文章编号:1001-5132（2008）02-0221-04

固定需求下基于概率型随机平衡的交通网络设计模型及算法

罗文昌

（宁波大学 理学院，浙江 宁波 315211）

摘要：在考虑网络中用户的路径选择行为满足概率型随机平衡的条件下，给出了交通网络设计的双层规划模型，同时设计了基于差分的启发式求解算法.

关键词：固定需求；随机平衡；网络设计；双层规划

中图分类号：U491 文献标识码：A

交通网络设计问题是指在考虑交通网络中用户的路径选择行为的条件下，通过改进现有网络中的某些路段或在现有网络中新建路段，从而使整个网络达到某种性能指标最优. 著名的 Braess 诡异现象表明[1]，在进行交通网络设计时，若不考虑网络中用户的具体路径选择行为，单方面的新建路段或扩建路段，就有可能不仅不能达到改善整个网络交通状况的目的，反而使整个网络交通状况趋于恶化，表现为网络总的出行费用不仅未减少，反而增加. 由此可见，如何描述网络中用户的路径选择行为，使这种路径选择行为符合实际情况，对交通网络设计方案的合理性具有重要作用. 一般，采用平衡模型来描述用户的路径选择行为，主要分为 2 类：确定性平衡和随机平衡. 确定性平衡要求用户完全掌握整个路网交通信息，并对各条路径的实际出行费用有完全正确的估计，显然这一要求不太符合实际的交通状况；而随机平衡则认为用户不太可能掌握所有的交通信息，其对路径的选择行为或多或少具有一定的随机性，可见随机平衡提供了更为符合实际的路径选择行为模式. 基于此，本文在考虑用户的路径选择行为符合随机平衡条件下来研究交通网络设计问题，从而提出更为符合实际的交通网络建设方案.

1 固定需求下的随机平衡模型

为便于描述，定义如下符号：

考虑路网 $G=(N,A)$，令 N 表示网络中的节点集合；A 表示网络中的路段集合，a,b 表示 A 中元素；W 表示路网中的 OD 对集合，w 表示 W 中的一个元素；R_w 表示 OD 对 W 之间的路径集合，r,k 表示 R_w 中的元素；$t_a(.)$ 表示路段 a 的出行费用函数，且严格单调递增；x_a 表示路段上的交通流量，x 是 $\{x_a, a\in A\}$ 的向量表示；c_a 表示路段 a 的通行能力；δ_{ar}^{w} 是 0～1 变量，如果 OD 对 w 中路径 r 使用路段 a 则为 1，否则为 0；q_w 表示 OD 对 w 之间

收稿日期：2007-04-26. 宁波大学学报（理工版）网址：http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目：宁波大学科研基金（XY0600033）.
作者简介：罗文昌（1975－），男，江西吉安人，硕士/讲师，主要研究方向：优化算法设计与分析. E-mail: luowenchang@nbu.edu.cn

用户的需求量；f_w^r 表示 OD 对 w 之间路径 r 上用户的交通流量；p_w^r 表示 OD 对 w 之间用户选择路径 r 的概率；c_w^r 表示 OD 对 w 之间路径 r 上用户的实际出行费用，c_w 是 $\{c_w^r, r\in R_w\}$ 的向量表示，c_w^r 表示 OD 对 w 之间路径 r 上用户的理解出行费用，为服从某一分布的随机变量，且 $c_w^r=E[C_w^r]$；$S_w(c_w)$ 表示 OD 对 w 之间用户的理解出行费用的期望，即 $S_w(c_w)=E[\min_r\{C_w^r\}\,|\,c_w]$.

1.1 无约束随机平衡模型

对给定的交通网络 $G=(N,A)$，路径出行费用与路段出行费用满足的关系是：

$$c_w^r=\sum_a t_a(x_a)\delta_{ar}^w, \forall r, \forall w. \tag{1}$$

路径流量与路段流量满足的关系是：

$$x_a=\sum_w\sum_r f_w^r\delta_{ar}^w, \forall a. \tag{2}$$

对于给定的 OD 流量 $q_w, w\in W$，基本约束是：

$$\sum_{r\in R_w} f_w^r=q_w, \forall w\in R_w, \tag{3}$$

$$f_w^r\geq, 0, \forall r\in R_w, w\in W.$$

由路径选择的随机平衡可知，在 OD 对 w 的路径 R_w 中，用户若对路径 r 理解为具有最小的出行费用，则选择该路径的概率可表示为 $p_w^r=p(C_w^r=\min_{k\in R_w}C_w^k)$，由此可知随机平衡条件可表示为：

$$f_w^r=q_w p_w^r, \forall r\in R_w, w\in W. \tag{4}$$

构造如下的无约束极小值规划[1]：

$$\min_x z(x)=\sum_a x_a t_a(x_a)-\sum_a\int_0^{x_a}t_a(\omega)\mathrm{d}\omega-\sum_w q_w S_w(c_w). \tag{5}$$

可以证明[1]，模型的解等价于随机平衡条件，并且 z 是关于 x 的严格凸函数，从而路段流量唯一.

1.2 求解算法

假设随机变量 $C_w^r, \forall r, \forall w$ 均服从正态分布，β 为用户对路径出行费用的理解参数，即 $C_w^r\sim N(c_w^r, \beta), \forall r, \forall w$. 基于此的算法具体步骤如下：

Step 1 初始化. 令 $x_a=0, \forall a$，计算 $t_a(0)$，用式(1)计算 $c_w^r, \forall r, \forall w$，用Monte-Carlo仿真法[1]计算 $p_w^r, \forall r, \forall w$，对 $q_w, \forall w$ 进行随机分配，用式(4)计算得到初始路径流量 $f_w^r, \forall r, \forall w$，用式(2)计算得到初始路段流量 $\{x_a^{(n)}, \forall a\}$. 令 $n=1$.

Step 2 更新路段出行费用. 令 $t_a^{(n)}=t_a(x_a^{(n)}), \forall a$.

Step 3 确定下降方向. 在当前路段出行费用 $t_a^{(n)}$, $\forall a$ 的基础上，用式(1)计算当前 $c_w^r, \forall r, \forall w$，用Monte-Carlo 仿真法计算当前 $p_w^r, \forall r, \forall w$，对 $q_w, \forall w$ 进行随机分配，用式(4)计算得到当前路径流量 $f_w^r, \forall r, \forall w$，用式(2)计算得到一组辅助路段流量 $\{v_a^{(n)}, \forall a\}$.

Step 4 计算迭代步长. 求解如下一维极小问题：

$$\min_\alpha z(\alpha)=\sum_a(x_a^{(n)}+\alpha(v_a^{(n)}-x_a^{(n)}))t_a(x_a^{(n)}+\alpha(v_a^{(n)}-x_a^{(n)}))-\sum_a\int_0^{x_a^{(n)}+\alpha(v_a^{(n)}-x_a^{(n)})}t_a(\omega)\mathrm{d}\omega-\sum_w q_w S_w(c_w),$$

令其解为 $\alpha^{(n)}$，或使用预先设定的步长 $\alpha^{(n)}=1/n$.

Step 5 更新流量. 置 $x_a^{(n+1)}=x_a^{(n)}+\alpha^{(n)}(v_a^{(n)}-x_a^{(n)}), \forall a$.

Step 6 检查收敛性. 若相邻 2 次迭代中路段流量的变化很小时结束循环. 否则令 $n=n+1$，转 Step 2.

注：$S_w(c_w)$ 的计算也可用Monte-Carlo仿真法给出[1].

2 网络设计模型

2.1 网络设计的双层规划模型

补充定义如下符号：y_a 表示路段 a 的通行能力增加量，y 是 $\{y_a, a\in A\}$ 向量表示；$g_a(y_a)$ 是路段 a 改造的投资函数；B 为投资预算总额.

由于交通网络设计问题涉及到 2 种具有明显不同目标函数的决策者，即政府部门(网络规划者)及网络上的使用者(用户). 因此，本文采用双层规划模型来描述交通网络设计问题；一方面从用户的角度考虑，对给定的交通网络，用户有选择出行路径的决策权，其路径选择行为符合随机平衡原则；另一方面从网络规划者的角度考虑，有通过实施改

进路段通行能力等措施，来维护及改造网络的决策权. 具体可描述如下：

上层模型：

$$\min_{y} z(y)=\sum_{a} x_a(y)t_a(x_a(y),y_a),$$

$$\text{s.t}\quad \sum_{a} g_a(y_a)\le B, y_a\ge 0,\forall a,$$

其中 $x_a(y),\forall a$ 由下层模型求得.

下层模型：

$$\min_{x(y)} z(x(y))=\sum_{a} x_a(y)t_a(x_a,y_a)-\sum_{a}\int_0^{x_a(y)} t_a(\omega,y_a)\mathrm{d}\omega-\sum_{w} q_w S_w(c_w).$$

模型中，处于上层模型的网络规划者对某些路段进行投资，增加这些路段的通行能力，在满足投资预算约束的条件下，目标是使整个网络的总出行费用最小. 下层模型则是一个固定需求下的随机平衡分配模型.

2.2　求解算法

对于上层模型，由隐函数定理[2]可知下层模型的解 $x_a(y)$ 一般是一个非线性函数，并且函数形式未知. 一种办法是可利用随机平衡的灵敏度分析法[3]将 $x_a(y)$ 近似为 y 的线性函数. 令 y^0 表示路段通行能力增加的初始值，$x_a(y^0)$ 为相应的随机平衡路段流量，则 $x_a(y)$ 的一阶Tarlor展开式为：

$$x_a(y)\approx x_a(y^0)+\sum_{a}[\frac{\partial x_a(y)}{\partial y_b}|_{y=y^0}](y_b-y_b{}^0).\quad (6)$$

由偏导数的定义可知偏导数就是函数在某个自变量处的变化率，可以看作是函数在某个自变量处的微分与该自变量的微分之商，而微商为差商之极限定义. 由此启发，我们可以利用求解随机平衡条件下的路段流量对路段能力增加量的差商作为随机平衡条件下的路段流量对路段能力增加量的偏导数的近似值. 这样我们既可避免有些偏导数不存在的情形，又可避免利用灵敏度分析法求偏导数过程中的一些繁琐的解析计算，更重要的是这种近似方法易于编程实现. 故求解问题的基本思路如下：

在开始求解之前，首先进行初始化准备工作，即把各偏导数的近似值求出来. 令某条路段 a 能力增加量为 Δy_a ，其余路段能力增加量均为 0 ，求解下层模型可得到网络上任意路段 b 上的路段流量随之发生的改变量 $\Delta x_a(y)$ ，进而可得到作为偏导数 $\partial x_a(y)/\partial y_b$ 的近似值的差商 $\Delta x_a(y)/\Delta y_b$. 依此对所有路段重复上述步骤，就可得到当任意一条路段 i 上的能力增加量为 Δy_i 时，整个网络中任意路段 j 上的路段流量随之发生的改变量 $\Delta x_j(y)$ ，从而得到作为偏导数 $\partial x_j(y)/\partial y_i$ 的近似值的差商 $\Delta x_j(y)/\Delta y_i$. 至此，初始化准备工作结束. 进一步将式(6)近似为：

$$x_a(y)\approx x_a(y^0)+\sum_{a}[\frac{\Delta x_a(y)}{\Delta y_b}|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^0}](y_b-y_b{}^0)\ .\quad (7)$$

将式(7)代入到上层模型目标函数中，则上层模型就变为一个以路段能力增加量为变量的普通的有约束非线性问题，可以用已有的方法求解[4]. 对于上层模型求出的最优解，即新的路段能力增加值. 再一次求解下层模型，就可得到新的随机平衡路段流量，重复上述基本思路，又可得到一组新的路段能力增加值. 如此重复计算，最后有望收敛于原来的双层规划模型的最优解，具体算法步骤如下：

Step 1　初始化，计算差商 $\Delta x_j(y)/\Delta y_i,\forall j,\forall i$.

Step 2　给定一个路段能力增加量的初始解 y^0，令 $n=0$.

Step 3　对于给定的 y^n ，求解下层模型，得到随机平衡路段流量 x^n .

Step 4　把式(7)代入到上层模型目标函数中，求解上层模型，得到一组新的路段能力增加值 y^{n+1} .

Step 5　检查收敛性，若 $\max\left|y_a^{n+1}-y_a^n\right|\le\varepsilon,(\forall a\in A)$ 则停止，其中 ε 为迭代精度；否则，令 $n=n+1$，转 step 3.

需要指出的是：由于双层规划问题本质上的非凸性，上述基于差分的启发式求解算法求得的收敛点可能只是局部最优解，可通过选取多个初始点进

行求解并比较相应的上层模型目标函数值来获得较好解.

3 结语

本文在考虑固定需求下概率型随机平衡的基础上，研究了相应的交通网络设计模型，设计了基于差分的启发式求解算法，但这种算法并不能保证取得全局最优解，更为有效的求解算法还有待进一步研究.

参考文献：

[1] 黄海军. 城市交通网络平衡分析理论与实践[M]. 北京: 人民交通出版社, 1994.
[2] 高自友, 宋一凡, 四兵峰. 城市交通连续平衡网络设计——理论与方法[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2000.
[3] Clark S D, Walting D P. Sensitivity analysis of the probit-based stochastic user equilibrium assignment model[J]. Transportation Research, 2002, 36B:617-635.
[4] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

Traffic Network Design Model and Algorithm Based on Stochastic Equilibrium for Constant Demand

LUO Wen-chang

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: On the condition that the stochastic equilibrium restraints are satisfied as the network clients select the path, the author presents bilevel planning model for traffic network design. In addition, the heuristic solving algorithm is designed on using the difference equations.

Key words: constant demand; stochastic equilibrium; traffic network design; bilevel programming

CLC number: U491 **Document code:** A

（责任编辑 史小丽）