

文章编号: 0253 - 9993(2005)01 - 0026 - 05

双剪双参数统一强度准则改进式及其应用

胡 小 荣

(福州大学 土木建筑工程学院, 福建 福州 350002)

摘 要: 通过莫尔圆分析发现, 现有的双剪双参数统一强度准则在形式上可看成是对具有直线型强度包络线的 Mohr-Coulomb 强度准则的改进。由于直线型强度包络线对岩石的抗拉强度特性解释不好, 不如双曲线型强度包络线。为此, 通过将现有的双剪双参数统一强度准则做相应的非线性化处理, 导出了具有双曲线型强度包络线的双剪双参数统一强度准则改进式, 并将其用于对静水压力条件下圆形巷道围岩的弹塑性分析。

关键词: 双剪双参数统一强度准则; 双曲线型强度包络线; 巷道围岩; 弹塑性分析

中图分类号: TU459 **文献标识码:** A

Improvement of the two-parameter twin shear unified failure criterion and its application

HU Xiao-rong

(School of Civil Engineering and Architecture, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China)

Abstract: The Mohr circle comparisons show that the two-parameter twin shear unified failure criterion used now has the linear type of the failure envelop same as the Mohr-Coulomb strength theory, so the former could be considered as the improvement of the latter. But for failure envelopes, the linear type is inferior to the hyperbolic type in describing the rock tensile properties. On rock with the hyperbolic failure envelop, the nonlinear improved expression of the two-parameter twin shear unified failure criterion was given out and it was used in elasto-plastic analysis for the wall rock around the tunnel with circular cross-section in static hydraulic pressure condition.

Key words: two-parameter twin shear unified failure criterion; hyperbolic failure envelope; wall rock around the tunnel; elasto-plastic analysis

大量的岩石三轴实验已经证明, 岩石的强度和破坏不仅与最大和最小主应力有关, 还与中间主应力密切相关, 即存在所谓的中间主应力效应^[1~6]。与单剪类强度准则如 Mohr-Coulomb 强度准则、Hoek-Brown 强度准则等相比, 俞茂宏^[7~11]提出的双剪双参数统一强度准则可以线性地描述这种实验现象, 并在巷道围岩和压力隧洞的弹塑性分析中得到了一定的研究应用^[12~14]。本文的研究分析表明, 现有的双剪双参数统一强度准则在形式上可看成是具有直线型强度包络线的 Mohr-Coulomb 强度理论的改进。虽然直线型强度包络线具有表达式简单、便于应用的优点, 但对岩石的抗拉强度特性解释不好, 不如双曲线型强度包络线^[15]。本文首先对 Mohr-Coulomb 强度准则和现有的双剪双参数统一强度准则进行了比较, 发现两者的差别只是平面上破坏应力莫尔圆的作法有所不同, 而采用的强度包络线则是完全相同的, 均为直线型。通过对现有的双剪双参数统一强度准则作非线性化处理, 导出了具有双曲线型强度包络线的双剪双参

收稿日期: 2004 - 05 - 14

基金项目: 福建省教育厅科技 3 项经费项目 (K04009)

作者简介: 胡小荣 (1964 -), 男, 江西余江人, 博士, 教授. Tel: 0591 - 28306442, E-mail: jxhxr@sohu.com

数统一强度准则改进式，并用改进式对静水压力条件下的圆形巷道围岩作了弹性分析。

1 现有双剪双参数统一强度准则的分析

现有的双剪双参数统一强度准则^[10,11]的表达式为

$$\sigma_1 - \frac{b\sigma_2 + \sigma_3}{1+b} = \tau \quad \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{1+b} \right), \quad \frac{\sigma_1 + b\sigma_2 - \sigma_3}{1+b} = \tau \quad \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{1+b} \right), \quad (1)$$

式中， σ_1 为材料的单轴拉压强度比， $\sigma_2 = \sqrt{c}$ ； τ 为材料的单轴抗拉强度； c 为材料的单轴抗压强度， b 为取值 $[0, 1]$ 的参数。

对于岩石材料而言，式 (1) 用内聚力 C_0 和内摩擦角 φ 表示，则

$$\begin{cases} \sigma_1(1 - \sin \varphi) - \frac{b\sigma_2 + \sigma_3}{1+b}(1 + \sin \varphi) = 2C_0 \cos \varphi & \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi \right), \\ \frac{\sigma_1 + b\sigma_2}{1+b}(1 - \sin \varphi) - \sigma_3(1 + \sin \varphi) = 2C_0 \cos \varphi & \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi \right), \end{cases} \quad (2)$$

对于式 (2)，若令

$$\sigma_1 = (\sigma_1 + b\sigma_2)/(1+b), \quad \sigma_3 = (b\sigma_2 + \sigma_3)/(1+b), \quad (3)$$

则

$$\begin{cases} \sigma_1(1 - \sin \varphi) - \sigma_3(1 + \sin \varphi) = 2C_0 \cos \varphi & \left(\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)/2 - (1 - \sigma_3) \sin \varphi / 2 \right), \\ \sigma_1(1 - \sin \varphi) - \sigma_3(1 + \sin \varphi) = 2C_0 \cos \varphi & \left(\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)/2 - (1 - \sigma_3) \sin \varphi / 2 \right), \end{cases} \quad (4)$$

由于式 (4) 有类似于以下 Mohr-Coulomb 强度准则的表达式

$$\sigma_1(1 - \sin \varphi) - \sigma_3(1 + \sin \varphi) = 2C_0 \cos \varphi, \quad (5)$$

因此，如果将式 (5) 中的 σ_1, σ_3 分别换成式 (4) 中的 σ_1, σ_3 ，则可看出，现有的双剪双参数统一强度准则在形式上可看成是对具有直线型强度包络线的 Mohr - Coulomb 强度理论的改进，采用的强度包络线仍为直线型，只是破坏应力莫尔圆的作法有所不同，如图 1 所示。

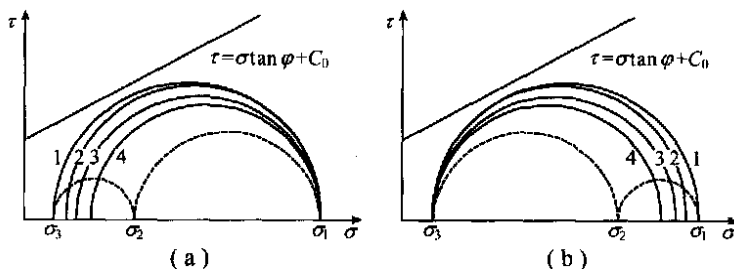


图 1 现有双剪双参数统一强度准则所采用的强度包络线和破坏应力莫尔圆

Fig. 1 Failure envelope and Mohr circles of the two-parameter twin shear unified criterion used now

(a) $\sigma_3 = \sigma_2 - \frac{1 + \sigma_3}{2} - \frac{1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi$; (b) $\sigma_1 = \sigma_2 - \frac{1 + \sigma_3}{2} - \frac{1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi$; 莫尔圆 1~4 —— $b=0, 1/3, 2/3, 1$

2 具有双曲线型强度包络线的双剪双参数统一强度准则改进式

双曲线型岩石强度包络线如图 2 所示。其一般方程^[15]为

$$\left(\frac{c + \sigma_1}{c^2} \right)^2 - \frac{2}{d^2} = 1, \quad c = \frac{2\tau}{c - 3\tau}, \quad d = \tau \sqrt{\frac{1}{c - 3\tau}}. \quad (6)$$

式 (6) 的主应力表达式^[15]为

$$\left(\frac{a - b}{2} \right)^2 = \frac{c - 3\tau}{c + \tau} \left[\frac{a + b}{2} + \frac{\tau(c - \tau)}{c - 3\tau} \right]^2 - \frac{3}{c - 3\tau},$$

式中， a, b 分别为破坏应力莫尔圆与 σ 轴的交点，且 $a > b$ 。

上式也可写为

$$\left(\frac{a - b}{2} \right)^2 = \frac{1 - 3}{1 +} \left[\frac{a + b}{2} + \frac{\tau(1 -)}{1 - 3} \right]^2 - \frac{2}{1 - 3}. \quad (7)$$

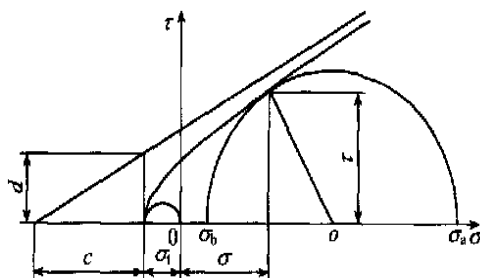


图 2 双曲线型岩石强度包络线

Fig. 2 Hyperbolic failure envelope of the rock

对于具有双曲线型强度包络线的 Mohr-Coulomb 准则改进式而言, 有 $\sigma_1 = a$, $\sigma_3 = b$. 同理, 若将式 (7) 中的 a , b 分别用式 (3) 中 σ_1 , σ_3 替换并利用双剪双参数统一强度准则中原有的限制条件代入上式后, 则具有双曲线型强度包络线的双剪双参数统一强度准则改进式为

$$\left[\frac{(1+b)\sigma_1 - b\sigma_2 - \sigma_3}{2(1+b)} \right]^2 = \frac{1-3}{1+} \left[\frac{(1+b)\sigma_1 + b\sigma_2 + \sigma_3}{2(1+b)} + \frac{t(1-)}{1-3} \right]^2 - \frac{2}{1-3} \left(2 - \frac{1+}{1+} \sigma_3 \right), \quad (8)$$

$$\left[\frac{\sigma_1 + b\sigma_2 - (1+b)\sigma_3}{2(1+b)} \right]^2 = \frac{1-3}{1+} \left[\frac{\sigma_1 + b\sigma_2 + (1+b)\sigma_3}{2(1+b)} + \frac{t(1-)}{1-3} \right]^2 - \frac{2}{1-3} \left(2 - \frac{1+}{1+} \sigma_3 \right). \quad (9)$$

3 双剪双参数统一强度准则改进式在巷道围岩弹塑性分析中的应用

3.1 应力状态分析

静水压力条件下圆形断面巷道围岩的弹塑性力学分析可以看成是平面应变问题, 若采用 Mohr-Coulomb 强度理论, 就只能考虑到巷道断面上周边围岩径向应力 σ_r 和切向应力 σ_θ 的作用. 而采用双剪双参数统一强度理论, 则可同时考虑到上述两个应力及巷道围岩轴向应力 σ_z 的作用. 由于 σ_r , σ_θ , σ_z 三者相互正交, 可以认为是 3 个主应力. 假定塑性区围岩体应变 $\epsilon_v = 0$, 则塑性区内的径向应力 $\sigma_r^{(p)}$ 、切向应力 $\sigma_\theta^{(p)}$ 和轴向应力 $\sigma_z^{(p)}$ 存在以下关系^[12,13], 即

$$\sigma_z^{(p)} = \frac{1}{2} [\sigma_r^{(p)} + \sigma_\theta^{(p)}]. \quad (10)$$

由于在巷道周边围岩中, 切向应力 $\sigma_\theta^{(p)}$ 最大, 径向应力 $\sigma_r^{(p)}$ 最小, 而对于岩石而言, 通常有 $\mu < 1$, 因此, 由上式可知, 在塑性区内 3 个主应力的大小为 $\sigma_1 = \sigma_\theta^{(p)}$, $\sigma_2 = \sigma_z^{(p)}$, $\sigma_3 = \sigma_r^{(p)}$, 且满足 $\sigma_2 - \frac{1+}{1+} \sigma_3$ 的条件. 故在进行塑性区应力计算时, 应采用强度准则改进式 (9), 将式 (10) 代入式 (9) 得

$$\left[\frac{(2+b)(\sigma_\theta^{(p)} - \sigma_r^{(p)})}{4(1+b)} \right]^2 = \frac{1-3}{1+} \left[\frac{(2+b)\sigma_\theta^{(p)} + (2+3b)\sigma_r^{(p)}}{4(1+b)} + \frac{t(1-)}{1-3} \right]^2 - \frac{2}{1-3}, \quad (11)$$

令 $\frac{(2+b)\sigma_\theta^{(p)} + (2+3b)\sigma_r^{(p)}}{4(1+b)} = s$, 则有 $\frac{(2+b)(\sigma_\theta^{(p)} - \sigma_r^{(p)})}{4(1+b)} = \left[\frac{1-3}{1+} s^2 + \frac{2(1-)}{1+} ts + \frac{2}{1+} \right]^{\frac{1}{2}}$, 解得

$$\sigma_r^{(p)} = s - (a_1 s^2 + 2a_2 s + a_3)^{1/2}, \quad \sigma_\theta^{(p)} = s + \frac{2+3b}{2+b} (a_1 s^2 + 2a_2 s + a_3)^{1/2}, \quad (12)$$

式中, $a_1 = \frac{1-3}{1+}$, $a_2 = \frac{(1-)}{1+} t$, $a_3 = \frac{2}{1+}$.

3.2 塑性区应力

不考虑体积力时, 平面应变问题的平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_r^{(p)}}{\partial r} + \frac{\sigma_r^{(p)} - \sigma_\theta^{(p)}}{r} = 0. \quad (13)$$

将式 (12) 代入式 (13) 得

$$\frac{ds}{\sqrt{a_1 s^2 + 2a_2 s + a_3}} - \frac{1}{2} \frac{(2a_1 s + 2a_2) ds}{a_1 s^2 + 2a_2 s + a_3} = \frac{4(1+b)}{2+b} \frac{dr}{r},$$

记 $f_1(s) = 2a_1 s + a_2$, $f_2(s) = (a_1 s^2 + 2a_2 s + a_3)^{1/2}$, 解得

$$r = C^{\frac{2+b}{4(1+b)}} \left\{ \frac{[f_1(s) + 2\sqrt{a_1} f_2(s)] \sqrt{a_1}}{f_2(s)} \right\}^{\frac{2+b}{4(1+b)}}. \quad (14)$$

将边界条件 $r = r_0$, $r^{(p)} = p_i$ (r_0 为巷道半径, p_i 为巷道支护力) 代入式 (12) 得

$$s_0 = \frac{p_i + a_2}{1 - a_1} + \sqrt{\left(\frac{p_i + a_2}{1 - a_1}\right)^2 + \frac{a_3 - p_i^2}{1 - a_1}} \quad (15)$$

如果 $p_i = 0$, 则有 $s_0 = \sqrt{2}$. 根据边界条件 $r = r_0$, $s = s_0$ 求出待定常数 C , 最后得

$$r = r_0 \left\{ \frac{\left[\frac{f_1(s) + 2\sqrt{a_1}f_2(s)}{f_1(s_0) + 2\sqrt{a_1}f_2(s_0)} \right]^{\frac{1}{\sqrt{a_1}}} f_2(s_0)}{f_2(s)} \right\}^{\frac{2+b}{4(1+b)}} \quad (16)$$

由式 (10), (12), (16) 即可求出塑性区内的应力分布. 方法是先给定一个 s , 再分别由这 3 个式求出相应的 r , $r^{(p)}$, $r_z^{(p)}$.

3.3 塑性区半径及巷道周边围岩径向位移

在静水压力条件下, 塑性区边界 $r = R_0$ 处的径向应力 $r_{,R_0}^{(p)}$ 和切向应力 $\sigma_{,R_0}^{(p)}$ 与原岩应力 P 的关系^[16] 为

$$r_{,R_0}^{(p)} + \sigma_{,R_0}^{(p)} = 2P, \quad (17)$$

联立式 (12) 得

$$s_{R_0} = \frac{P + ka_2}{1 - ka_1} + \sqrt{\left(\frac{P + ka_2}{1 - ka_1}\right)^2 + \frac{ka_3 - P^2}{1 - ka_1}} \quad (18)$$

式中, $k = [b/(2+b)]^2$.

将式 (18) 代入式 (16) 得塑性区半径为

$$R_0 = r_0 \left\{ \frac{\left[\frac{f_1(s_{R_0}) + 2\sqrt{a_1}f_2(s_{R_0})}{f_1(s_0) + 2\sqrt{a_1}f_2(s_0)} \right]^{\frac{1}{\sqrt{a_1}}} f_2(s_0)}{f_2(s_{R_0})} \right\}^{\frac{2+b}{4(1+b)}} \quad (19)$$

由式 (16), (19) 得 R_0 与 p_i 的关系. 将式 (18) 代入式 (12) 得弹塑性区边界处的应力为

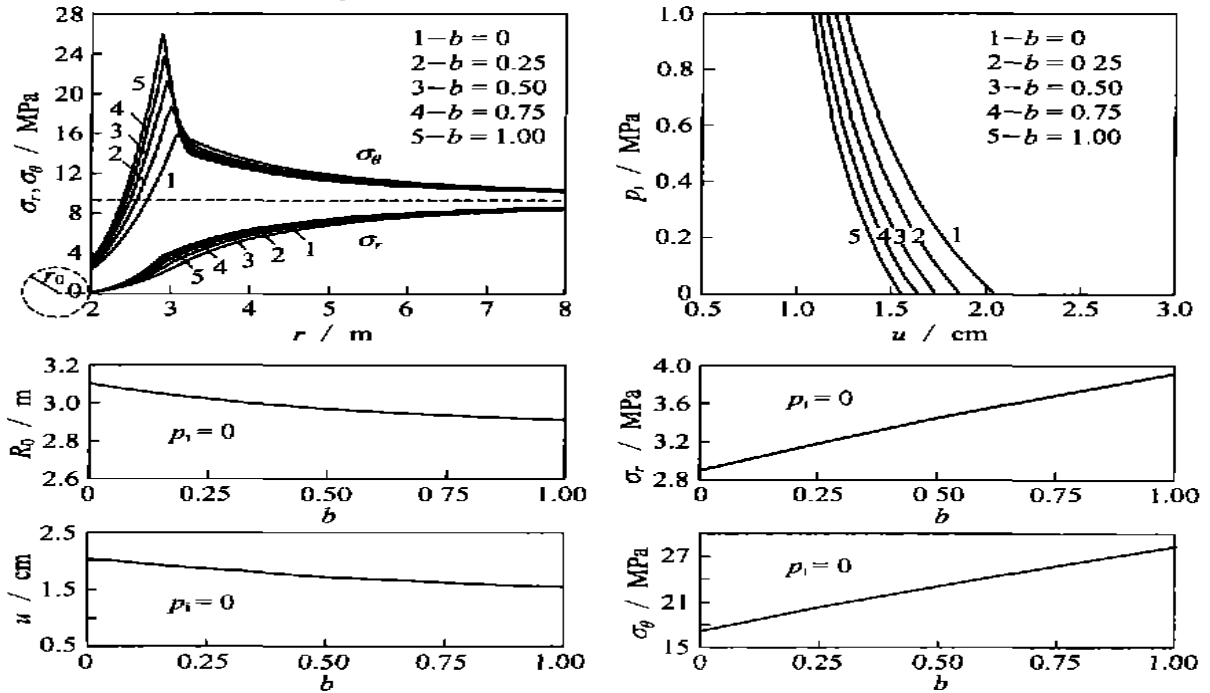


图 3 巷道围岩弹塑性分析结果

Fig. 3 Elasto-plastic results for the wall rock around the tunnel

$$\left. \begin{aligned} (p)_{r,R_0} &= s_{R_0} - (a_1 s_{R_0}^2 + 2a_2 s_{R_0} + a_3)^{1/2}, & (p)_{,R_0} &= s_{R_0} + (2 + 3b) (a_1 s_{R_0}^2 + 2a_2 s_{R_0} + a_3)^{1/2} / (2 + b). \end{aligned} \right.$$

弹塑性区边界处围岩的径向位移为

$$u_{R_0} = (P - (p)_{r,R_0}) R_0 / 2G,$$

式中, G 为剪切模量.

若塑性区围岩体应变 $v = 0$, 则巷道周边围岩径向位移为

$$u = (P - (p)_{r,R_0}) R_0^2 / 2Gr_0.$$

3.4 弹性区应力及围岩径向位移

对于 $r = R_0$ 处的弹性区围岩, 其应力及径向位移的计算方法和公式不变^[16], 即

$$\left. \begin{aligned} (e) &= P \left[1 - \frac{R_0^2}{r^2} \right] + \frac{(p)_{r,R_0} R_0^2}{r^2}, & (e) &= P \left[1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right] - \frac{(p)_{r,R_0} R_0^2}{r^2}, & u_r^{(e)} &= \frac{(P - (p)_{r,R_0}) R_0^2}{2Gr}. \end{aligned} \right.$$

3.5 结果分析

图 3 是根据 $c = 2.36 \text{ MPa}$, $t = 0.378 \text{ MPa}$, $P = 10 \text{ MPa}$, $E = 2 \text{ GPa}$, $\mu = 0.2$, $r_0 = 2 \text{ m}$ 所得的计算结果. 由图 3 可以看出: 围岩径向应力随 b 的增大而增大; 切向应力在塑性区随 b 的增大而增大, 在弹性区随 b 的增大而减小; 塑性区半径和巷道周边围岩径向位移随 b 的增大而减小; 弹塑性交界处的围岩径向应力及切向应力均随 b 的增大而增大.

4 结 语

现有的双剪双参数统一强度准则可以看成是对具有直线型强度包络线的 Mohr-Coulomb 强度准则的改进, 且改进只体现在破坏应力莫尔圆的作法上. 如果采用双曲线型强度包络线, 可通过对现有的双剪双参数统一强度准则做非线性化处理得出其改进式. 本文在对该问题进行了探讨的同时, 还应用改进式对静水压力条件下的圆形巷道围岩进行了弹塑性分析. 结果表明, 巷道围岩的轴向应力和强度准则中的参数 b 对巷道围岩塑性区半径、应力分布及径向位移等均有影响.

参考文献:

- [1] Mogi K. Effect of intermediate principal stress on rock failure [J]. J. Geophys. Res., 1967, 72: 5 117~5 131.
- [2] Mogi K. Failure and flow of rocks under high triaxial compression [J]. J. Geophys. Res., 1971, 76: 1 255~1 269.
- [3] Michelis P. Polyaxial yielding of granular rock [J]. J. Eng. Mech. ASCE, 1985, 111 (18): 1 049~1 066.
- [4] 张金涛, 林天健. 三轴实验中岩石的应力状态和破坏性质 [J]. 力学学报, 1979, 2: 99~105.
- [5] 许东俊, 耿乃光. 岩石强度随中间主应力的变化规律 [J]. 固体力学学报, 1985, 6 (1): 72~80.
- [6] 李小春, 许东俊. 双剪应力强度理论的试验验证——拉西瓦花岗岩强度特性的真三轴实验研究 [R]. 中科院武汉岩土所, 岩土报告 (90) 52 号.
- [7] 俞茂宏, 何丽南, 宋凌宇. 双剪强度理论及其推广 [J]. 中国科学 (A 辑), 1985, 28 (12): 1 113~1 120.
- [8] 俞茂宏, 刘凤羽. 一个新的普遍形式的强度理论 [J]. 土木工程学报, 1990, 23 (1): 34~40.
- [9] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用 [J]. 岩土工程学报, 1994, 16 (2): 1~10.
- [10] 俞茂宏. 双剪理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1998. 187~246.
- [11] Yu Maohong. Unified strength theory and its applications [M]. Berlin: Springer, 2003.
- [12] 胡小荣, 俞茂宏. 统一强度理论及其在巷道围岩弹塑性分析中的应用研究 [J]. 中国有色金属学报, 2002, 12 (5): 1 021~1 026.
- [13] 徐栓强, 俞茂宏, 胡小荣. 基于双剪统一强度理论的地下圆形洞室稳定性的研究 [J]. 煤炭学报, 2003, 28 (5): 522~526.
- [14] 宋 俐, 张永强, 俞茂宏. 压力隧洞弹塑性分析的统一解 [J]. 工程力学, 1998, 15 (4): 57~61.
- [15] 赵彭年. 松散介质力学 [M]. 北京: 地震出版社, 1995.
- [16] 于学馥, 郑颖人, 刘怀恒, 等. 地下工程围岩稳定分析 [M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1983.