可知, $[i\to i+1]$或$[i+1\to i]\in S$. 不妨设 $[i\to i+1]\in S$. 令 $\beta=\delta_{i+1}\cdot[i\to i+1]$, 则

$$\beta=\begin{pmatrix}1&\cdots&i-1&i&i+2&\cdots&n\\1&\cdots&i-1&i+1&i+2&\cdots&n\end{pmatrix}\in H^{i}_{(i+1)}\cap T.$$

注意到$[i\to i+1]$, $\delta_{i+1}\in E(S)$(已证 $F_{n-1}\subset S$), $\beta\in S$, $\delta_{i+1}\mathscr{R}\,\beta\,\mathscr{L}\,[i\to i+1]$. 再由引理8可得, 存在 $\beta^*\in V(\beta)$, 使得 $\beta^*\in T\cap L_{\delta_{i+1}}\cap R_{[i+1\to i]}=S\cap H^{i+1}_{(i,i+1)}$, 于是, $[i+1\to i]=\beta^*\in S$. 因此, $E(R_{(i,i+1)})\subseteq S$, $1\leqslant i\leqslant n-1$. 进而, 由引理1和引理2可知, $E_{n-1}\subseteq S$. 再注意到 $F_{n-1}\subset S$ 及引理2可得, $E(J_{n-1})\subseteq S$, 从而由引理5可知, $S=\langle E(J_{n-1})\rangle=PO_n$, 与假设 S 是 PO_n 的极大子半带矛盾. 定理1证毕.

3 定理1的应用

为叙述方便, 采用记号 k_1,k_2,k_3,k_4 统一表示 PO_4 中的元素, 其中 $k_1,k_2,k_3,k_4\in\{0,1,2,3,4\}$. 例如, $\alpha=2234$ 表示 $1\alpha=2$, $2\alpha=2$, $3\alpha=3$, $4\alpha=4$; $\beta=0102$ 表示 $1\notin\mathrm{Dom}\,\beta$, $2\beta=1$, $3\notin\mathrm{Dom}\,\beta$, $4\beta=2$. 相应地, 空变换即可表示为0000. 这样, 一方面, PO_4 的4个 $\mathscr{J}$-类 J_0,J_1,J_2,J_3 可简单地表示为

$$J_0=\{0000\},$$

$J_1=\{$1111, 2222, 3333, 4444, 1110, 2220, 3330, 4440, 1101, 2202, 3303, 4404, 1011, 2022, 3033, 4044, 0111, 0222, 0333, 0444, 1100, 2200, 3300, 4400, 1010, 2020, 3030, 4040, 1001, 2002, 3003, 4004, 0110, 0220, 0330, 0440, 0101, 0202, 0303, 0404, 0011, 0022, 0033, 0044, 1000, 2000, 3000, 4000, 0100, 0200, 0300, 0400, 0010, 0020, 0030, 0040, 0001, 0002, 0003, 0004$\}$,

$J_2=\{$1112, 1113, 1114, 2223, 2224, 3334, 1122, 1133, 1144, 2233, 2244, 3344, 1222, 1333, 1444, 2333, 2444, 3444, 1120, 1130, 1140, 2230, 2240, 3340, 1220, 1330, 1440, 2330, 2440, 3440, 1102, 1103, 1104, 2203, 2204, 3304, 1202, 1303, 1404, 2303, 2404, 3404, 1012, 1013, 1014, 2023, 2024, 3034, 1022, 1033, 1044, 2033, 2044, 3044, 0112, 0113, 0114, 0223, 0224, 0334, 0122, 0133, 0144, 0233, 0244, 0344, 1200, 1300, 1400, 2300, 2400, 3400, 1020, 1030, 1040, 2030, 2040, 3040, 1002, 1003, 1004, 2003, 2004, 3004, 0120, 0130, 0140, 0230, 0240, 0340, 0102, 0103, 0104, 0203, 0204, 0304, 0012, 0013, 0014, 0023, 0024, 0034$\}$,

$J_3=\{$2234, 1134, 1124, 1123, 2334, 1334, 1224, 1223, 2344, 1344, 1244, 1233, 0234, 0134, 0124, 0123, 2034, 1034, 1024, 1023, 2304, 1304, 1204, 1203, 2340, 1340, 1240, 1230$\}$.

另一方面, 注意到 $K(4,2)=J_0\cup J_1\cup J_2$, 于是定理1中半群 PO_n 的两类极大子半带可分别刻画如下.

1) 第一种类型的极大正则子半带 A_1,A_2,A_3,A_4:

$$S_1 = J_3 \setminus \{0234, 0134, 0124, 0123\}, \qquad A_1 = K(4,2) \cup S_1;$$
$$S_2 = J_3 \setminus \{2034, 1034, 1024, 1023\}, \qquad A_2 = K(4,2) \cup S_2;$$
$$S_3 = J_3 \setminus \{2304, 1304, 1204, 1203\}, \qquad A_3 = K(4,2) \cup S_3;$$
$$S_4 = J_3 \setminus \{2340, 1340, 1240, 1230\}, \qquad A_4 = K(4,2) \cup S_4.$$

2）第二种类型的极大正则子半带 B_1, B_2, B_3：

$$M_1 = \{0234\},$$
$$N_1 = \{1344, 1244, 1233, 1334, 1224, 1223, 1034, 1024, 1023, 1304, 1204, 1203, 1340, 1240, 1230\},$$
$$B_1 = K(4,2) \cup M_1 \cup N_1;$$
$$M_2 = \{2234, 1134, 0234, 0134, 2034, 1034\}, \qquad N_2 = \{1244, 1233, 1204, 1203, 1240, 1230\},$$
$$B_2 = K(4,2) \cup M_2 \cup N_2;$$
$$M_3 = \{2234, 1134, 1124, 2334, 1334, 1224, 0234, 0134, 0124, 2034, 1034, 1024, 2304, 1304, 1204\},$$
$$N_3 = \{1230\}, \qquad B_3 = K(4,2) \cup M_3 \cup N_3.$$

参 考 文 献

[1] Gomes G M S, Howie J M. On the Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations [J]. Semigroup Forum, 1992, 45(1): 272-282.

[2] Garba G U. On the Idempotent Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations [J]. Portugaliae Mathematica, 1994, 51: 185-204.

[3] YANG Xiu-liang. On the Nilpotent Ranks of the Principal Factors of Certain Semigroups of Partial Transformations [J]. Communication in Algebra, 1998, 26(5): 1445-1455.

[4] YANG Xiu-liang. Products of Idempotents of Defect 1 in Certain Semigroups of Transformations [J]. Communication in Algebra, 1999, 27(7): 3557-3568.

[5] Laradji A, Umar A. Combinatorial Results for Semigroups of Order-Preserving Partial Transformations [J]. Journal of Algebra, 2004, 278(1): 342-359.

[6] XU Bo, ZHAO Ping, LI Jun-yang. Maximal Properties of Some Subsemigroups in Finite Singular Partial Order-Preserving Transformation Semigroups [J]. Journal of Math, 2010, 30(4): 617-621.

[7] Howie J M. An Introduction to Semigroup Theory [M]. London: Academic Press, 1976.

[8] Clifford H, Preston G B. The Algebraic Theory of Semigroups [M]. Providence: Amer Math Soc, 1961.

[9] Ganyushkin O, Mazorchuk V. Classical Finite Transformation Semigroups: An Introduction [M]. London: Springer-Verlag, 2009.

[10] Higgins P M. Techniques of Semigroup Theory [M]. New York: Oxford University Press, 1992.

（责任编辑：赵立芹）