文章编号:1001-5132（2008）03-0346-04

一类非线性差分方程解的稳定性及振动性

刘明华

（宁波大学 科学技术学院，浙江 宁波 315211）

摘要：研究非线性差分方程 $x_{n+1}=(x_nx_{n-1}+a)/(x_n+x_{n-1}+b), (n\geq 0\ ;a,b\in[0,\infty)\ ;x_0,x_{-1}\in(0,\infty))$ 解的稳定性及振动性，得到该差分方程存在唯一非负平衡解 $\bar{x}$，且 $\bar{x}$ 为全局渐近稳定的，同时根据 a 和 b 是否为 0，分别研究了解关于 $\bar{x}$ 的振动性，得到该差分方程任意解，下述结论之一成立：(1)当 $n>0$ 时，x_n 单调减收敛于 $\bar{x}$；(2)当 $n>0$ 时，$x_n\equiv\bar{x}$；(3)解关于 $\bar{x}$ 严格振动，可能除第 1 个半环外，每个负半环的长为 2，且每个正半环的长为 1.

关键词：平衡解；稳定性；振动性

中图分类号：O175 文献标识码：A

微分方程在几何学、力学、天文学电子技术、现代生物学、人工神经网络动力学科等领域中有着广泛的应用，但生产实际和科学研究中遇到的微分方程往往很复杂，在很多情况下都无法给出解析表达式，因此其离散化后所得的差分方程往往更有应用价值. 随着电子计算机技术的迅速发展及应用，使得信息科学、工程控制、生物数学等领域所研究和处理的许多重要问题，都是由差分方程来描述的数学模型，差分方程理论，现已成为科学工作者从事科学研究的必不可少的工具.

目前，微分差分方程的理论研究主要涉及稳定性理论、定性理论和分支理论等内容；近年来研究内容不断细化，涌现了不少新的分支，如稳定性和有界性理论、振动性理论、渐近性理论、周期性和概周期性理论等.

文献[1]中，Ladas G 教授主要探讨了如下差分方程：

$$x_{n+1}=\frac{x_n+x_{n-1}x_{n-2}}{x_nx_{n-1}+x_{n-2}}, (n>0, x_{-2}, x_{-1}, x_0\in(0,+\infty)) \tag{1}$$

的全局渐近稳定性.

Nesemann Tim 在文献[2]中运用文献[3]的方法，研究了差分方程：

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}+x_nx_{n-2}}{x_nx_{n-1}+x_{n-2}}, (n>0, x_{-2}, x_{-1}, x_0\in(0,+\infty)) \tag{2}$$

的全局渐近稳定性.

文献[4]先是获得了方程(1)的全局渐近稳定性的一个普遍结果. 又在文献[5]中获得了方程：

$$x_{n+1}=\frac{x_nx_{n-1}+x_{n-2}+a}{x_{n-1}+x_nx_{n-2}+a},$$
$$(n>0, x_{-2}, x_{-1}, x_0\in(0,+\infty), a\geq 0) \tag{3}$$

的正平衡解全局渐近稳定性的一个充分条件.

受以上结果启发，本文考虑有理差分方程：

$$x_{n+1}=\frac{x_nx_{n-1}+a}{x_n+x_{n-1}+b},$$

收稿日期：2007-12-22. 宁波大学学报（理工版）网址：http://3xb.nbu.edu.cn
作者简介：刘明华（1956－），女，山东莱州人，副教授，主要研究方向：应用数学. E-mail: liumh861@tom.com

$$(n \geq 0, a, b \in [0, \infty), x_0, x_{-1} \in (0, \infty)) \qquad (4)$$

解的稳定性及振动性.

1　基本性质及稳定性

引理 **1**　x_n, x_{n-1} 在方程(4)中具有对称性.

引理 **2**　差分方程(4)存在唯一非负平衡解 $\overline{x}$.

证明　由式(4)得特征方程为 $g(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda - a = 0$，由 $g(0) \leq 0$ 及对称轴 $-b/2 \leq 0$ 得特征方程存在唯一非负实根 $\overline{x}$.

引理 **3**　设 $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ 为差分方程(4)的任意解,则对任意整数 $n \geq 1$，

$$x_n - \overline{x} = \frac{(x_{n-1} - \overline{x})(x_{n-2} - \overline{x})}{x_{n-1} + x_{n-2} + b} .$$

证明　由 $x_n - \overline{x} = ((x_{n-1} - \overline{x})(x_{n-2} - \overline{x}) - (\overline{x}^2 + b\overline{x} - a))/(x_{n-1} + x_{n-2} + b)$ 及 $\overline{x}$ 为特征方程的根,得结论成立.

定理 **1**　差分方程(4)的平衡解 $\overline{x}$ 为局部渐近稳定的.

证明　如果 $2\overline{x} + b \neq 0$，将方程(4)在 $\overline{x}$ 处线性化得：

$$p_i = f_i'(\overline{x}, \overline{x}) = \frac{\overline{x}^2 + b\overline{x} - a}{(2\overline{x} + b)^2} = 0, (i = 1, 2) .$$

如果 $2\overline{x} + b = 0$，则 $a = b = \overline{x} = 0$. 此时，补充定义 $f(0, 0) = 0$，可得 $p_i = 0\ (i = 1, 2)$. 故总有方程(4)在平衡解 $\overline{x}$ 处的线性化方程为： $y_{n+1} = 0y_n + 0y_{n-1}$. 由差分方程解稳定性判定定理得平衡解局部渐近稳定.

2　振动性及全局稳定性

2.1　$a = 0$ 且 $b = 0$

定理 **2**　设 $a = b = 0$，则方程(1)的解，可能除第 1 项 x_{-1} 外，单调减收敛于 $\overline{x} = 0$，且全局渐近稳定.

证明　不妨设 $0 < x_0 \leq x_{-1}$. 假设已经得到 $0 < x_{n+1} < x_n, n = 0, 1, 2, \cdots, m$ ，当 $n = m + 1$ 时，由 $0 < x_{m+2} = (x_{m+1}x_m)/(x_{m+1} + x_m) < x_{m+1}$ 得方程(4)的解单调减，且收敛于 0. 定理 2 成立.

当 $0 < x_{-1} < x_0$ 时，由引理 1 及上述证明得 $0 < x_1 < x_0$，故当 $n > -1$ 时， $0 < x_{n+1} < x_n$. 定理 2 也成立. 故方程(4)的解全局渐近稳定.

2.2　$a = 0$ 且 $b > 0$

定理 **3**　当 $a = 0$ 且 $b > 0$ 时，方程(4)的解是全局渐近稳定的.

证明　由于

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1}}{x_n + x_{n-1} + b} = \frac{x_n\left(x_n + x_{n-1} + b\right) - x_n^{\ 2} - bx_n}{x_n + x_{n-1} + b} = x_n - \frac{x_n^{\ 2} + bx_n}{x_n + x_{n-1} + b} .$$

因为 $x_n > \overline{x} = 0$，则 $(x_n^{\ 2} + bx_n)/(x_n + x_{n-1} + b) > 0$，所以 $x_{n+1} < x_n$. 从而式(4)的解当 $n \geq 0$ 时单调减收敛于 $\overline{x}$. 故差分方程(4)的解全局渐近稳定.

2.3　$a > 0$ 且 $b = 0$

作变量替换 $x_n = \sqrt{a}y_n$，则式(4)化为方程：

$$y_{n+1} = \frac{y_n y_{n-1} + 1}{y_n + y_{n-1}}, (n \geq 0, y_0, y_{-1} \in (0, \infty)) . \qquad (5)$$

为了记号方便,下文中关于此方程仍把 y 记成 x . 易见，方程(5)的特征方程为 $x^2 = 1$，即有唯一的正平衡点 $\overline{x} = 1$.

定理 **4**　当 $a > 0$ 且 $b = 0$ 时，式(5)的解是全局渐近稳定的.

为了证明定理 4，需要以下引理.

引理 **4**　设式(5)的解为 $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$，则该解最终为 1 当且仅当 $(x_{-1} - 1)(x_0 - 1) = 0$.

证明　当 $(x_{-1} - 1)(x_0 - 1) = 0$ 时, 则 $x_1 = 1, x_2 = 1$ 且 $x_n = 1, (n \geq 1)$，即解最终为 1.

反设解最终为 1, 且 $(x_{-1} - 1)(x_0 - 1) = 0$ 不成立, 不妨设存在最小整数 $n \geq 1$, 使得 $x_n = 1$, 则由 $x_n = (x_{n-2}x_{n-1} + 1)/(x_{n-2} + x_{n-1}) = 1$，得 $(x_{n-1} - 1)(x_{n-2} - 1) = 0$，即 $x_{n-1} = 1$ 或 $x_{n-2} = 1$. 与 n 的取法矛盾. 引理 4 成立.

引理 **5**　设式(5)的解 $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ 最终不为 1， 那么下列结论成立：

(1) $(x_{n+1}-x_n)(x_n-1)<0$，$n\geq 0$.

(2) $(x_{n+1}-1)(x_n-1)(x_{n-1}-1)>0$，$n\geq 0$.

证明 由 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1-x_n^2}{x_n+x_{n-1}}$，得结论 1 成立.

由 $x_{n+1}-1=\dfrac{(x_n-1)(x_{n-1}-1)}{x_n+x_{n-1}}$，得结论 2 成立.

引理 **6** 对式(5)的任意解$\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$,下述结论之一成立.

(1) $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$单调减收敛于$\bar{x}$.

(2) $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$的每个负半环,可能除了第1个外,恰好有 2 项，且正半环恰好 1 项.

由引理 5 的结论 2 易得引理 6 成立. 现在证明定理 4.

证明 由定理 1 得,只须证明式(5)的正平衡解$\bar{x}$是全局吸引的即可.

如果式(5)的解$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$是非振动的，那么由引理 6 得此解最终等于 1 或单调减收敛于平衡点$\bar{x}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\bar{x}=1$成立.

如果式(5)的解$\{x_n\}$关于平衡解$\bar{x}$是严格振动的，则由引理 5(2)和引理 6(2)知此解的每个正半环有 1 项，每个负半环，可能除第 1 个外，有 2 项. 设$\{x_p\}$是第 1 个长为 1 的正半环，则$\{x_{p+1},x_{p+2}\}$是负半环，$\{x_{p+3}\}$是正半环，$\{x_{p+4},x_{p+5}\}$是负半环等等. 下列陈述成立：

(a) $\{x_{p+3n}\}_{n=0}^{\infty}$单调减；

(b) $\{x_{p+3n+1},x_{p+3n+2}\}_{n=0}^{\infty}$单调增.

由于$x_{p+3n+1}<1$及引理 5(1)可得$x_{p+3n+1}<x_{p+3n+2}$. 由$x_{p+3n}>1$得：

$$x_{p+3n}=\frac{x_{p+3n-1}x_{p+3n-2}+1}{x_{p+3n-1}+x_{p+3n-2}}=\frac{x_{p+3n-2}^2x_{p+3n-3}+2x_{p+3n-2}+x_{p+3n-3}}{x_{p+3n-2}^2+2x_{p+3n-2}x_{p+3n-3}+1}<\frac{x_{p+3n-2}^2x_{p+3n-3}+2x_{p+3n-2}x_{p+3n-3}^2+x_{p+3n-3}}{x_{p+3n-2}^2+2x_{p+3n-2}x_{p+3n-3}+1}=x_{p+3(n-1)},$$

故结果(a)成立.

由 $x_{p+3n}-1<1$ 及 $x_{p+3n+1}-x_{p+3n-1}=(1-x_{p+3n-1}^2)/(x_{p+3n}+x_{p+3n-1})>1$得$x_{p+3n+1}>x_{p+3n-1}$,故结果(b)成立.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_{p+3n}=N,\lim\limits_{n\to\infty}x_{p+3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{p+3n+2}=M$ 且 $0\leq M\leq 1\leq N$. 对方程(5)对应$n=p+3k-1$及$n=p+3k$的 2 项分别取极限$k\to\infty$得$N=(M^2+1)/2M$及$M=(MN+1)/(M+N)$. 求解得$M=N=1$，即当$a>0$且$b=0$时，方程(5)的解是全局渐近稳定的.

2.4 $a>0$且$b>0$

方程(4)的正平衡点$\bar{x}=(-b+\sqrt{b^2+4a})/2$.

定理 **5** 当$a>0$且$b>0$时，方程(4)的解是全局渐近稳定的.

为了简化此定理的证明，需要下列引理.

引理 **7** 如果方程(4)的解满足$x_{n-1}\geq\bar{x}$且$x_n\geq\bar{x}$，则$\bar{x}\leq x_{n-1}\leq x_n$.

证明 由于

$$x_{n+1}=\frac{x_nx_{n-1}+a}{x_n+x_{n-1}+b}=\frac{x_n\left(x_n+x_{n-1}+b\right)-x_n{}^2-bx_n+a}{x_n+x_{n-1}+b}=x_n-\frac{x_n{}^2+bx_n-a}{x_n+x_{n-1}+b},$$

又因$x_n\geq\bar{x}$，则$\dfrac{x_n{}^2+bx_n-a}{x_n+x_{n-1}+b}>0$，所以$x_{n-1}\leq x_n$.

由引理 3 得$x_{n+1}\geq\bar{x}$. 故引理 7 成立.

引理 **8** 如果方程(4)的解满足$x_n\leq\bar{x}$且$x_{n-1}\leq\bar{x}$，则$\bar{x}\leq x_{n+1}$.

由引理 3 得$\bar{x}\leq x_{n+1}$.

引理 **9** 如果方程(4)的解满足$x_{n-1}\leq\bar{x}\leq x_n$，则$x_{n-1}\leq x_{n+1}\leq\bar{x}$.

证明 由引理 3 得$x_{n+1}-\bar{x}\leq 0$，又因为

$$x_{n+1}-x_{n-1}=\frac{x_nx_{n-1}+a}{x_n+x_{n-1}+b}-x_{n-1}=\frac{-(x_{n-1}{}^2+bx_{n-1}-a)}{x_n+x_{n-1}+b}\geq 0.$$

所以有$x_{n+1}\geq x_{n-1}$. 引理 9 成立.

同理由引理 1 得x_n,x_{n-1}在差分方程(4)中具有对称性. 所以当$x_n\leq\bar{x}\leq x_{n-1}$时，$x_n\leq x_{n+1}\leq\bar{x}$.

现在证明定理 5. 由定理 1 得只须证明方程(4)的任意解$\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$是全局吸引的即可.

如果 $x_0 \geq \bar{x}$ 且 $x_{-1} \geq \bar{x}$，则由引理 7 得，可能除了 x_{-1} 外，解 $\{x_n\}$ 单调递减收敛到 $\bar{x}$.

如果 $x_{-1} = \bar{x}$ 或 $x_0 = \bar{x}$，则由引理 3 得 $x_1 = \bar{x}$. 如此类推得 $x_n = \bar{x}(n \geq 1)$，解收敛于 $\bar{x}$.

如果 $x_0 < \bar{x}$ 且 $x_{-1} < \bar{x}$ 时，由引理 8 得 $\bar{x} < x_1$. 由引理 9 得 $x_0 < x_2 < \bar{x} < x_1$. 由引理 10 得 $x_0 < x_2 < x_3 < \bar{x} < x_1$. 再次用引理 8 得 $x_2 < x_3 < \bar{x} < x_4 < x_1$. 依次类推，可得解关于 $\bar{x}$ 严格振动，每个正半环有 1 项，且每个负半环有 2 项. 同时得到 $\{x_{3k-1}, x_{3k}\}_{k=1}^{\infty}$ 单调增且 $\{x_{3k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ 单调减. 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{3k+1} = N$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{3k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{3k} = M$，对方程(4)对应 $n = 3k$ 及 $n = 3k+1$ 分别取极限得 $N = (M^2 + a)/(2M + b)$ 及 $M = (MN+a)/(M+N+b)$. 求得 $M^2 + bM - a = 0$. 又因为 $M > 0$，则 $M = \bar{x}$. 同理 $N = \bar{x}$. 从而 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \bar{x}$ 成立.

如果 $x_0 < \bar{x}$ 且 $x_{-1} > \bar{x}$，或 $x_{-1} < \bar{x}$ 且 $x_0 > \bar{x}$ 时与上述证明类似，可得 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \bar{x}$ 成立.

参考文献：

[1] Ladas G. Open problems and conjectures[J]. J Differ Equations Appl, 1998, 4(1):95-98.

[2] Nesemann Tim. Positive solution difference equations: Some results and applications[J]. Nonlinear Analysis, 2001, 47:4 707-4 717.

[3] Amleh A M, Kruse N, Ladas G. On a class of difference equations with strong negative feedback[J]. J Differ Equations Appl, 1999, 5(4):497-515.

[4] Li Xianyi, Zhu Deming. Global asymptotic stability of a kind of nonlinear delay difference equation[J]. Appl Math JCU, 2002, 17(2):178-183.

[5] Li Xianyi. Global asymptotic stability in a nonlinear recursive difference equation[J]. Journal of Biomathematics, 2003, 18(1):1-7.

Solution Stability and Oscillation for a Class of Nonlinear Difference Equations

LIU Ming-hua

(College of Science & Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, the stability and oscillation are studied for the given nonlinear difference equation $x_{n+1} = (x_n x_{n-1} + a)/(x_n + x_{n-1} + b), (n \geqslant 0, a, b \in [0, \infty), x_0, x_{-1} \in (0, \infty))$. The only non-negative equilibrium solution $\bar{x}$ is obtained for the difference equation, where $\bar{x}$ is globally asymptotically stable. For the cases where a and b are 0 and non-zero, the oscillation of any solution $\bar{x}$ of the difference equation is explored. In conclusion, one of the following statements is held true. (1) If $n > 0$, then x_n monotonously decreases and converges to $\bar{x}$. (2) If $n > 0$, then $x_n \equiv \bar{x}$. (3) The solution is oscillated by $\bar{x}$. Except the first one, the length of the negative semicircle is 2, and the length of the positive semicircle is 1.

Key words: equilibrium point; stability; oscillation

CLC number: O175　　　　**Document code:** A

（责任编辑　史小丽）