

层合板稳定性分析的微分求积法

游仁长 王永亮 王鑫伟

(南京航空航天大学 104 教研室, 南京, 210016)

DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD IN THE BUCKLING ANALYSIS OF COMPOSITE LAMINATED PLATES

You Renchang, Wang Yongliang, Wang Xinwei

(Faculty 104, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 210016)

摘 要 用微分求积法分析层合板的稳定性时,离散节点的选取是计算能否成功的关键。给出了两种节点坐标的计算公式,通过对多种情况的计算,比较了各种节点分布形式所得结果的收敛性及准确性。结果表明,节点离散规律,可得到令人满意的结果。

关键词 微分方程, 层压板, 屈曲

中图分类号 V214.8, V214.3

Abstract The grid spacing plays an important role in the buckling analysis of composite laminated plates by the Differential Quadrature (DQ) method. Two formulae are proposed to compute the grid spacing and the convergence of the DQ method is then investigated. It is found that the DQ method with the proposed grid spacings gives satisfactory results for various benchmark problems considered in this paper.

Key words differential equations, laminates, buckling

分析层合板的稳定性,通常用 Ritz 法等能量法或者运用有限元法等数值方法进行。能量法一般要精心选取满足几何边界条件的位移函数,而有限元法的数据准备量大且对计算机的内存有较高要求。这些缺点带来了很大的不便。

微分求积法(Differential Quadrature Method,以下简称 DQ 法)是近年来迅速发展起来的一种数值计算方法,它由 Bellman 和 Casti 首先提出^[1],并被 Civan 和 Sliepcevic 用于给定边界条件下偏微分方程的直接求解^[2]。Bert 等人则最先将其用于分析四阶偏微分方程表述的结构力学问题^[3],Sherbourne 等人在用 DQ 法分析层合板的稳定性时发现,在某些情况下,若按通常方法选取离散节点将导致错误的计算结果,为尽可能地避免这种状况,经反复试算,找到了一组稍好的离散节点^[4]。遗憾的是,对某些边界情况,这组离散节点仍不能得到正确的计算结果。

本文首先简单介绍层合板稳定性分析的 DQ 法,然后给出两个选取离散节点的计算公式。计算表明,本文推荐的节点离散方法是行之有效的,对节点选取非常敏感的算例均给出了可靠的结果。

1 DQ 法的基本原理

DQ 法的基本原理就是将函数在离散节点处的导数值用求导方向上离散节点的函数值加权求和来近似表示。设 $W(x)$ 为定义在区间 $[0, 1]$ 上的光滑函数,若在区间 $[0, 1]$ 内

1993年8月30日收到,1993年12月20日收到修改稿
航空科学基金资助课题

取 N 个互不重合的离散节点,并使 $x_1 = 0, x_N = 1$, 则 $W(x)$ 在第 i 节点的导数值可由下式近似给出

$$\frac{dW}{dx} \Big|_{x=x_i} \cong \sum_{j=1}^N A_{ij} W(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

式中, A_{ij} 为函数 $W(x)$ 一阶导数的加权系数。

确定加权系数 A_{ij} 的一种方法是强制式(1)对 $W(x)$ 为任意不高于 $N-1$ 次多项式时成为等式, 即设 $W(x) = x^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, N$), 使(1)式变为

$$(k-1)x_i^{k-2} = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j^{k-1} \quad i, k = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

式(2)表示 N 组 N 阶线性方程组, 其系数矩阵为范德尔蒙(Vandermonde)矩阵, 故必有逆矩阵存在。所以, 式(2)确定了唯一的一组加权系数。

函数高阶导数的加权系数可由一阶导数的加权系数矩阵表出。记 B_{ij}, C_{ij}, F_{ij} 分别为二、三和四阶导数的加权系数, 则它们的值由下式确定

$$\left. \begin{aligned} B_{ij} &= \sum_{k=1}^N A_{ik} A_{kj} \\ C_{ij} &= \sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^N B_{ik} A_{kj} \\ F_{ij} &= \sum_{k=1}^N A_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^N B_{ik} B_{kj} \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

2 DQ 法在层板稳定性分析中的实施

在面内轴向压力和剪力作用下, 对称角铺层层合板的控制方程为

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} \\ = N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (4)$$

对于长为 a , 宽为 b 的矩形板, 边界条件可由下式给定。

① 四边简支矩形板

$$\left. \begin{aligned} W &= 0 & x = 0, a \text{ 或 } y = 0, b \\ M_x &= D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0 & x = 0, a \\ M_y &= D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0 & y = 0, b \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

② 四边夹支矩形板

$$\left. \begin{aligned} W &= 0 & x = 0, a \text{ 或 } y = 0, b \\ \frac{\partial W}{\partial x} &= 0 & x = 0, a \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= 0 & y = 0, b \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

对于既有简支边又有夹支边的矩形板, 其边界条件可由式(5)、式(6)组合而成。

引入无量纲坐标 $X=x/a, Y=y/b$, 并记 $\beta=a/b$, 则方程(4)的 DQ 近似形式为

$$\begin{aligned}
 & D_{11} \sum_{k=1}^N F_{ik} W_{kj} + 2(D_{12} + D_{66}) \beta^2 \sum_{m=1}^N B_{jm} \sum_{k=1}^N B_{ik} W_{km} + D_{22} \beta^4 \sum_{k=1}^N F_{jk} W_{ik} \\
 & + 4D_{16} \beta \sum_{m=1}^N A_{jm} \sum_{k=1}^N C_{ik} W_{km} + 4D_{26} \beta^3 \sum_{m=1}^N C_{jm} \sum_{k=1}^N A_{ik} W_{km} \\
 & = N_x a^2 \sum_{k=1}^N B_{ik} W_{kj} + 2N_{xy} a^2 \beta \sum_{m=1}^N A_{jm} \sum_{k=1}^N A_{ik} W_{km} + N_y a^2 \beta^2 \sum_{k=1}^N B_{jk} W_{ik} \\
 & \quad i, j = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{7}$$

四边简支矩形板的边界条件式(5)的 DQ 形式为

$$\left. \begin{aligned}
 & W_{1j} = W_{Nj} = W_{i1} = W_{iN} = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, N \\
 & D_{11} \sum_{k=1}^N B_{ik} W_{kj} + D_{12} \beta^2 \sum_{k=1}^N B_{jk} W_{ik} + 2D_{16} \beta \sum_{m=1}^N A_{jm} \sum_{k=1}^N A_{ik} W_{km} = 0 \quad \left. \begin{aligned} & i = 2, N-1 \\ & j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \tag{8} \\
 & D_{12} \sum_{k=1}^N B_{ik} W_{kj} + D_{22} \beta^2 \sum_{k=1}^N B_{jk} W_{ik} + 2D_{26} \beta \sum_{m=1}^N A_{jm} \sum_{k=1}^N A_{ik} W_{km} = 0 \quad \left. \begin{aligned} & i = 1, 2, \dots, N \\ & j = 2, N-1 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

四边夹支矩形板的边界条件(6)的 DQ 形式为

$$\left. \begin{aligned}
 & W_{1j} = W_{Nj} = W_{i1} = W_{iN} = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, N \\
 & \sum_{k=1}^N A_{ik} W_{kj} = 0 \quad i = 2, N-1; j = 1, 2, \dots, N \\
 & \sum_{k=1}^N A_{jk} W_{ik} = 0 \quad j = 2, N-1; i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

必须注意的是,式(8)、式(9)将力矩和转角为零的条件加在与边界相邻的一排节点上,这样做便于处理各种不同的边界条件。因此,矩形板的 DQ 离散网格必须取图 1 形式。

将式(8)、式(9)引入方程(7)后求解即可得到给定边界条件下层板的临界载荷。

3 计算与分析

算例为方形层合板在变化轴向力作用下的失稳(图 2)。

设方板的面内轴向压力 $N_y = 0, N_x$ 沿 x 方向线性变化,记 $N_x|_{x=0} = N_{\min}, N_x|_{x=a} = N_{\max}$, 则任意截面 X 的中面力 N_x 与 N_{xy} 为^[4]

$$\left. \begin{aligned}
 & N_x = 2N_{av}(C_1 X + C_2) \\
 & N_{xy} = -N_{av} \frac{C_1}{\beta} (2Y - 1)
 \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

其中, $N_{av} = [(1+r)/2]N_{\max}$ 为平均压力; $C_1 = (1-r)/(1+r), C_2 = r/(1+r); r = N_{\min}/N_{\max}$ 板端压力比。

为与文献[4]结果进行比较,算例选用 $[\theta/-\theta/\theta]_T$ 层合板,单层的弹性常数为 $E_{11} = 141.2 \text{ Gpa}, E_{22} = 9.6 \text{ Gpa}, G = 4.1 \text{ Gpa}, \nu_{12} = 0.26$ 。

表 1 为计算中采用的三种节点坐标选取方式,其中网格 2 与网格 3 是本文作者提出来

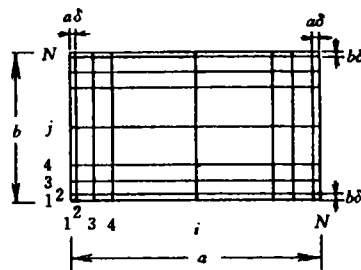


图 1 矩形板的 DQ 网格

的。

表1 网格节点无量纲坐标

节点	X_1	X_2	$X_i (i = 3, 4, \dots, N-2)$	X_{N-1}	X_N
网格1 ^[3]	0	δ	$\frac{i-2}{N-3}$	$1-\delta$	1
网格2	0	δ	$\frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{2N-2i-1}{2N-4} \pi \right]$	$1-\delta$	1
网格3	0	δ	$\frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{N-i-1}{N-3} \pi \right]$	$1-\delta$	1

注: $\delta = 10^{-4} \sim 10^{-5}$

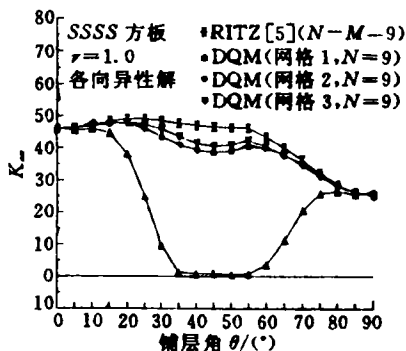
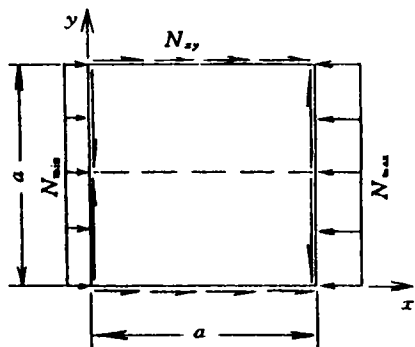


图2 线性变化轴向力作用的方板

图3 SSSS方板的失稳系数

为简单起见,用S和C分别表示简支和夹支边界,并按 $x=0, x=a, y=0, y=a$ 的顺序记录板四边的支持情况。例如将 $x=a$ 和 $y=0$ 两边夹支其余边简支的方板记为SCCS板。

图3为SSSS板临界载荷系数 $K_{av} (K_{av} = N_{av} a^2 / \sqrt{D_{11} D_{22}})$ 随铺层角 θ 的变化情况。

从中可见,网格1给出的结果是不可信的,而本文推荐的网格则可以得到可靠的计算结果。进一步计算表明,网格3在大多数边界情况下可获得比网格2更精确的结果,但对个别边界情况,网格3在 $N > 9$ 时结果才收敛。因此,在工程允许的误差范围内,以用网格2取 $N = 9$ 计算为宜;若要取得更为精确的结果,则可用网格3,取 $N > 9$ 进行计算。

表2 $N = 9$ 时离散节点的无量纲坐标(X_i)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
文献[4]	0	0.000 1	0.14	0.4	0.5	0.6	0.86	0.999 9	1
网格2	0	0.000 1	0.109 1	0.283 1	0.5	0.716 9	0.890 9	0.999 9	1

图4~图6是按表2给出的节点坐标,对算例在不同边界条件下的稳定性进行计算所得结果。由这些图可见,文献[4]推荐的离散节点,会导致结果随铺层角 θ 的变化而急剧跳跃,而本文推荐的网格2则可得到非常稳定的结果。

最后要指出的是,在具体计算时按表1中的三种网格形式,取不同节点数 N 进行了计

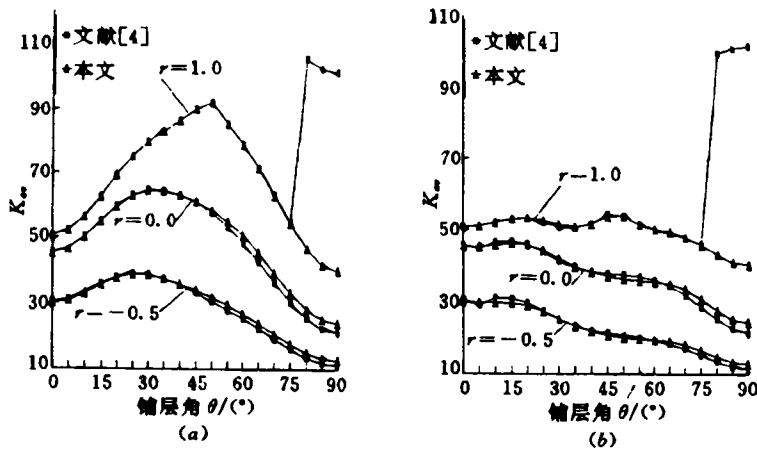


图4 SSCS板的失稳系数
(a) 正交异性解; (b) 各向异性解

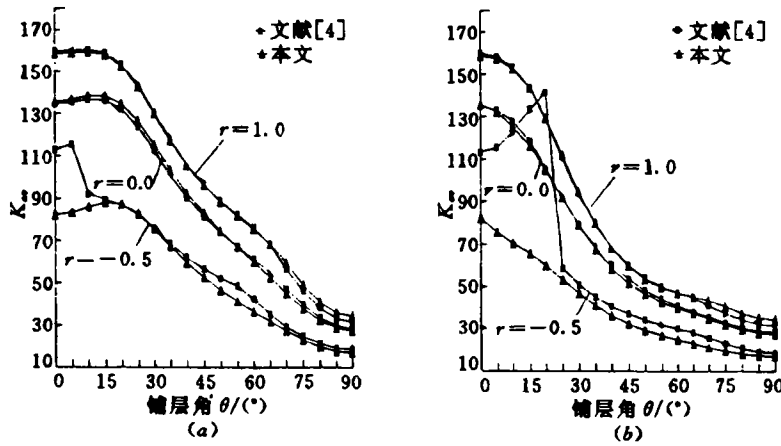


图5 CCSS板的失稳系数
(a) 正交异性解; (b) 各向异性解

算,结果表明网格2与网格3都具有很好的收敛性。而文献[4]给出的节点是凑出来的,因而数目只能是定死的,完全不能判断结果是否收敛。

综上所述,本文推荐的节点离散方式比已知的其它方式更为优越。

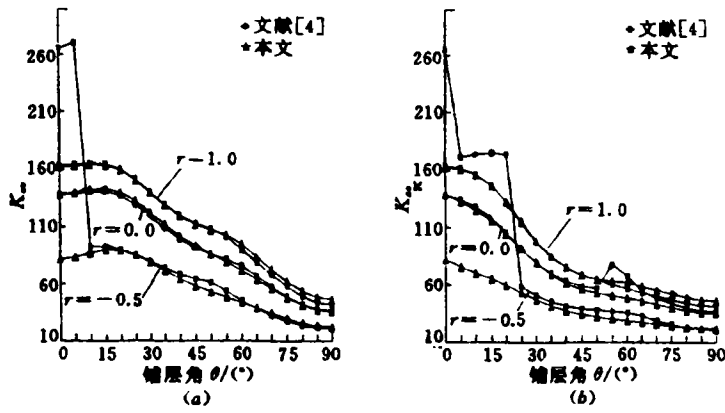


图6 CCCS板的失稳系数
(a) 正交异性解;(b) 各向异性解

参 考 文 献

- 1 Bellman R E, Casti J. Differential quadrature and long-term integration. J Math Anal Applic, 1971; 34: 235-238
- 2 Civan F, Sliepcevich C M. Differential quadrature for multidimensional problems. J Math Anal Applic, 1984; 101: 423-443
- 3 Jang S K, Bert C W, Striz A G. Application of differential quadrature to static analysis of structural components. Int J Numer Meth Engng, 1989; 28: 561-577
- 4 Sherbourne A N, Pandey M D. Differential quadrature method in the buckling analysis of beams and composite plates. Comp and struct, 1991; 40(4): 903-913
- 5 Jones R M. Mechanics of composite materials. Scripta Book Company, Washington, 1975: 275-283