第 21 卷 第 3 期 2008 年 9 月
宁 波 大 学 学 报（理 工 版）
JOURNAL OF NINGBO UNIVERSITY ( NSEE )
Vol.21 No.3 Sept. 2008

文章编号:1001-5132（2008）03-0350-04

# 关于多项式稳定的若干注记

解烈军

（宁波大学 理学院，浙江 宁波 315211）

摘要：在多项式稳定性经典理论中，通常利用双线性变换将多项式的 Schur 稳定性的判定转化为变换后多项式 Hurwitz 稳定性的判定. 文章首先指出了双线性变换的缺陷，同时给出了一个替代变换；其次引进了一个判定多项式 Hurwitz 稳定性的充要条件.

关键词：多项式；Schur 稳定；Hurwitz 稳定；变换

中图分类号：O174.14　　　　文献标识码：A

如果一个多项式的根全部位于复平面的区域 $D$ 内部，则称该多项式是 $D-$稳定的[1]. 特别地，若 $D$ 为复平面左半平面，则称该多项式是 Hurwitz 稳定的，而判断 Hurwitz 稳定的代数判据有 Routh 判据、Hurwitz 判据、Liénard-Chipart 判据等. 若 $D$ 为开单位圆盘，则称该多项式是 Schur 稳定的，常用的判断多项式 Schur 稳定的代数判据是 Jury 判据. 一般地，若多项式 $f(w)$ 是 Hurwitz 稳定的，则记 $f(w)\in H[f]$. 若多项式 $f(z)$ 是 Schur 稳定的，则记 $f(z)\in S[f]$. 实际应用中，通常采用双线性变换将单位圆盘映射到左半平面，将 $n$ 次多项式 $f(z)$ 的 Schur 稳定性的判定转化为多项式 $f((w+1)/(w-1))\cdot(w-1)^n$ 的 Hurwitz 稳定性的判定[2]. 也即，若记

$$g(w)=f(\frac{w+1}{w-1})(w-1)^n,$$

则 $f(z)\in S[f]\rightleftharpoons g(w)\in H[g]$. 让我们通过一个实例来说明双线性变换的缺陷.

考虑多项式

$$f(z)=z^3-1.21z^2-0.20z+0.41, \tag{1}$$

利用双线性变换：

$$z=(w+1)/(w-1), \tag{2}$$

代入 $f(z)$，整理得到：

$$g(w)=f(\frac{w+1}{w-1})(w-1)^3=0.76w^2+5.64w+1.6,$$

计算得到它的 2 个根分别为：

$$w_1\approx-0.295\,450\,565\,2,\ w_2\approx-7.125\,602\,066.$$

由此，$g(w)\in H[g]$，进一步 $f(z)\in S[f]$. 事实上，由于多项式 $f(z)$ 有根 $z=1$，显然 $f(z)\notin S[f]$. 因此，在使用双线性变换(2)时必须保证 $f(1)\neq 0$. 这一点在相关文献中并没有很好地强调.

## 1 一个新的变换

给定多项式：

$$f(z)=\sum_{i=0}^{n}a_iz^{n-i}(a_i\in R;i=0,1,2,\cdots,n;a_0\neq 0),$$

引进变换：

$$z=(1+w+w^2)/(1-w+w^2), \tag{3}$$

变换以后多项式为：

$$g_0(w)=g(w)/(1-w+w^2)^n.$$

收稿日期：2007-10-08.　　　宁波大学学报（理工版）网址：http://3xb.nbu.edu.cn
作者简介：解烈军（1974－），男，浙江余姚人，硕士/讲师，主要研究方向：计算机代数与符号计算. E-mail: xieliejun@nbu.edu.cn

其中，$g(w)=b_0w^{2m}+b_1w^{2m-1}+\cdots+b_{2m}$，而 $b_i\in R$，$m\le n$.

令 $w=x+iy$，于是有：

$$|z|^2=\frac{|1+w+w^2|^2}{|1-w+w^2|^2}=\frac{(1+x+x^2-y^2)^2+(2xy+y)^2}{(1-x+x^2-y^2)^2+(2xy-y)^2},\tag{4}$$

又令

$$g(x,y)=[(1+x+x^2-y^2)^2+(2xy+y)^2]-[(1-x+x^2-y^2)^2+(2xy-y)^2],\tag{5}$$

化简后得到：

$$g(x,y)=4x(x^2+y^2+1).\tag{6}$$

由(4)～(6)式，不难得到结论：

(1) $|z|<1\rightleftharpoons g(x,y)<0\rightleftharpoons x<0\rightleftharpoons w$ 处于复平面左半平面.

(2) $|z|=1\rightleftharpoons g(x,y)=0\rightleftharpoons x=0\rightleftharpoons w$ 处于复平面虚轴.

(3) $|z|>1\rightleftharpoons g(x,y)>0\rightleftharpoons x>0\rightleftharpoons w$ 处于复平面右半平面.

经过上面分析，给出本节主要结果：

**定理 1**　变换(3)具有性质：将单位圆盘映射到复平面虚轴；单位圆盘内部映射到复平面左半平面；单位圆盘外部映射到复平面右半平面. 反之亦真.

**定理 2**　$f(z)$ 和 $g(w)$ 定义如前.

$$f(z)\in S[f]\rightleftharpoons g(w)\in H[g].$$

现在重新考虑本文开始提出的问题. 利用变换(3)，得到 $g(w)=0.76w^5+5.64w^4+3.12w^3+5.64\cdot w^2+0.76w$，显然，$g(0)=0$，因此，$g(w)\notin H[g]$，根据定理 2，$f(z)\notin S[f]$.

这里再给出几个实例来验证我们提出的新变换.

**实例 1**　$f(z)=z^2-0.05z+1.21$.

使用双线性变换(2)，得到：$g(w)=2.16w^2-0.42w+2.26\notin H[g]$，从而 $f(z)\notin S[f]$. 再用变换(3)，得到：

$$g(w)=2.16w^4-0.42w^3+6.58w^2-0.42w+2.16,$$

借助代数判据，$g(w)\notin H[g]$，因此，$f(z)\notin S[f]$.

**实例 2**　$f(z)=z^4+0.338z^3+0.280\,06z^2+0.080\,003\,8z+0.005\,902\,36$.

使用变换(2)，得到：

$$g(w)=1.703\,966\,16w^4+4.492\,382\,96w^3+5.475\,294\,16w^2+3.460\,398\,16w+0.867\,958\,56\in H[g],$$

从而 $f(z)\in S[f]$. 用变换(3)，得到：

$$g(w)=1.703\,966\,16w^8+4.492\,382\,96w^7+12.291\,158\,80w^6+16.937\,547\,04w^5+22.042\,343\,84w^4+16.937\,547\,04w^3+12.291\,158\,80w^2+4.492\,382\,96w+1.703\,966\,16,$$

$g(w)\in H[g]$，根据定理 2，$f(z)\in S[f]$.

## 2　多项式 Hurwitz 稳定的充要条件

### 2.1　实根个数的判定

给定一个实系数多项式：

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^{n-i},\ a_0\ne 0.$$

**定义 1**[3-5]　将

$$\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & & \\
 & na_0 & (n-1)a_1 & \cdots & a_{n-1} & & & \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & & \\
 & 0 & na_0 & \cdots & 2a_{n-2} & a_{n-1} & & \\
 & & & \cdots & \cdots & & & \\
 & & & \cdots & \cdots & & & \\
 & & & & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\ a_n \\
 & & & & 0 & na_0 & (n-1)a_1 & \cdots\ a_{n-1} \\
 & & & & & a_0 & a_1 & a_2\ \cdots\ a_n
\end{pmatrix},$$

叫做 $f(x)$ 的判别矩阵，记作 $Discr(f)$.

**定义 2**[3,4]　用 $D_k$ 记判别矩阵 $Discr(f)$ 的前 $2k$ 行和前 $2k$ 列构成的行列式，即判别矩阵的各偶阶主子行列式 $(k=1,2,\cdots,n)$，将 $n$ 个偶阶主子行列式的有序组 $\{D_1,D_2,\cdots,D_n\}$ 称为多项式 $f(x)$ 的判别式序列，也可更确定地记之为 $\{D_1(f),D_2(f),\cdots,D_n(f)\}$.

**定义 3**[3,4]　将 $[\mathrm{sign}(D_1),\mathrm{sign}(D_2),\cdots,\mathrm{sign}(D_n)]$ 叫

做判别式序列$\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$的符号表.

定义 **4**[3,4] 给定 1 个符号表$[s_1, s_2, \cdots, s_n]$，按如下方式可以构造1个新表$[t_1, t_2, \cdots, t_n]$称之为符号修订表.

(1) 若$[s_i, s_{i+1}, \cdots, s_{i+j}]$是所给表中的一段，它满足$s_i \neq 0, s_{i+1} = \cdots = s_{i+j-1} = 0, s_{i+j} \neq 0$，则将其中全为 0 的这一段$[s_{i+1}, s_{i+2}, \cdots, s_{i+j-1}]$代之以$[-s_i, -s_i, s_i, s_i, -s_i, -s_i, s_i, s_i, \cdots]$.

(2) 除此以外，令$t_k = s_k$，即其他项保持不动.

定义 **5**[4,5] 用$\{d_1, d_2, \cdots, d_{2n+1}\}$记作多项式$Discr(f)$的主子式序列，称$\{d_1d_2, d_2d_3, \cdots, d_{2n}d_{2n+1}\}$为多项式$f(x)$的负根判别序列，记作$n.r.d.(f)$.

定义 **6**[7] 设$L:[a_1, a_2, \cdots, a_n]$为一列不含 0 的实数序列，它的变号数定义为以下序列中负元素的个数：$[a_ia_{i+1} \mid i = 1, 2, \cdots, n-1]$.

引理 **1**[3,4] 如果多项式$f(x)$的判别式序列$\{D_1(f), D_2(f), \cdots, D_n(f)\}$的符号修订表的变号数为$\mu$，且其符号修订表中非零项的数目为$l$，则$f(x)$有$l-2\mu$个不同的实根.

引理 **2**[4,5] 给定多项式$f(x)$，且$f(0) \neq 0$，记$f(x)$的负根判别序列$n.r.d.(f)$的符号修订表的变号数与非零项的个数分别为$\mu$和$2m$，则$f(x)$的不同负根个数为$m-\mu$.

### 2.2 充要条件

不失一般性，假设实系数多项式：

$$f(w) = w^n + a_1w^{n-1} + \cdots + a_n$$

是首一的，将它写成形式：

$$f(w) = f(x+iy) = f_1(x, y) + if_2(x, y),$$

其中$f_1(x, y)$和$f_2(x, y)$都是关于$x, y$的实系数多项式，把它们看作$y$的多项式，表示如下：

$$f_1(x, y) = \alpha_0y^k + \alpha_1y^{k-1} + \cdots + \alpha_k,$$

$$f_2(x, y) = \beta_0y^m + \beta_1y^{m-1} + \cdots + \beta_m,$$

其中，$k, m \leq n$，且$k+m = 2n-1$，而$\alpha_i, \beta_j (i = 1, 2, \cdots, k; j = 1, 2, \cdots, m)$都是关于$x$的实系数多项式. 不难验证$\alpha_0$和$\beta_0$的变化规律见表 1.

记

表 1 $\alpha_0$、$\beta_0$随$n$的变化规律

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha_0$ | $-1$ | $-a_1-3x$ | 1 | $a_1+5x$ |
| $\beta_0$ | $a_1+2x$ | $-1$ | $-a_1-4x$ | 1 |
| $n$ | 6 | 7 | 8 | $\cdots$ |
| $\alpha_0$ | 1 | $-a_1-7x$ | 1 | $\cdots$ |
| $\beta_0$ | $a_1+6x$ | $-1$ | $-a_1-8x$ | $\cdots$ |

$$res(f_1, f_2, y) = \begin{vmatrix} \alpha_0\ \alpha_1 \cdots \alpha_k & & \\ & \alpha_0\ \alpha_1 \cdots \alpha_k & \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ & & \alpha_0\ \alpha_1 \cdots \alpha_k \\ \beta_0\ \beta_1 \cdots \beta_m & & \\ & \beta_0\ \beta_1 \cdots \beta_m & \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ & & \beta_0\ \beta_1 \cdots \beta_m \end{vmatrix}_{(2n-1)\times(2n-1)},$$

它是多项式$f_1(x, y)$和$f_2(x, y)$关于变元$y$的结式，为一个含变元$x$的多项式. 根据代数学经典结果[6]我们有：

引理 **3** $res(f_1, f_2, y) = 0$当且仅当$\alpha_0 = \beta_0 = 0$或者$f_1(x, y)$和$f_2(x, y)$有公共根.

把多项式方程组$\{f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0\}$记为PS(Polynomials System). PS的解集中不同$x$值的集合记为$Zero_x(PS)$, $Zero(res(f_1, f_2, y))$表示多项式$res(f_1, f_2, y)$的不同实零点集. 记$gcd(\alpha_0, \beta_0)$为多项式$\alpha_0$和$\beta_0$的最大公因子，结合引理 3，可得：

引理 **4** $Zero_x(PS) \cup Zero(gcd(\alpha_0, \beta_0)) = Zero(res(f_1, f_2, y))$.

引理 4 告诉我们，一般情况下，2 个二元多项式$f_1(x, y)$和$f_2(x, y)$经过结式消元消去$y$后会产生“增根”，这些“增根”是导系数的最大公因子的零点. 由表 1 中$\alpha_0$和$\beta_0$的变化规律可看出，$gcd(\alpha_0, \beta_0) = 1$. 于是进一步得到：

引理 **5** $Zero_x(PS) = Zero(res(f_1, f_2, y))$.

定理 **3** 多项式$f(w), res(f_1, f_2, y)$定义如前. $f(w) \in H[f] \rightleftharpoons l = m \neq 0$，其中$l$和$m$分别是$res(f_1, f_2, y)$相异实根个数和相异负根个数.

证明　注意到 $l=m\neq 0$ 实际上意味着多项式 $res(f_1, f_2, y)$ 实根全是负的，结合引理 5，不难得到结论. 证毕.

2.3　算法及数值实例

根据上面讨论，这里给出判定多项式 $f(w)$ 是 Hurwitz 稳定的算法.

第 1 步：输入首一多项式 $f(w)$，用变换 $w=x+iy$ 计算得到 $f_1(x, y)$ 和 $f_2(x, y)$；

第 2 步：计算 $f_1(x, y)$ 和 $f_2(x, y)$ 的结式多项式 $res(f_1, f_2, y)$；利用引理 1 计算得到 $res(f_1, f_2, y)$ 的相异实根个数 $l$；利用引理 2 计算得到 $res(f_1, f_2, y)$ 的相异负根个数 $m$；

第 3 步：根据定理 1 得到结论.

上述算法已经用计算机代数系统 Maple 9.5 实现，下面举几个实例.

**实例 3**　$f(w):=w^3-w+1$, $l=2$, $m=1$. 因此，$f(w)\notin H[f]$.

**实例 4**　$f(w)=2.16w^4-0.42w^3+6.58w^2-0.42\cdot w+2.16$.

这是例 1 中出现的多项式，用上面给出的算法计算得到 $res(f_1, f_2, y)$ (16 次多项式，限于篇幅，不再赘述，下同)，$l=2, m=0$，因此 $f(w)\notin H[f]$.

**实例 5**　$f(w)=1.703\,966\,16w^8+4.492\,382\,96\cdot w^7+12.291\,158\,80w^6+16.937\,547\,04w^5+22.042\,343\,84w^4+16.937\,547\,04w^3+12.291\,158\,80w^2+4.492\,382\,96w+1.703\,966\,16$.

这是例 2 中出现的多项式，此处 $res(f_1, f_2, y)$ 是 64 次多项式. 而 $l=m=2$，因此 $f(w)\in H[f]$.

参考文献:


[1] Barmish B R. New tools for robustness of linear systems[M]. New York: Macmillan Publishing Company, 1994.

[2] Gantmacher F R. The theory of matrices[M]. New York: Chelsea, 1959.

[3] Yang L, Hou X R, Zeng Z B. A complete discrimination system for polynomials[J]. Sci China E, 1996, 39(6):628-646.

[4] Yang L. Recent advances on determining the number of real roots of parametric polynomials[J]. J Symbolic Computation, 1999, 28:225-242.

[5] Yang L, Xia B C. An explicit criterion to determine the number of roots in an interval of a polynomial[J]. Progress in Natural Science, 2000, 10(12):897-910.

[6] Waerden Vander B L. Algebra[M]. New York: Springer Verlag, 1956.

[7] 王东明, 夏壁灿. 计算机代数[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.


# Some Notes on Polynomial Stability


XIE Lie-jun

( Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China )



**Abstract:** In classic polynomial stability theory, determining Schur stability of $f(z)$ can be translated into observing the Hurwitz stability for $f((w+1)/(w-1))(w-1)^n$ through a bilinear transformation. In this paper, some notes are taken for the purpose of identifying the weaknesses found in the commonly used bilinear transformation, in which a substitute transform is proposed, and consequently a necessary and sufficient condition is introduced.



**Key words:** polynomials; Schur stability; Hurwitz stability; transform

**CLC number:** O174.14　　**Document code:** A

（责任编辑　史小丽）