云南大学学报(自然科学版), 2007, 29(2): 118~122　CN 53-1045/N　ISSN 0258-7971
Journal of Yunnan University

一类 R^n 上奇异非线性双调和方程正整解的存在性及性质*

许兴业
(广东教育学院 数学系, 广东 广州 510303)

摘要: 以 Schauder-Tychonoff 不动点定理为工具, 建立了一类 R^n 上奇异非线性双调和方程 $\Delta^2 u = f(|x|, u, |\nabla u|)u^{-\beta}(n \geqslant 3, \beta > 0)$ 正的径向对称整体解的存在性定理, 并给出了解的有关性质.

关键词: 双调和方程; 正整解; Lebesgue 控制收敛定理; 等度连续; 不动点定理
中图分类号: O 175.25　文献标识码: A　文章编号: 0258-7971(2007)02-0118-05

关于奇异非线性椭圆型方程正整解存在问题的研究已获得丰富的成果. 文献[1, 2] 分别研究在 R^n $(n \geqslant 3)$ 中形如 $\Delta^2 u = f(|x|, u)(x \in R^n)$、$\Delta^2 u = f(|x|, |\nabla u|)u^{-\beta}(x \in R^n, \beta > 0)$ 非线性双调和方程正整解的存在性, 文献[3, 4] 研究的是平面上形如 $\Delta^2 u = f(|x|, |\nabla u|)u^{-\beta}$ 及 $\Delta^2 u = f(|x|, u, |\nabla u|)$ 非线性双调和方程的正整解的存在性, 文献[5, 6] 研究了一类非线性波方程解的存在性、唯一性及光滑性, 取得了丰硕的成果. 本文则研究一类比文献[1, 2] 更为一般的 R^n 上奇异非线性双调和方程

$$\Delta^2 u = f(|x|, u, |\nabla u|)u^{-\beta}(x \in R^n, n \geqslant 3, \beta > 0) \tag{1}$$

正整解的存在性, 并给出了解的性质. 所得的成果丰富和发展了文献[1~6] 的理论和应用. (1) 中的 Δ 表示 Laplace 算子, $|x|$ 表示 Euclidean 长度, ∇ 表示 Hamilton 算子, (1) 中的整体解定义为 $u(x) \in C^4(R^n)$ 且在 R^n 中逐点满足(1).

1 引　理

为了证明本文的结论, 我们引进文献[1, 2] 曾经用过的积分算子 $\Phi: C[0, \infty) \to C^2[0, \infty)$ 如下

$$(\Phi h)(t) = \frac{1}{n-2}\int_0^t \left[1 - \left(\frac{s}{t}\right)^{n-2}\right] sh(s)\mathrm{d}s,\ t \geqslant 0,\ n \geqslant 3. \tag{2}$$

引理 1　设 $h \in C[0, \infty)$, 则 $\Delta(\Phi h)(|x|) = h(|x|)$.

引理 2　设 $h \in C[0, \infty)$, 则函数 $u(x) = (\Phi^2 h)(|x|)$ 是方程

$$(\Delta^2 u)(x) = h(|x|)(x \in R^n, n \geqslant 3) \tag{3}$$

的径向对称整体解; 若再假设 $h \geqslant 0$, 则有

$$0 \leqslant (\Phi^2 h)(t) \leqslant \frac{t^2}{2(n-2)^2}\int_0^t sh(s)\mathrm{d}s,\ t \geqslant 0, \tag{4}$$

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi^2 h)(t) \leqslant \frac{t}{(n-2)}\int_0^t sh(s)\mathrm{d}s,\ t \geqslant 0. \tag{5}$$

引理 1 和引理 2 的证明参见文献[2].

2 主要结果

在下面的讨论中我们引入记号 $\Omega: [0, \infty) \times (0, \infty) \times [0, \infty)$, $k(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ s, & s > 1 \end{cases}$, 并假设函数

* 收稿日期: 2006-02-20
基金项目: 全国教育科学"十五"规划课题资助项目(FBC030794); 广东教育学院教授博士基金资助项目; 广东高校自然科学基金重点研究项目(05Z026).

作者简介: 许兴业(1952-), 男, 广东人, 教授, 主要从事偏微分方程整解理论方面的研究.

f 满足以下条件:

(A) $f:\Omega\to[0,\infty)$ 是连续的;

(B) 存在连续函数 $F:\Omega\to[0,\infty)$ 满足

$$|f(t,u,v)|\leqslant F(t,u,v),\ (t,u,v)\in\Omega.$$

定理 1　假设函数 F 满足条件(Ⅰ), (Ⅱ)$_1$ 及(Ⅲ) 或者(Ⅰ), (Ⅱ)$_2$ 及(Ⅲ):

(Ⅰ) 对固定的 $t\geqslant0$, $F(t,u,v)$ 关于 $u\in(0,\infty)$ 是非增, 关于 $v\in[0,\infty)$ 是非减;

(Ⅱ)$_1$　对固定的 $(t,u,v)\in\Omega$, $\lambda^{-(1+\beta)}F\left(t,\frac{1}{6}\lambda u,\lambda v\right)$ 关于 $\lambda\in(0,\infty)$ 非增, 且有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-(1+\beta)}F\left(t,\frac{1}{6}\lambda u,\lambda v\right)=0;$$

(Ⅱ)$_2$　对固定的 $(t,u,v)\in\Omega$, $\lambda^{-(1+\beta)}F\left(t,\frac{1}{6}\lambda u,\lambda v\right)$ 关于 $\lambda\in(0,\infty)$ 非减, 且有

$$\lim_{\lambda\to0^+}\lambda^{-(1+\beta)}F\left(t,\frac{1}{6}\lambda u,\lambda v\right)=0;$$

(Ⅲ) 存在常数 $c>0$ 使

$$\int_0^\infty k(t)f\left(t,\frac{1}{6}c(1+t^2),ct\right)\mathrm{d}t<\infty.$$

则方程(1) 都存在无穷多个正的径向对称整体解 $u(x)$, 且具有性质

$$c_1(1+|x|^2)\leqslant c_2(1+|x|^2),\ x\in R^n,\ n\geqslant3,$$

其中 c_1, c_2 是某 2 个正常数, $k(t)$ 如上定义.

证明　先证 $F(t,u,v)$ 满足条件(Ⅰ), (Ⅱ)$_1$, (Ⅲ) 的情形. 由(Ⅱ)$_1$ 有

$$\lambda^{-(1+\beta)}k(t)F\left(t,\frac{1}{6}\lambda(1+t^2),\lambda t\right)\leqslant c^{-(1+\beta)}k(t)F\left(t,\frac{1}{6}c(1+t^2),ct\right),$$

对一切 $t\geqslant0$, $c\leqslant\lambda<\infty$ 成立(其中 c 和 $k(t)$ 是(Ⅲ) 中出现的常数和函数), 且对一切 $t\geqslant0$ 有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-(1+\beta)}k(t)F\left(t,\frac{1}{6}\lambda(1+t^2),\lambda(t)\right)=0.$$

由(Ⅲ) 利用 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-(1+\beta)}\int_0^\infty k(t)F\left(t,\frac{1}{6}\lambda(1+t^2),\lambda(t)\right)\mathrm{d}t=0. \tag{7}$$

故存在充分大的正数 $\eta(3\eta\geqslant c)$ 使得

$$\int_0^\infty k(t)F\left(t,\frac{\eta}{2}(1+t^2),3\eta t\right)\mathrm{d}t\leqslant\left(\frac{\eta}{2}\right)^{1+\beta}. \tag{8}$$

按通常的方法引进 $C^1[0,\infty)$ 的拓扑, 作集合

$$Y=\left\{y\in C^1[0,\infty)\ \middle|\ \frac{\eta}{2}(1+t^2)\leqslant y(t)\leqslant2\eta(1+t^2),\ \eta t\leqslant y'(t)\leqslant3\eta t,\ t\geqslant0\right\}. \tag{9}$$

易见 Y 是 $C^1[0,\infty)$ 中的闭凸子集, 定义映照 $\Psi: Y\to C^1[0,\infty)$ 如下

$$(\Psi y)=\eta(1+t^2)+\Phi^2f(t,y(t),y'(t))y^{-\beta}(t),\ t\geqslant0. \tag{10}$$

下面证明映照 Ψ 满足

(i) $\Psi: Y\to Y$.

事实上, $\forall y\in Y$, 由(B) 及(Ⅰ) 有

$$|f(t,y(t),|y'(t)|)|\leqslant F\left(t,\frac{\eta}{2}(1+t^2),3\eta t\right).$$

进而由(4) 及(8) 得

$$|\Phi^2f(t,y(t),|y'(t)|)y^{-\beta}(t)|\leqslant\Phi^2F\left(t,\frac{\eta}{2}(1+t^2),3\eta t\right)y^{-\beta}(t)\leqslant$$

$$\left(\frac{\eta}{2}\right)^{-\beta}\frac{t^2}{2(n-2)^2}\int_0^t k(s)F\left(s,\frac{\eta}{2}(1+s^2),3\eta s\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\left(\frac{\eta}{2}\right)^{-\beta}\frac{t^2}{2(n-2)^2}\left(\frac{n}{2}\right)^{1+\beta}\leqslant\frac{\eta}{2}t^2,\quad t\geqslant 0. \tag{11}$$

从而

$$|(\Psi y)(t)-\eta(1+t^2)|=|\Phi^2[f(t,y(t),|y'(t)|)y^{-\beta}(t)]|<\frac{\eta}{2}t^2,\quad t\geqslant 0.$$

$$\frac{\eta}{2}(1+t^2)\leqslant\eta(1+t^2)-\frac{\eta}{2}t^2\leqslant(\Psi y)(t)\leqslant\eta(1+t^2)+\frac{\eta}{2}t^2<2\eta(1+t^2),\ t\geqslant 0. \tag{12}$$

又

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Psi y)(t)=2\eta t+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^2[f(t,y(t),|y'(t)|)y^{-\beta}(t)]. \tag{13}$$

注意到 $\forall t\geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^2[f(t,y(t),|y'(t)|)y^{-\beta}(t)]\right| &= \int_0^t\left(\frac{s}{t}\right)^{n-1}\Phi f(s,y(s),|y'(s)|)y^{-\beta}(s)\mathrm{d}s|\leqslant\\ &\int_0^t\Phi|f(s,y(s),|y'(s)|)y^{-\beta}(s)\mathrm{d}s\leqslant\\ &\left(\frac{\eta}{2}\right)^{-\beta}\int_0^t\Phi F(s,y(s),|y'(s)|)\mathrm{d}s\leqslant &(14)_1\\ &\left(\frac{\eta}{2}\right)^{-\beta}\frac{t}{n-2}\int_0^\infty\Phi F\left(s,\frac{\eta}{2}(1+s^2),3\eta s\right)\mathrm{d}s\leqslant\eta t, &(14)_2\end{aligned}$$

所以

$$\eta t\leqslant 2\eta t\leqslant(\Psi y)'(t)\leqslant 2\eta t+\eta t=3\eta t,\quad t\geqslant 0. \tag{15}$$

故映照 Ψ 是 Y 到 Y 的映照.

(ii) Ψ 是连续映照.

设 $y_i,y\in Y$, $i=1,2,3,\cdots$, 且 y_i 依 $C^1[0,\infty)$ 的拓扑收敛于 y. $\forall t\in[0,t_1]\subset[0,\infty)$, 由(10) 得

$$|(\Psi y_i)(t)-(\Psi y)(t)|\leqslant\Phi^2|f(t,y_i(t),|y'_i(t)|)y_i^{-\beta}(t)-f(t,y(t),|y'(t)|)y^{-\beta}(t)|\leqslant$$
$$\frac{t_1^2}{2(n-2)^2}\int_0^{t_1}s|f(s,y_i(s),|y'_i(s)|)y_i^{-\beta}(s)-f(s,y(s),|y'(s)|)y^{-\beta}(s)|\mathrm{d}s,0\leqslant t\leqslant t_1, \tag{16}$$

注意到

$$|f(t,y_i(t),|y'_i(t)|)y_i^{-\beta}(t)-f(t,y(t),|y'(t)|)y^{-\beta}(t)|\leqslant 2F\left(t,\frac{\eta}{2}(1+t^2),3\eta t\right)\left(\frac{\eta}{2}\right)^{-\beta}. \tag{17}$$

又由(A) 及 y_i 收敛于 y, 故有

$$\lim_{t\to\infty}|f(t,y_i(t),|y'_i(t)|)y_i^{-\beta}(t)-f(t,y(t),|y'(t)|)y^{-\beta}(t)|=0,\quad 0\leqslant t\leqslant t_1. \tag{18}$$

于是从(16~18) 及(8), 依 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_1}|(\Psi y_i)(t)-(\Psi y)(t)|\to 0(i\to\infty). \tag{19}$$

再由(13) 及$(14)_1$, 得

$$|(\Psi y_i)'(t)-(\Psi y)'(t)|=$$
$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^2[f(t,y_i(t),|y'_i(t)|)y_i^{-\beta}(t)-f(t,y(t),|y'(t)|)y^{-\beta}(t)]\right|\leqslant$$
$$\frac{t_1}{n-2}\int_0^{t_1}r|f(r,y_i(r),|y'_i(r)|)y_i^{-\beta}(r)-f(r,y(r),|y'(r)|)y^{-\beta}(r)|\mathrm{d}r,0\leqslant t\leqslant t_1, \tag{20}$$

于是从(20)、(17)、(18) 及(8), 依 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_1}|(\Psi y_i)'(t)-(\Psi y)'(t)|\to 0(i\to\infty). \tag{21}$$

从(19) 及(21) 知 Ψ 是连续的.

(iii) ΨY 是相对紧的. 由(13)、(8), $\forall y\in Y$ 得

$$
\begin{aligned}
(\Psi y)''(t) = {} & 2\eta + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} \Phi[f(s, y(s), |y'(s)|)y^{-\beta}(s)]\mathrm{d}s = \\
& 2\eta + \Phi[f(s, y(s), |y'(s)|)y^{-\beta}(t) - \\
& (n-1)\int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n} \frac{1}{s}\Phi[f(s, y(s), |y'(s)|)y^{-\beta}(s)]\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

对上式右边的第 2、3 项进行估值如下:

$$
\begin{aligned}
|\Phi[f(s, y(s), |y'(s)|)y^{-\beta}(s)]| \leqslant {} & \Phi|[f(s, y(s), |y'(s)|)y^{-\beta}(s)] \leqslant \\
& \Phi F(s, y(s), |y'(s)|)y^{-\beta}(s) \leqslant \\
& \frac{1}{n-2}\int_0^\infty sF\left(s, \frac{\eta}{2}(1+s^2), 3\eta s\right)y^{-\beta}(s)\mathrm{d}s \leqslant \\
& \frac{1}{n-2}\left(\frac{n}{2}\right)^{-\beta} \cdot \left(\frac{\eta}{2}\right)^{1+\beta} \leqslant \eta
\end{aligned}
$$

$$
\left| -(n-1)\int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n} \frac{1}{s}\Phi[f(s, y(s), |y'(s)|)y^{-\beta}(s)]\mathrm{d}s \right| \leqslant
$$

$$
\left(1+\frac{1}{n-2}\right)\int_0^t \mathrm{d}s\int_0^t F\left(r, \frac{\eta}{2}(1+r^2), 3\eta r\right)\left(\frac{\eta}{2}\right)^{-\beta}\mathrm{d}r \leqslant 2t\left(\frac{\eta}{2}\right)^{-\beta} \cdot \left(\frac{\eta}{2}\right)^{1+\beta} \leqslant \eta t, \qquad t \geqslant 0.
$$

从而 $\forall[0, t_1] \subset [0, \infty)$ 有

$$
|(\Psi y)''(t)| [\ 2G + G + Gt_1 \text{ s } \text{常数}, 0 [\ t [\ t_1,\ y\ I\ Y. \tag{22}
$$

故由(12)、(15) 及(22) 知$\{(7y)(t) | y\ I\ Y\}$ 和$\{(7y)c(t) | y\ I\ Y\}$ 在$[0, t_1]$ 上一致有界且等度连续.

由 Ascoli- Arzela 定理(见文献[7] 定理1. 30) 知按 $C^1[0, t_1]$ 的拓扑 $7Y$ 在 Y 是相对紧的, 进而可以用取对角线的方法, 证明按 $C^1[0,]\,)$ 的拓扑 $7Y$ 在 Y 上是相对紧的.

由(i)、(ii)、(iii) 知 Schauder- Tychonoff 不动点定理的条件均满足, 故映照 7 存在不动点 $y\ I\ Y$[8].

由(10) 知 y 满足

$$
y(t) = G(1+t^2) + 5^2[f(t, y(t), |yc(t)|)y^{-B}(t)], t \setminus 0.
$$

注意到 $\$^2$ 是 4 阶求导算子, 由引理 2 得

$$
\begin{aligned}
(\$^2 y)(t) = {} & \$^2[G(1+t^2) + 5^2 f(t, y(t), |yc(t)|)y^{-B}(t)] = \\
& \$^2[G(1+t^2)] + \$^2[5^2 f(t, y(t), |yc(t)|)y^{-B}(t)] = \\
& f(t, y(t), |yc(t)|)y^{-B}(t), \quad t \setminus 0.
\end{aligned}
$$

故方程(1) 有正的径向对称整体解 $u(x) = y(|x|)$ 具有性质

$$
\frac{G}{2}(1+|x|^2) [\ u(x) [\ 2G(1+|x|^2), x\ I\ R^n, n \setminus 3.
$$

另若选择常数 G_1 使得$\left(\frac{G_1}{2}\right) > 2G$, 由(6) 和(7), 显然 G_1 满足

$$
\int_0^{]}\!\!\!\!Q\ k(t)F\left(t, \frac{G_1}{2}(1+t^2), 3G_1 t\right)\mathrm{d}t [\ \left(\frac{G_1}{2}\right)^{1+B}.
$$

类似于上面的证明, 可证得方程(1) 存在正整解 $u_1(x) = y_1(|x|)$, 具有性质

$$
\frac{G_1}{2}(1+|x|^2) [\ u(x) [\ 2G_1(1+|x|^2), x\ I\ R^n, n \setminus 3.
$$

易见 $u(x)\ X\ u_1(x)$. 依此方法进行下去, 可得方程(1) 的无穷多个正整解, 且这些解具有定理所述的性质.

对于以(　)$_2$ 代替(　)$_1$ 的情形, 只须把上面证明过程中的/可选取充分大的正数 $G(3G \setminus c)$ 使得 $\int_0^{]}\!\!\!\!Q\ k(t)F\left(t, \frac{G}{2}(1+t^2), 3Gt\right)\mathrm{d}t [\ \left(\frac{G}{2}\right)^{1+B}{}_0$ 改为/可选取充分的小正数 $G(3G [\ c)$ 使得 $\int_0^{]}\!\!\!\!Q\ k(t)F\left(t, \frac{n}{2}(1+t^2), 3Gt\right)\mathrm{d}t [\ \left(\frac{G}{2}\right)^{1+B}{}_0$, 其余的证明完全与上面相同.

证毕.

定理 2 假设函数 F 满足下面的条件:

(i) 对固定的 $t \geq 0$, $F(t, u, v)$ 关于 $u \in (0, \infty)$ 是非增, 关于 $v \in [0, \infty)$ 是非增;

(ii) 存在常数 $c > 0$ 使

$$\int_0^{\infty} k(t) F\left(t, \frac{1}{6}c(1 + t^2), \frac{1}{3}ct\right) \mathrm{d}t < \infty .$$

则方程(1)具有定理 1 所述的结论.

定理 2 的证明完全与定理 1 的证明类似, 略.

3 例 子

例 1 考察非线性双调和方程

$$\Delta^2 u = \mathrm{e}^{-|x|} u^{-\alpha} |\nabla u|^{\gamma} \cos(|x||\nabla u|) u^{-\beta}, x \in R^n, n \geq 3, \beta > 0. \tag{23}$$

其中 α, γ 均为正常数. 取 $f(t, u, v) = \mathrm{e}^{-t} u^{-\alpha} v^{\gamma} \cos(tv)$, $F(t, u, v) = \mathrm{e}^{-t} u^{-\alpha} v^{\gamma}$. 显然, 若 $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\gamma - \alpha - \beta < 1$ 或者 $\gamma - \alpha - \beta > 1$, 则容易验证条件(B)和定理 1 的条件均满足, 因此方程(23)具有定理 1 的结论.

例 2 考察非线性双调和方程

$$\Delta^2 u = \mathrm{e}^{-|x|} u^{-\alpha} (1 + |\nabla u|)^{-\gamma} \sin(|x|, |\nabla u|) u^{-\beta}, x \in R^n, n \geq 3, \beta > 0. \tag{24}$$

其中 α, γ 均为正常数. 取 $f(t, u, v) = \mathrm{e}^{-t} u^{-\alpha} (1 + v)^{-\gamma} \sin(tv)$, $F(t, u, v) = \mathrm{e}^{-t} u^{-\alpha} (1 + v)^{-\gamma}$. 显然, 若 $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, 容易验证条件(B)和定理 2 的条件均满足, 因此方程(24)具有定理 2 的结论.

参考文献:

[1] KUSANO T, SWANSO C A. Positive entire solutions of semilinear biharmonic equations[J]. Hiroshima Math J, 1987, 17(1): 13-28.

[2] 许兴业. 关于 R^n 中奇异的非线性椭圆型方程正整解的存在性[J]. 南京大学学报数学半年刊, 1998(1): 99-105.

[3] 许兴业. 一类奇异非线性双调和方程的正整解[J]. 数学物理学报, 1998, 18(S1): 167-173.

[4] 叶常青. 一类 R^n 奇异非线性双调和方程正整解[J]. 数学物理学报, 2001, 21A(1): 138-144.

[5] 杨林. 一类非线性波方程解的存在性[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2001, 23(2): 95-99.

[6] 杨林, 王晓兰. 一类非线性波方程解的唯一性、光滑性[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2001, 23(4): 166-169.

[7] ADMAS R A. Sobolev spaces[M]. Boston: Acamdemic Press, 1975.

[8] EDWARDS R E. Functional analysis[M]. New York: Rinchart and Winston, 1965.

The existence and properties of positive entire solutions for a class of singular nonlinear biharmonic equations on R^n

XU Xing-ye

(Department of Mathematics, Guangdong Education Institute, Guangzhou 510303, China)

Abstract: The theorems of existence of positive radially symmetric entire solutions for a class singular nonlinear biharmonic $\Delta^2 u = f(|x|, u, |\nabla u|) u^{-\beta} (n \geq 3, \beta < 0)$ on R^n with the Schauder-tychonoff fixed point theorem as the principal are established, and the ralated properties of the solutions were obtained.

Key words: biharmonic equation; positive entire solution; Lebesgue dominated covergence theorem; equicontinuity; fixed point theorem