第 21 卷 第 1 期 宁 波 大 学 学 报（理 工 版） Vol.21 No.1
2008 年 3 月 JOURNAL OF NINGBO UNIVERSITY (NSEE) Mar. 2008

文章编号:1001-5132（2008）01-0089-05

非线性奇异 Hamilton 系统边值问题解的存在性与唯一性

李 良，綦建刚

（宁波大学 理学院，浙江 宁波 315211）

摘要：考虑了定义在 $[0,+\infty)$ 上的非线性奇异 Hamilton 系统在极限圆型条件的假设下，其解的存在性和唯一性，并进而考虑其在整个区间 $(-\infty,\infty)$ 下的情况.

关键词：Hamilton 系统；不动点原理；Green 矩阵函数；极限圆型

中图分类号：O174.92 文献标识码：A

近年来对非线性奇异边值问题的研究一直广受学者的关注，涌现出不少成果，而不动点理论无疑是其中非常重要的工具. 文献[1]考虑二阶非线性奇异方程 $-[p(t)y']'+q(t)y=f(t,y(t)), t\in[0,\infty)$. 本文则在极限圆型的假设下，利用 Banach 不动点原理和 Schauder 不动点定理给出了该类方程高维系统形式在边值条件 $\alpha y(0)+\beta y^{[1]}(0)=d_1, \gamma W_\infty(y,u)+\delta W_\infty(y,v)=0$ 的情况下，平方可积解的存在性及唯一性证明，其中 $y^{[1]}(t)=p(t)y'(t)$ (称为 y 的拟导数). 文献[2]则利用锥压缩拉伸不动点的方法研究二阶微分方程：$u''+f(t,u)=0, 0<t<1$ 及满足边值条件：$\alpha u(0)-\beta u'(0)=0, \gamma u(1)+\delta u'(1)=0$ 情况下的正解存在性问题，其中 $f(t,u)$ 允许在两端点 $t=0, t=1$ 处奇异. 文献[3,4]也运用了不动点原理研究了存在区间为无限的奇异边值问题.

本文则考虑高维奇异 Hamilton 系统边值问题，即在极限圆型的假设下，利用 Banach 不动点定理和 Schauder 不动点定理，获得加权平方可积解的存在性与唯一性，从而推广文献[1]中相应的结果.

1 预备知识

考虑 Hamilton 微分系统为：

$$H[y](t):=Jy'(t)-Q(t)y(t)=W(t)F(t,y(t)), t\in[0,+\infty), \tag{1}$$

其中，$J=\begin{pmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}$，

其中，I_n 是 n 阶单位矩阵. $Q(t),W(t)$ 是在区间 $[0,\infty)$ 上局部可积的 $2n\times 2n$ 函数矩阵，且满足 $Q(t)=Q^*(t)$，$W(t)=W^*(t)\geq 0$，Q^* 为 Q 的共轭转置. 令

$$L_W^2(0,\infty)=\{y: y\in L_{\rm loc}[0,\infty), \int_0^\infty y^*(s)W(s)y(s){\rm d}s<\infty\},$$

其中，$L_{\rm loc}[0,\infty)$ 表示在 $[0,\infty)$ 局部可积的可测函数.

定义 y 在 $L_W^2(0,\infty)$ 的内积为：

$$(y(t),z(t))=\int_0^\infty y^*(s)W(s)z(s){\rm d}s.$$

相应模的定义为：

收稿日期：2007-01-09. 宁波大学学报（理工版）网址：http://3xb.nbu.edu.cn
基金项目：浙江省自然科学基金（Y605192）；宁波市青年基金（2004A620018）；宁波大学科研基金（XK200549）.
第一作者：李 良（1981－），男，浙江绍兴人，在读硕士研究生，主要研究方向：微分方程. E-mail: ll1649@tom.com

$$\|y\|=\left(\int_0^{\infty} y^*(s)W(s)y(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}.$$

则显然 $L_W^2(0,\infty)$ 为等价类意义下的 Hilbert 空间. 若方程

$$-(p(x)y')'+q(x)y=0, \lambda\in C/R, \tag{2}$$

其任意解都平方可积，则称该方程为极限圆型. 类似地对于系统 $Jy'(t)-Q(t)y(t)=0$，若任意系统解 $y(t)$ 都满足：

$$\int_0^{\infty} y^*(s)W(s)y(s)\mathrm{d}s<\infty,$$

即可称其为极限圆型.

令 $\theta(t),\phi(t)$ 为方程：

$$Jy'-Qy=0, \tag{3}$$

满足初始条件：

$$\theta(0)=\begin{pmatrix}\alpha_1^*\\ \alpha_2^*\end{pmatrix}, \phi(0)=\begin{pmatrix}-\alpha_2^*\\ \alpha_1^*\end{pmatrix},$$

的 $2n\times n$ 解矩阵，其中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ 为自伴的. 即满足：

$$\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2)=n, \alpha_1\alpha_1^*+\alpha_2\alpha_2^*=I,$$
$$\alpha_1\alpha_2^*-\alpha_2\alpha_1^*=0. \tag{4}$$

令 $\Phi(t)=(\theta(t),\phi(t))$. 则易验证 $\Phi(t)$ 为(3)式的基解矩阵. 由于本文为极限圆型下考虑，故 $\Phi(t)\in L_W^2(0,\infty)$. 即 $\Phi(t)$ 的每列都属于 $L_W^2(0,\infty)$.

以下讨论的是需引入 Lagrange 内积：令 $y(t)$，$z(t)$ 为(3)式的2列解向量函数，称 $[y(t),z(t)]=z^*(t)\cdot Jy(t)$ 为 y,z 的 Lagrange 内积. 对于(2)式，它是(3)式当 $n=2$ 时的特殊形式，相应的 Lagrange 内积为：$[u(t),v(t)]=p(t)u(t)v'(t)-p(t)u'(t)v(t)$，其中 u,v 为(2)式的 2 个解. 若 $\Phi(t)$ 为(3)式的解矩阵， $y(t)$ 为解向量函数，则 Lagrange 内积为 $[y(t),\Phi(t)]=\Phi^*(t)\cdot Jy(t)$.

我们作如下假设：对 $\forall f\in L_W^2(0,\infty), F(t,y(t))\in L_W^2(0,\infty), \forall y(t)\in L_W^2(0,\infty)$，且 $F(t,y)$ 是关于 y 在 $L_W^2(0,\infty)$ 模意义下的连续函数.

由 $[y,\Phi](t)$ 的定义，可先求导，再结合(1)式和(3)式从 o 到 t 求积分，可得：

$$[y,\Phi](t)=[y,\Phi](0)+\int_0^t \Phi^*(s)W(s)F\left(s,y(s)\right)\mathrm{d}s.$$

由于

$$\left|\int_0^{\infty}\Phi^*WF\mathrm{d}s\right|\leq\left(\left|\int_0^{\infty}\Phi^*W\Phi\mathrm{d}s\right|\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\left|\int_0^{\infty}F^*WF\mathrm{d}s\right|\right)^{\frac{1}{2}},$$

而(1)式的任意解为 $y(t)\in L_W^2(0,\infty)$，$\Phi(t)$ 为 $H[y]=0$ 的基解. 故 Φ 和 $F(t,y(t))$ 都属于 $L_W^2(0,\infty)$. 则

$$\int_0^{\infty}\Phi^*W\Phi\mathrm{d}s\leq\infty, \int_0^{\infty}F^*WF\mathrm{d}s\leq\infty,$$

因而 $[y,\Phi](\infty)$ 存在且有限.

本文考虑如下非线性奇异 Hamilton 系统边值问题：

$$Jy'(t)-Q(t)y(t)=W(t)F(t,y(t)), t\in[0,\infty), \tag{5}$$

$$\begin{cases}\alpha y(0)=d_1,\\ \beta[y,\Phi](\infty)=d_2,\end{cases} \tag{6}$$

其中，$\beta=(\beta_1,\beta_2)$，且 $\det\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\neq 0$，$\beta$ 也是自伴的，

2 Green 矩阵函数及积分算子

考虑非齐次系统齐次边值问题为：

$$Jy'(t)-Q(t)y(t)=W(t)f(t), \tag{7}$$

$$\begin{cases}\alpha y(0)=0,\\ \beta[y,\Phi](\infty)=0.\end{cases} \tag{8}$$

由于 $\phi(0)=\begin{pmatrix}-\alpha_2^*\\ \alpha_1^*\end{pmatrix}$，而 $\alpha_1\alpha_2^*-\alpha_2\alpha_1^*=0$. 所以 $\phi(t)$ 满足边值条件(8)式中的第 1 式. 令 $\psi(t)=\Phi(t)D$，取 $D=\begin{pmatrix}\beta_1^*\\ \beta_2^*\end{pmatrix}$，则有

$$\beta[y,\Phi](\infty)=(\beta_1,\beta_2)\Phi^*(\infty)J\Phi(\infty)\cdot\begin{pmatrix}\beta_1^*\\ \beta_2^*\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1^*\\ \beta_2^*\end{pmatrix}=0.$$

即可知 $\psi(t)$ 满足(3)式以及(8)式的第 2 式.

定义对应于边值问题(3)式和(8)式的 Green 矩阵函数为：

$$G(t,s)=\begin{cases}\phi(t)\psi^*(s), 0<s<t<\infty,\\ \psi(t)\phi^*(s), 0<t<s<\infty.\end{cases} \tag{9}$$

由于 $\Phi(t)\in L_W^2(0,\infty)$，故 $\phi(t),\psi(t)\in L_W^2(0,\infty)$. 进而由文献[5]中可知，对非齐次系统齐次边值问题(7)式和(8)式有唯一解 $y(t)\in L_W^2(0,\infty)$，且为：

$$y(t)=\int_0^{\infty}G(t,s)W(s)f(s)\mathrm{d}s.$$

对于非齐次系统非齐次边值问题：

$$\begin{aligned}&Jy'(t)-Q(t)y(t)=W(t)f(t),\\&\begin{cases}\alpha y(0)=d_1,\\\beta[y,\Phi](\infty)=d_2.\end{cases}\end{aligned}\tag{10}$$

取 $w(t)=\theta(t)h_1-\phi(t)h_2$，显然 $w(t)$ 为 $Jy'(t)-Q(t)y(t)=0$ 的解. 令 $w(t)$ 满足(10)式，则：

$$d_1=(\alpha_1,\alpha_2)(\theta(t)h_1-\phi(t)h_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^*h_1+\alpha_2^*h_2\\\alpha_2^*h_1-\alpha_1^*h_2\end{pmatrix}=h_1,(\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix}\theta^*\\\phi^*\end{pmatrix}(\theta(t)d_1-\phi(t)h_2)=d_2.$$

由于 $\det\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}\neq 0$，故 h_2 唯一存在. 所以对上面的非齐次系统非齐次边值问题的解为：

$$y(t)=w(t)+\int_0^{\infty}G(t,s)W(s)f(s)\mathrm{d}s.\tag{11}$$

3　存在唯一性证明

Banach 压缩不动点原理：令 B 是 Banach 空间，S 是 B 的非空闭子集，假设 $T:S\to S$ 是压缩的，即 $\exists\lambda,0<\lambda<1$, s.t $\|Tu-Tv\|\leq\lambda\|u-v\|$，对所有的 $u,v\in S$，则 T 有唯一不动点在 S 中.

定理 1　设 $F(s,y(s))$ 满足 Lipschitz 条件，即对 $\forall y_1(t),y_2(t)\in L_W^2(0,\infty)$ 有：

$$\|F(s,y_1(s))-F(s,y_2(s))\|\leq K\|y_1(s)-y_2(s)\|,$$

其中 $K>0$ 为常数，且又满足条件 $F(t,y(t))\in L_W^2(0,\infty),\forall y(t)\in L_W^2(0,\infty)$. 若 $K\|G\|<1$，则非线性边值问题(5)式和(6)式在 $L_W^2(0,\infty)$ 中有唯一解.

证明　由上述讨论可知非线性边值问题(5)式和(6)式的解可表示为：

$$y(t)=w(t)+\int_0^{\infty}G(t,s)W(s)F(s,y(s))\mathrm{d}s.$$

故只须讨论如下积分算子的不动点存在性：

$$Ty(t)=w(t)+\int_0^{\infty}G(t,s)W(s)F(s,y(s))\mathrm{d}s.\tag{12}$$

取 S 为 $L_W^2(0,\infty)$，因 $\forall y(t)\in L_W^2(0,\infty),F(\cdot,y(\cdot))\in L_W^2(0,\infty)$，则有：

$$\left|\int_0^{\infty}GWF\mathrm{d}s\right|\leq\left(\left|\int_0^{\infty}G^*WG\mathrm{d}s\right|\right)^{\frac12}\left(\left|\int_0^{\infty}F^*WF\mathrm{d}s\right|\right)^{\frac12}<\infty.$$

而 $w(t)\in L_W^2(0,\infty)$，故 $T:S\to S$. $\forall y_1(t),y_2(t)\in L_W^2(0,\infty)$，有

$$|Ty_1(t)-Ty_2(t)|=|\int_0^{\infty}GW(F(s,y_1(s))-F(s,y_2(s)))|\leq\left(\left|\int_0^{\infty}G^*WG\mathrm{d}s\right|\right)^{\frac12},$$

$$(|\int_0^{\infty}(F(s,y_1(s))-F(s,y_2(s)))^*W(F(s,y_1(s))-F(s,y_2(s)))\mathrm{d}s|)^{\frac12}.$$

故可知：

$$\|Ty_1(t)-Ty_2(t)\|\leq\left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}G^*WG\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{\frac12}\cdot\|F(s,y_1(s))-F(s,y_2(s))\|\leq K\|G\|\cdot\|y_1-y_2\|.$$

由于 $K\|G\|<1$，故存在唯一的 $y(t)$ 满足 $y(t)=Ty(t)$，即有唯一解. 证毕.

以上讨论为整体 Lipschitz 条件下的情况，对于局部 Lipschitz 条件下(5)式和(6)式解的存在唯一性有下面定理存在.

定理 2　假设条件 $F(t,y(t))\in L_W^2(0,\infty),\forall y(t)\in L_W^2(0,\infty)$ 满足，若 $\exists R>0$, s.t $\|F(t,y)-F(t,z)\|\leq K\|y-z\|,\forall y,z\in S_1$，而 $S_1=\{u\in L_W^2(0,\infty):\|u\|\leq R\},K>0$ 为常数. 若

$$\|w\|+\|G\|(\sup_{y\in S}\int_0^{\infty}F(s,y(s))^*\cdot W(s)F(s,y(s))\mathrm{d}s)^{\frac12}\leq R.$$

其中 $K\|G\|<1$，则边值问题(5)式和(6)式有唯一解 $y(t)\in L_W^2(0,\infty)$，满足 $\int_0^{\infty}|y(t)|^2\,\mathrm{d}t\leq R^2$.

证明　显然 S_1 是 $L_W^2(0,\infty)$ 的闭子集. 令 $T:L_W^2(0,\infty)\to L_W^2(0,\infty)$ 为(12)式所定义的算子. 类似定理1讨论可知对 $\forall y,z\in S_1$，有 $\|Ty-Tz\|\leq\lambda\|y-z\|,\lambda=\|G\|K<1$. 下证 $T:S_1\to S_1$，有：

$$\|Ty\|=\|w(t)+\int_0^{\infty}G(t,s)W(s)f(s,y(s))\mathrm{d}s\|\leq\|w\|+\|\int_0^{\infty}G(t,s)W(s)f(s,y(s))\mathrm{d}s\|\leq$$

$$\| w\| + \| G\| (\int_0^{\infty} F^*(s, y(s))W(s)\cdot$$
$$F(s, y(s))\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} \le R.$$

因此$T: S_1 \to S_1$. 由压缩原理可知存在唯一解在S_1中，故定理证毕.

4 存在性证明

Schauder 不动点定理：B为 Banach 空间，S为B中非空有界凸闭集，假设$T: B \to B$全连续，且$T(S) \subset S$，则T在S中至少有 1 个不动点.

对于边值问题(5)式和(6)式，令$T: L_W^2(0,\infty) \to L_W^2(0,\infty)$为(12)式所给出.

引理 **1** 设$F(t, y(t)) \in L_W^2(0,\infty), \forall y(t) \in L_W^2(0,\infty)$，且$F(t, y)$是关于$y$在$L_W^2(0,\infty)$模意义下的连续函数. 则$T$为全连续算子.

证明 $\forall \varepsilon > 0, y_0 \in L_W^2(0,\infty)$. 要证$\exists\delta$ s.t 当$\| y - y_0\| < \delta$时，$\| Ty - Ty_0\| < \varepsilon$.

$$|Ty - Ty_0| = \left|\int_0^{\infty} GW(F(s, y) - F(s, y_0))\mathrm{d}s\right| \le$$
$$(\int_0^{\infty} G^*WG\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}(\int_0^{\infty}(F(s, y) - F(s, y_0))^*\cdot$$
$$W(s)(F(s, y) - F(s, y_0))\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}.$$

故$\| Ty - Ty_0\| \le \| G\|\cdot\| F(s, y) - F(s, y_0)\|$.

又$F(s, y(s))$是y在加权平方模意义下连续，即$\exists\delta s.t$当$\| y - y_0\| < \delta$时，$\| F(s, y) - F(s, y_0)\| \le (\varepsilon / \| G\|)$，则算子$T$连续.

以下证明T为相对紧的. 对于$L_W^2(0,\infty)$来说，集合$S \subset L_W^2(0,\infty)$是相对紧的当且仅当$S$有界且对$\forall\varepsilon > 0$，满足(1)$\exists\delta > 0$使得当对$\forall y \in S, 0 \le h \le \delta$，有$\int_0^{\infty} | y(t+h) - y(t)|^2\,\mathrm{d}t < \varepsilon$；(2)$\exists N > 0, s.t$对所有$y \in S$有$\int_N^{\infty} | Ty(t)|^2\,\mathrm{d}t < \varepsilon$.

令Y是$L_W^2(0,\infty)$中的有界集，对$\forall y \in Y$，有：

$$\| Ty\| \le \| w\| + \| G\|\cdot$$
$$\left(\int_0^{\infty}(F(s, y))^*W(s)F(s, y))\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由于$F(s, y(s)) \in L_W^2(0,\infty)$，所以$Ty \in L_W^2(0,\infty)$. 对于$\forall y \in Y$，有：

$$\int_0^{\infty}|Ty(t+h) - Ty(t)|^2\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}|\int_0^{\infty}[G(t+h, s) -$$
$$G(t, s)]W(s)F(s, y(s))\mathrm{d}s|^2\,\mathrm{d}t \le$$
$$\int_0^{\infty}(F(s, y))^*W(s)F(s, y))\mathrm{d}s\cdot$$
$$\| G(t+h, s) - G(t, s)\|^2.$$

故对$\forall y \in Y, 0 \le h \le \delta$.

$$\int_0^{\infty}|Ty(t+h) - Ty(t)|^2\mathrm{d}t < \varepsilon^2.$$

同时有$\forall y \in Y$，

$$\int_N^{\infty}|Ty(t)|^2\mathrm{d}t \le 2\int_N^{\infty}|w|^2\mathrm{d}t +$$
$$2\int_0^{\infty}(F(s, y))^*W(s)F(s, y))\mathrm{d}s\cdot$$
$$\int_N^{\infty}\int_0^{\infty} G(t, s)^*W(s)G(t, s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

因而给定$\forall\varepsilon > 0\exists N$, s.t$\int_N^{\infty}| Ty(t)|^2\,\mathrm{d}t < \varepsilon^2, y \in Y$，引理得证.

因此$T(Y)$是在$L_W^2(0,\infty)$中相对紧的.

定理 **3** 假设上述引理条件满足，并且对$\exists R > 0 s.t$，下式成立：

$$\| w\| + \| G\|\left(\sup_{y\in S}\int_0^{\infty} F(s, y(s))^*W(s)F(s, y(s))\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \le R.$$

这里令$S = y \in L_W^2(0,\infty): \| y\| \le R$，则边值问题(5)式和(6)式至少有 1 解$y \in L_W^2(0,\infty)$满足：

$$\int_0^{\infty}| y(t)|^2\,\mathrm{d}t \le R^2.$$

证明 令$T: L_W^2(0,\infty) \to L_W^2(0,\infty)$为(12)式所定义. 由引理1可知$T$全连续，如定理 2 类似证明可知$T: S \to S$，且显然$S$是非空有界闭凸集. 则有 Schauder 不动点定理可知$Ty = y$至少有 1 解位于S中，定理证毕.

5 整区间边值问题

考虑系统$H(y(t)) \equiv Jy'(t) - Q(t)y(t) = W(t)F(t, y(t))$. 此处区间为$t \in (-\infty,\infty)$，假设下面条件成立：$L_1$, $H(y(t)) = 0$的解都属于$L_W^2(-\infty,\infty)$. L_2, $F(t, y(t)) \in L_W^2(-\infty,\infty), \forall y(t) \in L_W^2(-\infty,\infty)$，且$F(t, y)$是$y$在平方模意义下的连续函数.

$$[y, \Phi](-\infty) = [y, \Phi](0) +$$
$$\int_{-\infty}^{0}\Phi^*(s)W(s)F(s, y(s))\mathrm{d}s.$$

同理可知 $[y,\Phi]$ 在 $(-\infty)$ 处也存在且小于 ∞. 故可考虑如下边值问题：

$$Jy'(t)-Q(t)y(t)=W(t)F(t,y(t)),t\in(-\infty,\infty). \quad (13)$$

$$\begin{cases}\alpha[y,\Phi](-\infty)=d_1,\\ \beta[y,\Phi](\infty)=d_2.\end{cases} \quad (14)$$

同上讨论可得相应的 Green 函数：

$$G(t,s)=\begin{cases}\phi(t)\psi^*(s),-\infty<s<t<\infty,\\ \psi(t)\phi^*(s),-\infty<t<s<\infty.\end{cases}$$

可知 $\|G\|<\infty$.

对边值问题(13)式和(14)式可得相应算子：

$$Ty(t)=w(t)+\int_{-\infty}^{\infty}G(t,s)W(s)F(s,y(s))\mathrm{d}s. \quad (15)$$

则类似得可得以下定理成立.

定理 4　设 $F(s,y(s))$ 满足 Lipschitz 条件，即对 $\forall y_1(t),y_2(t)\in L_W^2(-\infty,\infty)$ 有 $\|F(s,y_1(s))-F(s,y_2(s))\|\le K\|y_1(s)-y_2(s)\|$，其中 $K>0$ 为常数，且满足 $F(t,y(t))\in L_W^2(-\infty,\infty),\forall y(t)\in L_W^2(-\infty,\infty)$. 若 $K\|G\|<1$ 则非线性边值问题(13)式和(14)式在 $L_W^2(-\infty,\infty)$ 中有唯一解.

定理 5　假设条件 $F(t,y(t))\in L_W^2(-\infty,\infty),\forall y(t)\in L_W^2(-\infty,\infty)$ 满足若 $\exists R>0, s.t$ $\|F(t,y)-F(t,z)\|\le K\|y-z\|,\forall y,z\in S$. 其中 $S=\{y\in L_W^2(-\infty,\infty):\|y\|\le R\}$，$K>0$ 为常数. 若

$$\|w\|+\|G\|(\sup_{y\in S}\int_{-\infty}^{\infty}F(s,y(s))^*W(s)\cdot F(s,y(s))\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}\le R.$$

这里 $K\|G\|<1$，则边值问题(13)式和(14)式有唯一解 $y(t)\in L_W^2(-\infty,\infty)$ 满足 $\int_{-\infty}^{\infty}|y(t)|^2\,\mathrm{d}t\le R^2$.

定理 6　假设上述引理条件满足，并且对 $\exists R>0$ s.t 下式成立：

$$\|w\|+\|G\|(\sup_{y\in S}\int_{-\infty}^{\infty}F(s,y(s))^*W(s)\cdot F(s,y(s))\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}\le R.$$

这里令 $S=y\in L_W^2(-\infty,\infty):\|y\|\le R$，则边值问题(13)式和(14)式至少有 1 解 $y\in L_W^2(-\infty,\infty)$ 满足：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|y(t)|^2\,\mathrm{d}t\le R^2.$$

参考文献：

[1] Guseinov G S, Yaslan I. Boundary value problems for second order nonlinear differential eqations on infinite intervals[J]. J Math Anal Appl, 2004, 290:620-638.

[2] Li Hecheng. On the existence of positive solution of singular second order boundary value problem[J]. Chin Quart J of Math, 2004, 19(1):101-106.

[3] Bobisud L E. Existence of positive solutions to some nonlinear singular boundary value problems on finite and infinite intervals[J]. J Math Anal Appl, 1993, 173:69-83.

[4] Andres J, Gabor G, Gorniewicz L. Boundary value problems on infinite intervals[J]. Trans Amer Math Soc, 1999, 351:4 861-4 903.

[5] 尤秉礼. 常微分方程补充教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1981.

Existence and Uniqueness of Solution to Nonlinear Singular Hamiltonian Systems Boundary Value Problem

LI Liang, QI Jian-gang

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: With assumption of the light-hand side being a linear system expression and belonging to the Weyl limit-circle case., we consider nonlinear singular Hamiltonian systems to be on the semi-axis $(0,\infty)$ and on the whole axis $(-\infty,\infty)$, respectively, The existence and uniqueness of the solutions to the Hamiltonian systems problem are described and verified.

Key words: Hamiltonian system; fixed point theorems; Green’s function; limit-circle case

CLC number: O174.92　　　　**Document code:** A

（责任编辑　章践立）