第 21 卷 第 2 期　　　　宁 波 大 学 学 报（理 工 版）　　　　Vol.21　No.2
2008 年 6 月　　　　JOURNAL OF NINGBO UNIVERSITY (NSEE)　　　　June　2008

文章编号:1001-5132（2008）02-0225-04

对角因子循环矩阵 Moore-Penrose 逆及奇异值分解

张奕琴，岑建苗

（宁波大学 理学院，浙江 宁波 315211）

摘要：给出了对角因子循环矩阵的 Mooore-Penrose 逆的表达式，并利用得到的表达式可以给出 Moore-Penrose 逆的快速算法. 进一步研究了实对角因子循环矩阵的奇异值分解，并利用 Hartley 变换矩阵，给出了奇异值分解的具体表达式.

关键词：对角因子循环矩阵；Mooore-Penrose 逆；奇异值分解；Hartley 变换矩阵

中图分类号：O151.21　　　　文献标识码：A

循环矩阵是一类很重要的特殊矩阵，不少学者对循环矩阵进行了不同的研究和推广. Stuart J L 和 Weaver J R 在文献[1]提出了对角因子循环矩阵，文献[2]讨论这类矩阵的谱分解及其在偏微分方程求解中的应用. 本文首先根据文献[3]的结果给出了对角因子循环矩阵 Moore-Penrose 逆表达式，并可得出矩阵秩极小或者满秩时的 Moore-Penrose 逆的快速解法. 循环矩阵特性使得它与 Fourier 分析及群理论紧密相关，这些关系对本文是十分有用的. 最后，本文在文献[4]的基础上研究实对角因子循环矩阵的奇异值分解，利用 Hartley 变换矩阵，给出奇异值分解的具体表达式.

1　定义及准备

本文约定，M_n 表示复数域上所有 n 阶方阵组成的集合，$M_{m,n}$ 表示复数域上所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合. 对于 $M\in M_n$，M^* 表示 M 的共轭转置，M^T 表示 M 的转置，$\overline{M}$ 表示 M 的共轭，I_n 表示 n 阶单位矩阵.

若 C 为 n 阶基本循环矩阵，即 $C=(e_n, e_1, \cdots, e_{n-1})$，其中 e_i 为单位向量，$i=1,2,\cdots,n$. D 为 n 阶非奇异对角矩阵，即 $D=\mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n), d_i\neq 0$, $i=1,2,\cdots,n$. 记 $R=DC$，则称 R 为基本对角因子循环矩阵.

定义 1　对 M_n 中的矩阵 M，如 $MR=RM$，则称 M 为对角因子循环矩阵，简称 $DC-$循环矩阵.

特别地，如果 D 中 $d_1=d_2=\cdots=d_{n-1}=1, d_n=k$，那么 $DC-$循环矩阵就是 $k-$因子循环矩阵. 当 D 为单位矩阵时，$DC-$循环矩阵就是循环矩阵. 用 DC_n 表示 M_n 中所有 $DC-$循环矩阵组成的集合.

引理 1[2]　$M\in DC_n$ 当且仅当

$$M=a_0I+a_1k_1^{-1}R+\cdots+a_{n-1}k_{n-1}^{-1}R^{n-1}, \tag{1}$$

其中，$k_i=d_1d_2\cdots d_i, i=1,2,\cdots,n-1, k_0=1$.

记 $f_M(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ik_i^{-1}x^i$，称它为 M 的表示多项式. 易知 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 正好是 M 的第 1 行，记 $M=DC_n(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$.

设 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 是 n 次本原单位根，F 表示 n 阶离散

收稿日期：2007-05-23.　　宁波大学学报（理工版）网址：http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目：浙江省自然科学基金（Y604089）.
第一作者：张奕琴（1980－），女，河南许昌人，在读硕士研究生，主要研究方向：矩阵论. E-mail: graceyiqin@gmail.com

Fourier 变换矩阵，即：

$$F=(F_{ij}), F_{ij}=\omega^{(i-1)(j-1)}/\sqrt{n}, 1\le i,\ j\le n.$$

显然，F 是对称的酉矩阵，$F^*F=I$．设：

$$T=\mathrm{diag}(1,k_1^{-1}r,\cdots,\ k_{n-1}^{-1}r^{n-1}), r=\sqrt[n]{d_1d_2\cdots d_n}.$$

令 $F_D=TF$，则：

$$F_D=\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{diag}(1,k_1^{-1},\cdots,k_{n-1}^{-1})V(r,r\omega,\cdots,r\omega^{n-1}),$$

其中，$V(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 表示关于 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 的 Vandermonde 矩阵.

引理 2[4] 对任意首行为 $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 的循环矩阵 A．有：

$$A=F\Lambda F^*, \tag{2}$$

$$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}),$$

且 $\lambda_j=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\omega^{ij}, (j=0,1,\cdots,n-1)$.

定义 2 对于 $A\in M_{m,n}$，如果存在 $B\in M_{n,m}$ 满足下列条件：(1) $ABA=A$；(2) $BAB=B$；(3) $(AB)^*=AB$；(4) $(BA)^*=BA$.

那么其中的第 $(i,\cdots,j)$ 条，B 称为 A 的 $(i,\cdots,j)$-逆．用 $(i,\cdots,j)$ 表示 A 的所有 $(i,\cdots,j)$-逆组成的集合，$A^{(i,\cdots,j)}$ 表示 A 的 1 个 $(i,\cdots,j)$-逆．A 的 $\{1,2,3,4\}$-逆称为 A 的 Moore-Penrose 逆，用 A^+ 表示.

引理 3[2] n 阶方阵 $M\in DC_n$ 充要条件为：

$$F_D^{-1}MF_D=\Lambda. \tag{3}$$

F_D 同上定义．其中 $\Lambda=\mathrm{diag}(f_M(r), f_M(r\omega),\cdots, f_M(r\omega^{n-1}))$.

2 Moore-Penrose 逆表达式

定理 1[5] 若 $A=BC, A\in M_{m,n}, B\in M_{m,r}, C\in M_{r,n}$，且 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(C)=r$．则 A 的 Moore-Penrose 逆可表示为：

$$A^+=C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*. \tag{4}$$

通常称(4)式为 Moore-Penrose 逆 A^+ 的 MacDuffee 公式.

定理 2 若 M 是任意的 n 阶对角因子循环矩阵，$\mathrm{rank}(M)=r\le n$．不失一般性，假若矩阵可分块为：

$$F_D^{-1}MF_D=\begin{pmatrix}\Omega & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

其中，Ω 为 $r\times r$ 非奇异对角矩阵．则 M 的 Moore-Penrose 逆可表示为：

$$M^+=\overline{T}^{-1}F\begin{pmatrix}V^{-1}\Omega^{-1}U^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}F^*\overline{T}, \tag{5}$$

$$T=\mathrm{diag}(1,k_1^{-1}r,\cdots,k_{n-1}^{-1}r^{n-1}), U,V\in M_r.$$

证明 设 M 为对角因子循环矩阵，$rank(M)=r\le n$．以下考虑 $M=F_D\Lambda F_D^{-1}$．不失一般性，本文假设 Λ 可表示为分块矩阵：

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\Omega & 0_{r\times(n-r)}\\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(n-r)}\end{pmatrix},$$

其中，Ω 为非奇异 $r\times r$ 阶对角矩阵．设 $\Omega=\Omega^{1/2}\cdot\Omega^{1/2}$，则：

$$\Omega^{1/2}=\begin{pmatrix}\rho_1e^{i\theta_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \rho_re^{i\theta_r}\end{pmatrix},$$

其中，$0\le\theta_i\le\pi, i=1,2,\cdots,r$．则：

$$M=TF\begin{pmatrix}\Omega^{1/2}\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Omega^{1/2} & 0\end{pmatrix}(TF)^{-1}.$$

运用定理 1，令：

$$B=TF\begin{pmatrix}\Omega^{1/2}\\ 0\end{pmatrix}\in C^{n\times r}, C=\begin{pmatrix}\Omega^{1/2} & 0\end{pmatrix}(TF)^{-1}\in C^{r\times n}.$$

显然有 $\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(C)=r$．由(4)式可得：

$$M^+=\overline{T}^{-1}F\begin{pmatrix}\overline{\Omega}^{1/2}\\ 0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\Omega^{1/2} & 0\end{pmatrix}F^*T^{-1}\overline{T}^{-1}F\cdot\begin{pmatrix}\overline{\Omega}^{1/2}\\ 0\end{pmatrix}\right]^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix}\overline{\Omega}^{1/2} & 0\end{pmatrix}F^*\overline{T}TF\begin{pmatrix}\Omega^{1/2}\\ 0\end{pmatrix}\right]^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\overline{\Omega}^{1/2} & 0\end{pmatrix}F^*\overline{T}.$$

由引理 2 知，$F^*\overline{T}TF$ 是 1 个正定的循环矩阵，记该矩阵为 K．则：

$$M^+=\overline{T}^{-1}F\begin{pmatrix}\overline{\Omega}^{1/2}\\ 0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\Omega^{1/2} & 0\end{pmatrix}K^{-1}\begin{pmatrix}\overline{\Omega}^{1/2}\\ 0\end{pmatrix}\right]^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix}\overline{\Omega}^{1/2} & 0\end{pmatrix}K\begin{pmatrix}\Omega^{1/2}\\ 0\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}\overline{\Omega}^{1/2} & 0\end{pmatrix}F^*\overline{T}.$$

接着将 K 分块，得到分块矩阵为：

$$K=\begin{pmatrix} U & a \\ b & d \end{pmatrix}，与 K^{-1}=\begin{pmatrix} V & \alpha \\ \beta & \delta \end{pmatrix},$$

其中$U,V\in M_r$. 因为K为正定，可以推出U,V也是正定的. 特别地，它们都是可逆的. 则：

$$M^{+}=\overline{T}^{-1}F\begin{pmatrix}\overline{\Omega}^{1/2}\\ 0\end{pmatrix}(\overline{\Omega}^{-1/2}V^{-1}\Omega^{-1/2}\Omega^{-1/2}U^{-1}\overline{\Omega}^{-1/2})\cdot$$

$$\begin{pmatrix}\overline{\Omega}^{-1/2} & 0\end{pmatrix}F^{*}\overline{T}=\overline{T}^{-1}F\begin{pmatrix}I\\ 0\end{pmatrix}(V^{-1}\Omega^{-1}U^{-1})\cdot$$

$$\begin{pmatrix}I & 0\end{pmatrix}F^{*}\overline{T}=\overline{T}^{-1}F\begin{pmatrix}V^{-1}\Omega^{-1}U^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}F^{*}\overline{T}.$$

证毕.

由此可以看出，当$r\approx n$或者$n-r\approx n$时，V和U能很快计算出来[3].

当$n-r\approx n$时，V和U将非常小的. 它们的逆很方便就可以得出.

当$r\approx n$，分别计算以上矩阵块中K,K^{-1}，得出$UV+a\beta=I$或者$U^{-1}=V(I-a\beta)^{-1}$. 因为V和U是可逆的，则$(I-a\beta)$可逆.

若$r=n-1$时，可以运用 Sherman-Morrison-Woodbury 公式求矩阵$(I-a\beta)$的逆[3]. 如果$r=n-2$，运用 SMW 公式 2 次可得. 一般来说，若$r=n-k$，k次运用 SMW 公式即可求得$(I-a\beta)$的逆，这个方法的复杂性取决于U的秩.

同样考虑$V^{-1}=(I-a\beta)^{-1}U$，得出平行的结论. 这时仅当U和V有一个是具体已知的情况下，才可以求出$(I-a\beta)$的逆.

3 实对角因子循环矩阵的奇异值分解

设正交(反对角单位)矩阵$\hat{I}_m\in R^{m\times m}$. 即：

$$\hat{I}_m=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

正交循环移位(左循环)矩阵，即：

$$\Pi=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \hat{I}_{n-1}\end{pmatrix}.$$

从而有$\Pi=F^TF=F^2$.

定理 3 设$M\in DC_n$，且M为实矩阵. $\Lambda=\Pi\overline{\Lambda}\Pi$，其中$\Lambda=(f_M(r),f_M(r\omega),\cdots,f_M(r\omega^{n-1}))$.

证明 记$\lambda_j=f_M(r\omega^j),\ j=0,1,\cdots,n-1$. 对于$j=1,2,\cdots,n-1$，为：

$$\lambda_{n-j}=f_M(r\omega^{n-j})=\sum_{i=0}^{n-1}a_ik_i^{-1}(r\omega^{n-j})^i=$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_ik_i^{-1}(r\omega^{-j})^i=\sum_{i=0}^{n-1}a_ik_i^{-1}(\overline{r\omega^j})$$

$$=f_M(\overline{r\omega^j})=\overline{\lambda_j},$$

且，

$$\lambda_0=\sum_{i=0}^{n-1}a_ik_i^{-1}r^i.$$

证毕.

下面利用离散 Hartley 变换矩阵.

$H(A)=Re(A)+Im(A),\ A\in M_n.$

Hartley 变换矩阵有 2 个基本性质[6]：

(1) 对于$A,B\in M_{m,n}$，有：

$$H^T(A)=H(A^T).\tag{6}$$

(2) 对于$A,B\in M_{m,n}$，有：

$$H(AB)=H(A)Re(B)+H(\overline{A})Im((B)=$$
$$Re(A)H(B)+Im(A)H(\overline{B}).\tag{7}$$

对于前面的F，则有：

$$H(F)=H^T(F),\tag{8}$$

$$H^T(F)H(F)=H^2(F)=H^2(\overline{F})=I_n.\tag{9}$$

F是对称的酉矩阵，且$F^TF=F^2=\Pi$.

$$H(F)H(\overline{F})=H(\overline{F})H(F)=\Pi.\tag{10}$$

定理 4 如果$T=diag(1,k_1^{-1}r,\cdots,k_{n-1}^{-1}r^{n-1})$是正交矩阵. 那么，实对角因子循环矩阵$M$的奇异值分解(不一定有序)为：

$$M=TH(F)|\Lambda|(Re(P)-Im(P)\Pi)H(F)T^{-1},\tag{11}$$

其中$P\in M_n$是对角的酉矩阵. 其定义为$\Lambda=|\Lambda|P$.

证明 由于

$$M=F_D\Lambda F_D^{-1}=TF\Lambda F^*T^{-1},$$

$$FT^{-1}M=\overline{\Lambda}FT^{-1}=|\Lambda|\overline{P}FT^{-1},$$

因此，

$$H(F)T^{-1}M = |\Lambda| H(\overline{P}F)T^{-1}.$$

由(9)式可得：

$$M = TH(F)|\Lambda| H(\overline{P}F)T^{-1}.$$

由(7)式可得：

$$H(\overline{P}F) = Re(\overline{P})H(F) + Im(\overline{P})H(\overline{F}) = Re(P)H(F) - Im(P)H(\overline{F}) = (Re(P) - Im(P)\Pi)H(F).$$

由定理 3 可知：

$$P = \Pi\overline{P}\Pi，\Pi Im(P) + Im(P)\Pi = \Pi Re(P) - Re(P)\Pi = 0. \tag{12}$$

由(12)式可知：

$$(Re(P) - Im(P)\Pi)^T (Re(P) - Im(P)\Pi) = (Re(P) - \Pi Im(P))(Re(P) - Im(P)\Pi) = Re(P)Re(P) - Re(P)Im(P)\Pi - \Pi Im(P)Re(P) + \Pi Im(P)Im(P)\Pi = Re(P)Re(P) + Im(P)Im(P)\Pi\Pi = Re(P)Re(P) + Im(P)Im(P) = P^* P = I.$$

所以，$Re(P) - Im(P)\Pi$ 是正交的.

由于 $H(F)$ 和 T 都是正交矩阵，所以 $TH(F)$ 和 $(Re(P) - Im(P)\Pi)H(F)T^{-1}$ 都是正交矩阵. 从而可得 M 的奇异值分解为：

$$M = TH(F)|\Lambda|(Re(P) - Im(P)\Pi)H(F)T^{-1}.$$

但 $|\Lambda|$ 中元素的次序不一定是奇异值标准次序. 证毕.

参考文献：

[1] Stuart J L, Weaver J R. Diagonally scaled permutetions and circulant matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1994, 212/213:397-411.

[2] 岑建苗. 对角因子循环矩阵的谱分解及其应用[J]. 纯粹数学与应用数学, 1998, 14(1):47-54.

[3] Boman E C. The Moore-Penrose pseudoinverse of an arbitray, square, k-circulant matrix[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2002, 50(2):175-179.

[4] Karner H, Schneid J. Spectral decomposition of real circulant matrices[J]. Linnear Algebra Appl, 2003, 367: 300-311.

[5] 王国荣. 矩阵与算子广义逆[M]. 北京: 科学出版社, 1994.

[6] Racewell R N. The Hartley Transform[M]. New York: Wiley Press, 1986.

The Moore-Penrose Pseudoinverse and Spectral Decomposition of Diagonal Factor Circulant Matrices

ZHANG Yi-qin, CEN Jian-miao

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The fundamentals of the diagonal factor circulant matrices are briefed, and a simple derivation of the Moore-Penrose inverse of such matrix is presented. In the case that the rank of diagonally factor circulant matrix is either small or nearly full, the pseudoinverse can be computed readily. Further more, by using the Hartley matrix, the singular value decompositions of the real diagonal factor ciaculant are formulized in this paper.

Key words: diagonal factor circulant matrices; Moore-Penrose inverse; singular value decomposition; Hartley transformation matrix

CLC number: O151.21 **Document code:** A

（责任编辑 章践立）