

文章编号:0253-9993(2012)S1-0086-06

# 软土地区定向钻工后地表沉降的机理分析

朱建明<sup>1,2</sup>,赵沙沙<sup>2</sup>,江 强<sup>3</sup>,陈君平<sup>3</sup>,林 富<sup>4</sup>

(1. 北方工业大学 建筑工程学院,北京 100141;2. 北京航空航天大学 交通科学与工程学院,北京 100083;3. 江阴市人民政府重点工程建设办公室,江苏 江阴 214400;4. 无锡市海洋工程有限公司,江苏 无锡 214400)

**摘 要:**基于 SMP 强度准则,采用弹脆塑性软化模型,分析了定向钻工后孔壁周围土体内的二次应力、应变场以及塑性区半径分布规律,推导出了最优缩孔泥浆压力和允许的最小泥浆压力的计算公式;对比基于 M-C 强度准则计算结果,可得考虑中间主应力影响的 SMP 强度准则计算结果更精确,能够更好地解释软土地区定向钻工后地表沉降机理并指导工程实践。同时通过改变内摩擦角、黏聚力及剪胀参数的大小,得到土体屈服后内摩擦角和黏聚力跌落越多,塑性区半径越大以及土的剪胀特性有助于抵抗缩孔。

**关键词:**工后地表沉降;SMP 强度准则;弹脆塑性软化模型;剪胀特性

**中图分类号:**TD325.2 **文献标志码:**A

## The analytical solutions of post-construction settlement and its application in the directional drilling engineering

ZHU Jian-ming<sup>1,2</sup>, ZHAO Sha-sha<sup>2</sup>, JIANG Qiang<sup>3</sup>, CHEN Jun-ping<sup>3</sup>, LIN Fu<sup>4</sup>

(1. College of Architecture and Civil Engineering, North China University of Technology, Beijing 100141, China; 2. School of Traffic Science and Technology, Beihang University, Beijing 100083, China; 3. Jiangyin People's Government Key Project Construction Office, Jiangyin 214400, China; 4. Wuxi Ocean Engineering Co., Ltd., Wuxi 214400, China)

**Abstract:** The post-construction ground settlement is the key factor for the project quality in the directional drilling engineering, the formula of the post-construction ground settlement is the main problem to be solved. The rules of the secondary stress-strain and the radius of plastic zone in soil layer with the SMP failure criterion and elastic-brittle-plastic soften model were analyzed, the calculation formula of the optimal mud pressure and the minimum mud pressure limited were deduced. The result computed based on the SMP is better than the result computed based on the M-C failure criterion, it can be well used to explain the mechanism of ground settlement in soft soil regions and guide engineering practice. Through changing the value of cohesion, internal friction and the dilatancy parameter, it can be found that the smaller of the cohesion and internal friction after soil yield, the greater of the radius of plastic zone, meanwhile, soil dilatancy has the function of preventing shrinkage.

**Key words:** post-construction ground settlement; SMP failure criterion; elastic-brittle-plastic soften model; dilatancy

定向钻在软土环境中施工,首先选用合适的钻头打导向孔,然后更换扩孔器进行逐级扩孔,最终扩孔半径不超过待敷管径的 1.5 倍<sup>[1]</sup>,接着进行清孔,最后完成拖拉敷管,敷管完成后管壁和孔壁之间就形成一泥浆区,随着时间推移,泥浆水分消散,泥浆压力减小,这将引起孔壁周围处于平衡状态的土体卸载发生应力变化,进而导致缩孔,引起工后沉降,降低工程质量,影响地面交通,严重时甚至将引起附近构筑物歪

斜<sup>[2]</sup>。目前,技术人员多研究扩孔时土体应力应变场的变化规律<sup>[3-5]</sup>,工后沉降还未被引起足够的重视,尤其是沉降机理及影响因素还未从定量解析解上进行分析。

文中基于定向钻在一定等效覆土厚度(等效覆土厚度为净覆土厚度与附加覆土厚度之和,附加覆土厚度包括地面车辆荷载、重物堆积等)满足柱形孔的基本假设<sup>[6]</sup>,根据弹脆塑性软化模型,推导出定向

钻工后沉降解析解,分析相关影响因素,总结规律,最后提出一些合理的建议,为分析定向钻工后地表沉降提供可靠的理论依据。

### 1 定向钻工后地表沉降简化模型

定向钻工程简图如图 1 所示。定向钻有效段只有长距离的水平段,文中针对有效段进行分析。图 2(a)是敷管完成后水平段的纵断面。定向钻最终扩孔半径为  $r_a$ ,敷管完成后孔壁受到内压  $P_c$ (泥浆压力),外压  $P_0$ (初始应力,  $P_0 = \gamma_t h_t$ ,  $\gamma_t$  为土容重,  $h_t$  为等效覆土厚度)作用,假设孔壁周围土体由弹性状态进入塑性状态的临界泥浆压力为  $P_{cr}$ 。工后随时间推移泥浆失水压力逐渐减小,孔壁周围土体应力发生二次分布。当  $P_c > P_{cr}$  时,周围土体全部处于弹性变形状态;随着  $P_c$  减小至  $P_{cr}$  时,周围土体开始发生塑性变形;当  $P_c$  继续减小时,塑性区不断扩大,弹性区不断减小,在孔壁周围形成以  $r_p$  为半径的环状塑性区,塑性区外围是弹性区,如图 2(b)所示,该状况为柱状孔的缩孔。允许的极限缩孔大小为孔径等于管径。此外,当孔壁周围形成的塑性区半径  $r_p$  大于等效覆土厚度时,土体将发生塌陷。

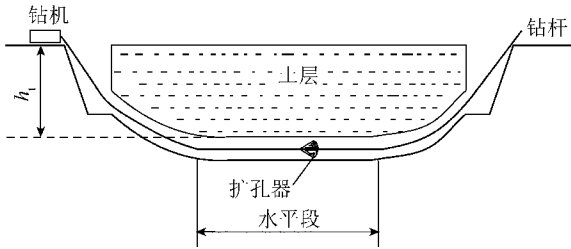
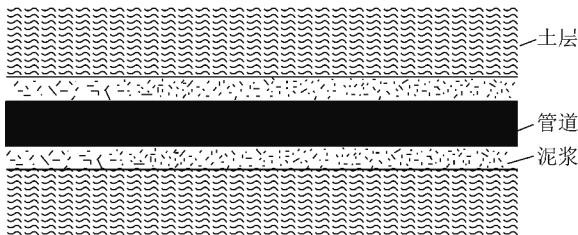
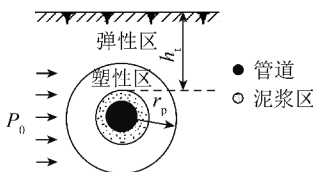


图 1 定向钻工程简图

Fig. 1 The engineering sketch of directional drilling



(a) 纵断面示意



(b) 孔壁力学模型

图 2 定向钻孔工后沉降简化模型

Fig. 2 The simplified model of directional drilling post-construction settlement

当孔壁周围出现塑性区时以平面应变状态下的 SMP 强度准则作为起塑条件<sup>[7]</sup>。由于 SMP 强度准则同时考虑了 3 个主应力的效应,因而可以考虑主应力的影响。对于定向钻孔壁缩孔问题,其径向应力  $\sigma_r$ 、纵向应力  $\sigma_z$  和切向应力  $\sigma_t$ , 分别对应 3 个主应力  $\sigma_1, \sigma_2$  和  $\sigma_3$ <sup>[8]</sup>:

(1) 初始屈服准则。

$$\frac{\sigma_\theta + \sigma_0}{\sigma_r + \sigma_0} = \frac{1}{4} \left[ \sqrt{8 \tan^2 \varphi + 9} + \sqrt{8 \tan^2 \varphi + 6 - 2 \sqrt{8 \tan^2 \varphi + 9} - 1} \right]^2 = M \quad (1)$$

(2) 后继屈服准则。

$$\frac{\sigma_\theta + \sigma'_0}{\sigma_r + \sigma'_0} = \frac{1}{4} \left[ \sqrt{8 \tan^2 \varphi' + 9} + \sqrt{8 \tan^2 \varphi' + 6 - 2 \sqrt{8 \tan^2 \varphi' + 9} - 1} \right]^2 = N \quad (2)$$

式中,  $\sigma_0 = c \cot \varphi$ ,  $\sigma'_0 = c' \cot \varphi'$ ;  $\varphi, \varphi', c, c'$  分别为三轴压缩状态下初始内摩擦角、残余内摩擦角、初始黏聚力和残余黏聚力;  $M, N$  分别为初始屈服与后继屈服时平面应变条件下土体的切向应力与径向应力之比。

土体应力应变简化模型如图 3 所示。图 3(a)为弹脆塑性软化模型,它突出了土达到峰值后的应变软化性质。可看出,在峰值应力之前土体表现为线弹性。A 点满足初始屈服函数, B 点满足后继屈服函数。当应力发生跌落后处于残余强度,土体继续变形,发生塑性剪胀。图 3(b)和图 3(c)中,  $h$  与  $H$  均为斜率,用以反映土的剪胀性,当  $h=1$  时为无剪胀性;  $\varepsilon_\theta^p, \varepsilon_r^p, \varepsilon_v^p$  分别为峰值后的塑性应变,这里应变与应力皆以压为正<sup>[9-10]</sup>。

### 2 定向钻工后地表沉降解析解

孔壁周围仅有弹性区时可得弹性区内的应力场、应变场和位移场<sup>[11]</sup>分别为

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= P_0 - (P_0 - P_c) \left( \frac{r_a}{r} \right)^2 \\ \sigma_\theta &= P_0 + (P_0 - P_c) \left( \frac{r_a}{r} \right)^2 \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_r &= -\frac{(1 + \nu)}{E} \left( \frac{r_a}{r} \right)^2 (P_0 - P_c) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{(1 + \nu)}{E} \left( \frac{r_a}{r} \right)^2 (P_0 - P_c) \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$u = \frac{(1 + \nu) r_a^2}{Er} (P_0 - P_c) \quad (5)$$

当  $r=r_a$  时,式(3)代入静力平衡方程<sup>[12]</sup>:

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{d\sigma_r}{dr} = 0$$

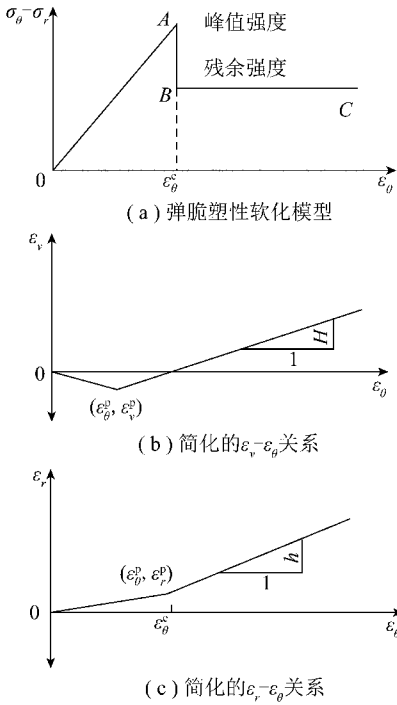


图3 应力应变简化模型

Fig. 3 The simplified model of stress-strain

得到保证孔壁周围土体全部处于弹性状态所需的最小径向压力,即最优缩孔泥浆压力为

$$P_{cr} = [2P_0 + (1 - M)\sigma_0] / (M + 1) \quad (6)$$

式(6)说明弹塑性交界处径向应力仅与土质参数和初始应力有关。

随着泥浆失水加剧,压力减小,孔壁周围土体进入塑性状态,联立静力平衡方程和式(2)得:

$$\sigma_r = -\sigma'_0 + Cr^{N-1}$$

式中, $C$ 为常数。

由边界条件 $\sigma_{ra} = P_c$ 得:

$$C = (P_c + \sigma'_0)r_a^{1-N}$$

则得到塑性区应力为

$$\begin{cases} \sigma_r^p = -\sigma'_0 + (P_c + \sigma'_0)\left(\frac{r}{r_a}\right)^{N-1} \\ \sigma_\theta^p = -\sigma'_0 + N(P_c + \sigma'_0)\left(\frac{r}{r_a}\right)^{N-1} \end{cases} \quad (7)$$

此时,塑性区以外的弹性区相当于受到内压 $P_{cr}$ ,外压 $P_0$ 的作用,所以计算塑性区以外弹性区的应力、应变、位移只需将式(3)~(5)中的 $P_c$ 换成 $P_{cr}$ , $r_a$ 换成 $r_p$ 。另外,所得塑性区以外弹性区应力公式,在 $r=r_p$ 处满足式(1)则得

$$P_c = \left( \frac{2P_0}{M+1} + \frac{1-M}{M+1}\sigma_0 + \sigma'_0 \right) \left( \frac{r_p}{r_a} \right)^{1-N} - \sigma'_0 \quad (8)$$

或

$$r_p = r_a \left[ \frac{2P_0 + (M+1)\sigma'_0 + (1-M)\sigma_0}{(P_c + \sigma'_0)(M+1)} \right]^{\frac{1}{N-1}} \quad (9)$$

根据塑性区以外弹性区应变和位移公式可得 $r=r_p$ 处的应变与位移为

$$\begin{cases} \varepsilon_r^e|_{r=r_p} = -\frac{1+\nu}{E} \frac{(M-1)(P_0 + \sigma_0)}{M+1} \\ \varepsilon_\theta^e|_{r=r_p} = \frac{1+\nu}{E} \frac{(M-1)(P_0 + \sigma_0)}{M+1} \end{cases} \quad (10)$$

$$[u_{r_p} = r_p \varepsilon_\theta^e|_{r=r_p}]$$

$$\text{令 } k = -\frac{1+\nu}{E} \frac{(M-1)(P_0 + \sigma_0)}{M+1}.$$

假设塑性区弹性应变等于 $r=r_p$ 上弹性区一侧的弹性应变<sup>[13]</sup>,则塑性区内的总应变为

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \varepsilon_r^e|_{r=r_p} + \varepsilon_r^p \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e|_{r=r_p} + \varepsilon_\theta^p \end{cases} \quad (11)$$

式中, $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ 分别为塑性区径向、切向总应变; $\varepsilon_r^p, \varepsilon_\theta^p$ 分别为在塑性区范围内产生的径向、切向应变。

在平面应变小应变条件下,有

$$\begin{cases} \varepsilon_v = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_v^p = \varepsilon_r^p + \varepsilon_\theta^p \end{cases} \quad (12)$$

式中, $\varepsilon_v^p$ 为在塑性区范围内产生的体积应变。

由图3可知

$$\begin{cases} \varepsilon_\theta^p = -h\varepsilon_r^p \\ \varepsilon_v^p = -H\varepsilon_r^p \end{cases} \quad (13)$$

根据式(12),(13)得到

$$h = 1 + H \quad (14)$$

在平面应变轴对称条件下,有 $\varepsilon_r^e = -\varepsilon_\theta^e$ ,根据式(13),(14)可得

$$h\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = (h-1)\varepsilon_r^e|_{r=r_p} \quad (15)$$

联立式(15)和几何方程 $\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$ ,得到塑性区的位移协调方程

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{hr} = \frac{k(h-1)}{h} \quad (16)$$

式(16)的通解为

$$u = Ar^{-\frac{1}{h}} + \frac{k(1-h)r}{h}$$

其中, $A$ 为常数。根据弹塑性交界面处的位移连续条件, $u_{r_p} = -kr_p$ ,得: $A = -kr_p^{(1+1/h)}/h$ ,则塑性区的位移、应变为

$$u = -\frac{kr}{h} \left[ \left( \frac{r_p}{r} \right)^{1+\frac{1}{h}} - (1-h) \right] \quad (17)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = -\frac{k}{h} \left[ (1-h) + \frac{1}{h} \left( \frac{r_p}{r} \right)^{1+\frac{1}{h}} \right] \\ \varepsilon_\theta = \frac{k}{h} \left[ \left( \frac{r_p}{r} \right)^{1+\frac{1}{h}} - (1-h) \right] \end{cases} \quad (18)$$

则孔壁处的位移为

$$u_{r_a} = -\frac{kr_a}{h} \left[ \left( \frac{r_p}{r_a} \right)^{1+\frac{1}{h}} - (1-h) \right] \quad (19)$$

当无剪胀,即  $h=1$  时,  $u_{r_a} = -kr_p^2/r_a$ 。

允许的极限缩孔大小为孔径等于管径,缩孔体积变化与孔壁周围土体的弹塑性体积变化相等<sup>[14]</sup>,则:

$$\pi r_a^2 - \pi(nr_a)^2 = \pi r_p^2 - \pi(r_p - u_{rp})^2 + \Delta \quad (20)$$

式中,  $n$  为待敷管径与最终扩孔半径  $r_a$  之比;  $\Delta$  为塑性区的体积变量。

塑性区的体积应变  $\varepsilon_v$  由式(12)确定,则塑性区内的体积变量为:

$$\Delta = \int_{r_a}^{r_p} \varepsilon_v dv = \int_{r_a}^{r_p} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) dv = 2\pi \int_{r_a}^{r_p} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) r dr = \frac{2\pi k}{h} \left[ (h-1)(r_p^2 - r_a^2) + r_p^{\frac{h+1}{h}} (r_p^{\frac{h-1}{h}} - r_a^{\frac{h-1}{h}}) \right] \quad (21)$$

将式(10),(21)代入式(20)可得

$$k^2 \left( \frac{r_p}{r_a} \right)^2 + \frac{2k}{h} \left( \frac{r_p}{r_a} \right)^{\frac{1+h}{h}} + \frac{2k(h-1)}{h} + 1 - n^2 = 0 \quad (22)$$

表 1 土的相关参数

Table 1 The soil parameters

$E/kPa$	$\mu$	$c/kPa$	$c'/kPa$	$\varphi/(^\circ)$	$\varphi'/(^\circ)$	$r_a/m$	$h$	$P_0/kPa$	$P_c/kPa$
10 000	0.3	15	10	20	15	0.3	1.2	100	30

(2)塑性区半径公式:

$$r_p = r_a \left[ \frac{(P_0 + \sigma_0)(1 - \sin \varphi)}{P_c + \sigma_0} \right]^{\frac{1 - \sin \varphi}{2 \sin \varphi}} \quad (26)$$

将表 1 中数据代入式(6)可得基于 SMP 强度准则得到的最优泥浆压力  $P_{cr}$  为 44.98 kPa,根据式(25)得到基于 M-C 强度准则的  $P_{cr}$  为 51.72 kPa,图 4 为  $P_0$  与  $P_{cr}$  的关系曲线。可得两种计算方法所得  $P_{cr}$  均随  $P_0$  增大而增大,基于 SMP 强度准则所得值始终小于基于 M-C 强度准则所得值。

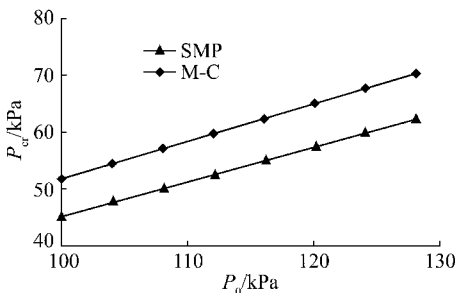


图 4  $P_0$  与  $P_{cr}$  的关系曲线

Fig. 4 The relationship between  $P_0$  and  $P_{cr}$

将表 1 中数据代入式(9)可得基于 SMP 强度准

可以由式(22)计算得到  $(r_p/r_a)_{max}$ ,进而得到  $(r_p)_{max}$ ,则允许的最小泥浆压力和孔壁处最大位移为

$$(P_c)_{min} = \left( \frac{2P_0}{M+1} + \frac{1-M}{M+1} \sigma_0 + \sigma'_0 \right) \left( \frac{r_p}{r_a} \right)_{max}^{1-N} - \sigma'_0 \quad (23)$$

$$(u_{r_a})_{max} = \frac{kr_a}{h} \left[ \left( \frac{r_p}{r_a} \right)_{max}^{1+\frac{1}{h}} - (1-h) \right] \quad (24)$$

当  $h=1$  时,  $(u_{r_a})_{max} = k(r_p)_{max}^2/(hr_a)$ 。

### 3 算例及参数分析

江阴市东横河污水截流系统二期工程中东横河部分西起绿园桥东侧,东至砂山路。其中延陵路上从丽都城市花园大门至澄江公路岸上管线采用非开挖定向钻施工。采取原状土样(淤泥质黏土)进行物理性质试验,得到土体相关参数见表 1。

基于 M-C 强度准则推导出缩孔的相关公式<sup>[15]</sup>

如下:

(1)最优缩孔泥浆压力为

$$P_{cr} = P_0(1 - \sin \varphi) - c \cos \varphi \quad (25)$$

则得到的塑性区半径  $r_p$  为 0.32 m,根据式(26)可得基于 M-C 强度准则的  $r_p$  为 0.34 m,内摩擦角  $\varphi$  与  $r_p$  的关系曲线如图 5 所示,黏聚力  $c$  与  $r_p$  的关系曲线如图 6 所示。可得 2 种计算方法所得  $r_p$  均随  $c, \varphi$  增大而减小,且基于 SMP 强度准则所得值始终小于基于 M-C 强度准则所得值。

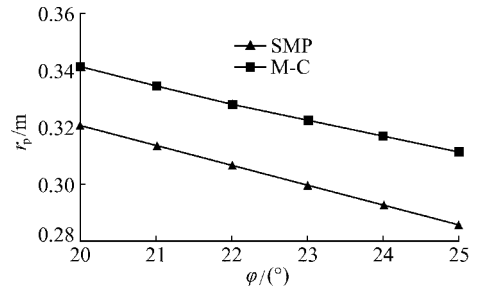
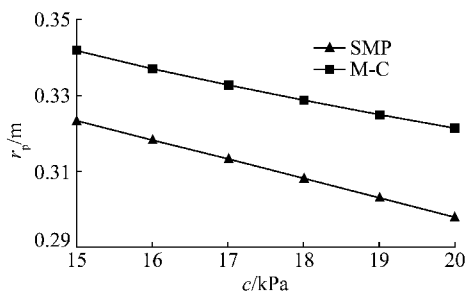
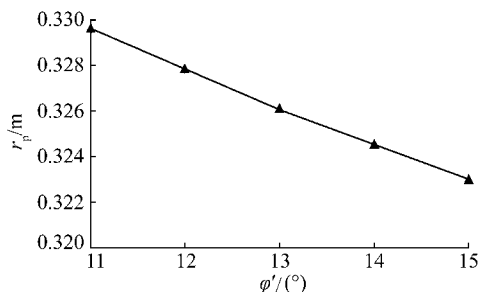
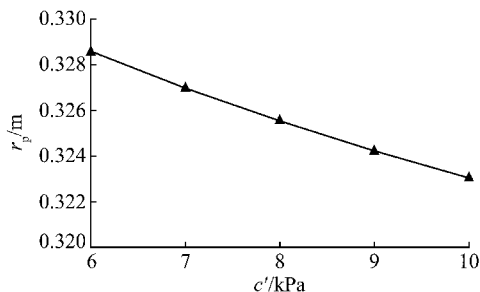


图 5  $\varphi$  与  $r_p$  的关系曲线

Fig. 5 Relationship between  $\varphi$  and  $r_p$

由以上可知,基于考虑中间主应力影响 SMP 强度准则所得结果更精确,能更好的解释软土地区定向钻后地表沉降和指导工程实践。

图 7 和图 8 分别为  $\varphi', c'$  与  $r_p$  的关系曲线图,可

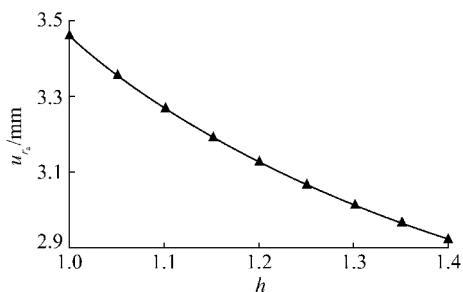
图6  $c$  与  $r_p$  的关系曲线Fig. 6 Relationship between  $c$  and  $r_p$ 图7  $\varphi'$  与  $r_p$  的关系曲线Fig. 7 The relationship between  $\varphi'$  and  $r_p$ 图8  $c'$  与  $r_p$  的关系曲线Fig. 8 Relationship between  $c'$  and  $r_p$ 

得  $r_p$  随  $\varphi'$ 、 $c'$  的增大而减小,说明内摩擦角和黏聚力在土体屈服后跌落越多,塑性区半径就越大,所以保持土体屈服后的内摩擦角和黏聚力对土体稳定具有重要意义。

根据式(19)可得孔壁处位移  $u_{r_a}$  为 3 mm,剪胀参数  $h$  与  $u_{r_a}$  的关系如图9所示。 $h=1$  为无剪胀情况。由图可得  $u_{r_a}$  随  $h$  的增大而减小,说明剪胀参数  $h$  有抵抗缩孔的作用。

## 4 结 论

(1) 基于 SMP 强度准则推导出最优缩孔泥浆压力  $P_{cr} = [2P_0 + (1-M)\sigma_0] / (M+1)$ , 它仅与土质参数  $c$ 、 $\varphi$  及初始应力  $P_0$  有关。可根据土质参数和工程数据计算  $P_{cr}$ , 以保证周围土体均处于弹性状态。对比 M-C 强度准则所得计算结果, 可得基于考虑中间主应力影响的 SMP 强度准则计算结果更为精确, 能更

图9  $h$  与  $u_{r_a}$  的关系Fig. 9 Relationship between  $h$  and  $u_{r_a}$ 

好的解释软土地区定向钻井后地表沉降和指导工程实践。

(2) 定向钻井后应力重分布后塑性区范围越小, 孔壁越稳定, 由  $r_p$  的计算公式(9)可知:  $r_p$  与泥浆压力  $P_c$  成反比关系, 与最大扩孔半径  $r_a$ 、初始应力  $P_0$  成正比关系, 这就说明在一定的地质条件和施工条件下, 泥浆压力是控制地表沉降的关键因素。

(3) 基于弹脆塑性软化模型分析软土地区定向钻井后地表沉降, 残余内摩擦角和残余黏聚力越小, 塑性区半径越大, 说明提高土体屈服后的内摩擦角和黏聚力对土体稳定具有重要意义。

(4) 定向钻井后地表沉降, 孔壁处缩孔位移大小与剪胀参数  $h$  成反比关系, 说明  $h$  有抵抗缩孔的作用。

## 参考文献:

- [1] Jason S, Samuel T. Surface heave mechanisms in horizontal directional drilling[J]. Journal of Construction in Engineering and Management, 2005, 131(5): 540-547.
- [2] 蔡欣, 江强. 拖拉管施工对环境影响的案例分析与探讨[J]. 给水排水, 2008, 34(11): 94-97.  
Cai Xin, Jiang Qiang. Cast study and discussion of the environmental impacts of the dragging pipe construction[J]. Water and Wastewater Engineering, 2008, 34(11): 94-97.
- [3] 孙宏全, 詹胜文, 张洪洲. 定向钻穿越的冒浆分析及对策[J]. 石油工程建设, 2007, 33(2): 41-42.  
Sun Hongquan, Zhan Shengwen, Zhang Hongzhou. Mud spillover analysis during directional drilling crossing and countermeasure[J]. Petroleum Engineering Construction, 2007, 33(2): 41-42.
- [4] 李水明, 黄武. 水平定向钻井中地表隆起和劈裂冒浆计算分析及对策[J]. 资源环境与工程, 2008, 22(1-2): 70-72.  
Li Shuiming, Huang Wu. The calculating analysis and countermeasures of directional drilling about surface uplift and fracturing emit pulp[J]. Resources Environment and Engineering, 2008, 22(1-2): 70-72.
- [5] 李斌, 李巨龙, 周玲玲. 水平定向钻进铺管水平孔段软土孔壁稳定性分析[J]. 岩土工程技术, 2005, 19(2): 84-86.  
Li Bin, Li Julong, Zhou Lingling. Analysis of hole wall stability in horizontal directional drilling in soft soils area[J]. Geotechnical En-

- gineering Technique, 2005, 19(2):84-86.
- [6] 刘裕华,陈征宙,彭志军,等.应用圆孔柱扩张理论对预制管桩的挤土效应分析[J].岩土力学,2007,28(10):2167-2172.  
Liu Yuhua, Chen Zhengzhou, Peng Zhijun, et al. Analysis of pile driving effect of precast tubular pile using cylindrical cavity expansion theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(10):2167-2172.
- [7] 罗汀,姚仰平,松岗元.基于 SMP 准则的土的平面应变强度[J].岩土力学,2000,21(4):390-393.  
Luo Ting, Yao Yangping, Song Gangyuan. Soil strength equation in plane strain based on SMP[J]. Rock and Soil Mechanics, 2000, 21(4):390-393.
- [8] Yu M H. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th Century[J]. Appl. Mech. Rev., ASME, 2002, 55(3):169-218.
- [9] 栾茂田,李波.基于广义 SMP 破坏准则的柱形孔扩张问题理论分析[J].岩土力学,2006,27(12):2105-2110.  
Luan Maotian, Li Bo. Theoretical analysis of cylindrical cavity expansion based on extended SMP criterion[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(12):2105-2110.
- [10] 张常光,张庆贺,赵均海.考虑应变软化及剪胀的井壁稳定统一解[J].煤炭学报,2009,34(5):634-639.  
Zhang Changguang, Zhang Qinghe, Zhao Junhai. Unified solutions of well bore stability considering strain softening and shear dilation [J]. Journal of China Coal Society, 2009, 34(5):634-639.
- [11] 龚晓南.土塑性力学[M].杭州:浙江大学出版社,1990.  
Gong Xiaonan. Soil plasticity[M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 1990.
- [12] 王树理,王树仁,孙世国,等.地下建筑结构设计[M].北京:清华大学出版社,2007.  
Wang Shuli, Wang Shuren, Sun Shiguo, et al. Design of underground construction structure[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2007.
- [13] 蒋明镜,沈珠江.考虑材料应变软化的柱形孔扩张问题[J].岩土工程学报,1995,17(4):10-19.  
Jiang Mingjing, Shen Zhujiang. Expansion of cylindrical cavity of materials with strain-softening behaviour[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1995, 17(4):10-19.
- [14] 蒋明镜,沈珠江.岩土类软化材料的柱形孔扩张统一解问题[J].岩土力学,1996,17(1):1-8.  
Jiang Mingjing, Shen Zhujiang. Unified solution to expansion of cylindrical cavity for geomaterials with strain-softening behaviour[J]. Rock and Soil Mechanics, 1996, 17(1):1-8.
- [15] 翟所业,贺宪国.巷道围岩塑性区的德鲁克-普拉格准则解[J].地下空间与工程学报,2005,2(1):223-226.  
Zhai Suoye, He Xianguo. Solution of D-P criterion of plastic district of surrounding rock of roadway[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2005, 2(1):223-226.