文章编号:1001-5132（2008）04-0533-05

置换因子循环线性系统求解的快速算法

崔　艳，朱　灵，孔　翔

（宁波工程学院 理学院，浙江 宁波 315016）

摘要：给出了一类置换因子循环线性系统求解的一种快速算法. 当置换因子循环矩阵非奇异时，该快速算法可求出该线性系统的唯一解；而当置换因子循环矩阵奇异时，该快速算法可求出该线性系统的通解.

关键词：置换因子循环矩阵；置换因子循环线性系统；快速算法

中图分类号：O151　　　　文献标识码：A

循环矩阵应用非常广泛，以此类矩阵为系数的线性方程组的求解问题在图像信号处理、编码理论、自回归滤波器设计、计算机时序分析、石油勘探等领域会经常出现[1-5]. 由于这些特殊矩阵有许多特殊而良好的性质和结构，对其进行推广并探讨其性质和应用显得很有必要[6-8]. 为求解置换因子循环线性系统的解，特别是探讨其快速算法就是一个重要的研究内容[7]. 本文利用多项式快速算法，给出了置换因子循环线性系统的快速算法，由于该算法仅用到置换因子循环线性系统的某列元素进行计算，在计算机上实现时只有舍入误差，所以该算法在有理数域上计算机输出的结果是精确的；该算法的另一个显著特点是不需要预先知道置换因子循环矩阵的奇异性. 本文的结果推广了文献[6-8]中的相应结果. 在本文中设 M_n 为实数域上的所有 n 阶方阵组成的集合.

定义 **1**[2]　n 阶置换矩阵 P 为基本置换循环矩阵当且仅当 $P^n = I_n$. 其中，I_n 是 n 阶单位阵，n 是满足上式的最小的正整数. 显然，P 是正规阵，且特征多项式和极小多项式都是 $g(x) = x^n - 1$.

定义 **2**[1]　设 P 是满足上式的 n 阶基本置换循环矩阵，对于 M_n 中的矩阵 A，如果满足 $PA = AP$，则称 A 为置换因子循环矩阵. 并用 PCM_n 表示 M_n 中的所有置换因子循环矩阵组成的集合.

定义 3[4]　设 $A, B \in C^{n\times n}$ 有下列 5 个方程：

(1) $ABA = A$；(2) $BAB = B$；(3) $(AB)^* = AB$；

(4) $(BA)^* = BA$；(5) $AB = BA$.

那么称满足方程(1)、(2)、(3)、(4)的矩阵 B 为 A 的 Moore-Penrose 逆，记为 A^+. 称满足(1)、(2)和(5)的矩阵 B 为 A 的群逆，记为 $A^\#$. 满足方程(1)和(2)的且其非零特征值是 A 的非零特征值的倒数的矩阵 B 为 A 的谱逆.

引理 **1**　$A \in PCM_n$ 的充要条件是 $A = h_A(P)$，其中，$h_A(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 是 A 的第 1 行元素 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ 对应于置换阵的重排. I_n 是 n 阶单位阵，规定 $P^0 = I_n$，可称 $h_A(x)$ 为 A 的伴随多项式. 因为 A 取决于 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$，因此记为：

$$A = percirc_P(a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n-1}}) \in PCM_n.$$

引理 **2**[2]　设 $A, B \in PCM_n$，则 $AB = BA \in PCM_n$.

引理 **3**[2]　设 $A \in PCM_n$，若 A 非奇异，则 $A^{-1} \in$

收稿日期：2008-02-20.　　宁波大学学报（理工版）网址：http://3xb.nbu.edu.cn
第一作者：崔　艳（1974－），女，浙江宁波人，硕士，主要研究方向：代数概率论及循环矩阵. E-mail: cuiyan@nbut.cn

PCM_n；若 A 奇异，则 A 的谱逆 A^s 是 A 的群逆 $A^{\#}$，也是 A 的 Moore-Penrose 逆 A^{+}，且它们都是置换因子循环矩阵，$A^s=A^{\#}=A^{+}$.

引理 **4**[2] 设 $A=percirc_P(a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_{n-1}}=h_A(P))$，则 A 非奇异(奇异)充要条件是 $(h_A(x),g(x))=1(\neq 1)$.

引理 **5**[5] 设多项式矩阵 $\begin{pmatrix} h(x) & 1 & 0 \\ g(x) & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 经行初等变换化为 $\begin{pmatrix} d(x) & u(x) & v(x) \\ 0 & s(x) & t(x) \end{pmatrix}$，则 $(h(x),g(x))=d(x)$，且满足 $h(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$.

1 主要结果

考虑置换因子循环线性系统为：

$$AX=b\,, \tag{1}$$

其中，$A=percirc_P(a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_{n-1}})\in PCM_n$, $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $b=(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})^T$.

定理 **1** 置换因子循环线性系统 $AX=b$ 有唯一解的充分必要条件是 A 的伴随多项式 $h_A(x)$ 和特征多项式 $g(x)=x^n-1$ 互素，即 $(h_A(x),g(x))=1$. 当矩阵 $A=percirc_P(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\in PCM_n$ 非奇异时，则存在唯一的置换因子循环矩阵 $C=percirc_P(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})$，使得 $AX=b$ 的唯一解是矩阵 C 的第 1 列.

证明 因为非奇异矩阵 $A=percirc_P(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$，由引理 4 可知(1)式有唯一解的充要条件是 $(h_A(x),g(x))=1$. 由 $b=(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})^T$ 构造置换因子循环矩阵 $B=percirc_P(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})$，于是得到 B 的伴随多项式 $b(x)=\sum_{i=0}^{n-1}b_{j_i}x^i$. 由引理 5 对多项式矩阵：

$$\begin{pmatrix} h_A(x) & 1 & 0 & b(x) \\ g(x) & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

经过一系列行初等变换一定能化为：

$$\begin{pmatrix} 1 & u(x) & v(x) & c(x) \\ 0 & s(x) & t(x) & c_1(x) \end{pmatrix}.$$

于是可得到 $h_A(x)u(x)+g(x)v(x)=1, u(x)b(x)=c(x)$. 在上述式子中令 $x=P$，则 $h_A(P)=A, g(P)=0, b(P)=B$，即有：

$$Au(P)=I_n\,, \tag{2}$$

$$u(P)B=c(P)\,. \tag{3}$$

由(2)式知 $u(p)$ 是 A 的唯一逆. 从而由矩阵相乘的意义和置换因子循环矩阵的特点知置换因子循环矩阵 $C=percirc_P(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})=c(P)=A^{-1}B$ 的第 1 列即为 $A^{-1}b$. 因 $AA^{-1}b=b$，所以 $A^{-1}b$ 是置换因子循环线性系统(1)的解. 又因 A^{-1} 和 B 都是唯一的，所以 $A^{-1}B$ 是唯一的，于是 $A^{-1}b$ 也是唯一的.

定理 **2** 若矩阵 $A=percirc_P(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\in PCM_n$ 奇异，$b=(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})^T$，且 $AX=b$ 有解，则存在唯一的置换因子循环矩阵 $C=percirc_P(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})$ 及 $F=percirc_P(f_0,f_1,\cdots,f_{n-1})$，使得 X_1 是 C 的第 1 列，且是线性系统的特解，并且，

$$X_2=X_1+(I_n-F)Z\,, \tag{4}$$

是线性系统的通解. 其中 Z 是任意的 n 维列向量.

证明 因为矩阵 $A=percirc_P(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\in PCM_n$ 是奇异的，A 伴随多项式为 $h_A(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_ix^i$，$P$ 的特征多项式 $g(x)=x^n-1$.

由引理 4 和引理 5 对多项式矩阵 $\begin{pmatrix} h_A(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$ 经过一系列行初等变换一定能化为 $\begin{pmatrix} d(x) \\ 0 \end{pmatrix}$，其中，$d(x)$ 是 $h_A(x)$ 与 $g(x)$ 不等于 1 的最大公因式.

设 $h_A(x)=d(x)h_1(x), g(x)=d(x)g_1(x)$，则 $(h_1(x),g_1(x))=1$. 因为 $(d(x),g_1(x))=1$ (因 $g(x)=x^n-1$ 无重根)，所以由 $(h_1(x),g_1(x))=1$ 与 $(d(x),g_1(x))=1$，得 $(h_A(x),g_1(x))=(d(x)h_1(x),g_1(x))=1$，又由 $(h(x),g_1(x))=1$ 与 $(d(x),g_1(x))=1$，可得 $(d(x)h_A(x),g_1(x))=1$.

由 $b=(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})^T$ 构造置换因子循环矩阵 $B=percirc_P(b_{j_0},b_{j_1},\cdots,b_{j_{n-1}})$，其中，$b_{j_0},b_{j_1},\cdots,b_{j_{n-1}}$ 是 $b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}$ 的重排，于是得到 B 的伴随多项式 $b(x)=\sum_{i=0}^{n-1}b_{j_i}x^i$. 由引理 5 对多项式矩阵：

$$\begin{pmatrix} h_A(x)d(x) & 1 & 0 & d(x)b(x) & d(x)h_A(x) \\ g_1(x) & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

经过一系列行初等变换一定能化为：

$$\begin{pmatrix} 1 & u(x) & v(x) & c(x) & f(x) \\ 0 & s(x) & t(x) & c_1(x) & f_1(x) \end{pmatrix}.$$

于是，

$$h_A(x)d(x)u(x)+g_1(x)v(x)=1\,, \tag{5}$$

$$d(x)u(x)b(x)=c(x)\,, \tag{6}$$

$$d(x)u(x)h_A(x)=f(x)\,. \tag{7}$$

在(5)式两边同乘以 $h_A(x)$，于是得到：

$$h_A(x)d(x)u(x)h_A(x)+g(x)h_1(x)v(x)=h_A(x)\,. \tag{8}$$

在(6)～(8)式中若令 $x=P$，则 $h_A(P)=A, g(P)=0, b(P)=B$．于是，

$$d(P)u(P)B=c(p)\,, \tag{9}$$

$$d(P)u(P)A=f(P)\,, \tag{10}$$

$$Ad(P)u(P)=A\,. \tag{11}$$

在(5)式两边同乘以 $d(x)u(x)$，并令 $x=P$，得：

$$d(P)u(P)Ad(P)u(P)=d(p)u(P)\,. \tag{12}$$

又因 $h_A(x)d(x)u(x)=d(x)u(x)h_A(x)$，令 $x=P$，即得 $h_A(P)d(P)u(P)=d(P)u(P)h_A(P)$，即：

$$Ad(P)u(P)=d(P)u(P)A\,. \tag{13}$$

由(9)～(11)式及定义 3 可知 $T=d(P)u(P)$ 是矩阵 A 的群逆．又由引理 3 知 $A^+, A^\# \in PCM_n$ 且 $A^\# = A^+ = d(P)u(P)$．令 $C=c(P)=TB=percirc_P(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}), F=f(P)=TA=percirc_P(f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})$．对 $TB=C$，根据矩阵相乘的意义和置换因子循环矩阵 B 的特点可知 C 的第 1 列是 Tb．因为 $AX=b$ 有解，所以 $ATb=b$，这说明 Tb 是线性系统的 1 个解．同时，有 $A[Tb+(I_n-F)Z]=ATb+A(I_n-F)Z=b+AZ-AFZ=b+AZ-ATAZ=b+AZ-AZ=b$（这里 Z 是任意的 n 维列向量)，说明 $X_2=X_1+(I_n-F)Z$ 是线性系统的通解，其中 $X_1=Tb$．因为 A, T 均是置换因子循环矩阵，所以 $AT=TA$，若还存在 1 个置换因子循环矩阵 T_1，使得：

$$AT_1A=A, T_1AT_1=T_1, TA=AT,$$

从而，

$$T=TAT=ET=HT=T_1AT=T_1E=$$
$$T_1H=T_1AT_1=T_1\,.$$

这说明 T 是唯一的．由此也可以得出 $TB=C$，$TA=F$ 也是唯一的，当然 Tb 也唯一．

2　算法和举例

利用定理 1 和 2 可以得到置换因子循环线性系统 $AX=b$ 的一种快速求法，其步骤如下：

步骤 1　由置换因子循环线性系统 $AX=b$ 得到多项式 $h_A(x), g(x), b(x)$．

步骤 2　对于多项式矩阵：

$$\begin{pmatrix} h_A(x) & b(x) \\ g(x) & o \end{pmatrix},$$

经过一系列行初等变换化为：

$$\begin{pmatrix} d(x) & c(x) \\ 0 & c_1(x) \end{pmatrix}.$$

步骤 3　若 $d(x)=1$ 为所给的置换因子循环线性系统 $AX=b$ 有唯一解．对于多项式 $c(x)$ 而言，若令 $x=P$，则可以得到置换因子循环矩阵 $C=c(P)=percirc_P(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})$，于是上述的置换因子循环矩阵线性系统 $AX=b$ 的唯一解是矩阵 C 的第 1 列．

步骤 4　若 $d(x)\neq 1$，则用 $d(x)$ 去除 $g(x)$ 得商式 $g_1(x)$，对于多项式矩阵：

$$\begin{pmatrix} h_A(x)d(x) & d(x)b(x) & d(x)h_A(x) & d(x)h_A(x)b(x) \\ g_1(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

经过一系列行初等变换一定能化为：

$$\begin{pmatrix} 1 & c(x) & f(x) & r(x) \\ 0 & c_1(x) & f_1(x) & r_1(x) \end{pmatrix}.$$

步骤 5　对于多项式 $r(x)$，令 $x=P$，得到 $R=r(P)=AA^\#B$．于是若置换因子循环矩阵 R 的第 1 列是 n 维列向量 b，那么置换因子循环线性系统有解(否则无解)．因此，对多项式 $c(x), f(x)$ 而言，令 $x=P$，则置换因子循环矩阵 $C=c(P)=A^\#B, F=f(P)=A^\#A$．故置换因子循环矩阵 C 的第 1 列是线性系统的唯一特解，并设其为 X_1，且 $X_2=X_1+(I_n-F)Z$ 是线性系统的通解，其中 Z 是任意的 n 维列向量．

例 1 解线性方程组 $AX=b$，其中矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\2&1&-1&3\\-1&3&1&2\\3&-1&2&1\end{pmatrix},$$

$b=(1,0,-1,2)^T$.

解 由于矩阵 A 可以表示成 $A=I_4+3P+2P^2-P^3$，其中，

$$P=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

且 $P^4=I_4$. 所以矩阵 A 是置换因子循环矩阵. 并且 $h_A(x)=1+3x+2x^2-x^3, g(x)=x^4-1, b(x)=-x^3+2x+1$，于是构造多项式矩阵为：

$$A(x)=\begin{pmatrix}h_A(x)&b(x)\\g(x)&o\end{pmatrix},$$

对该矩阵进行行初等变换 $A(x)\longrightarrow\cdots\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix}x+4&-x^5+x^4+x^3-x^2+x+1\\85&\begin{matrix}7x^6-28x^5+13x^4+26x^3-26x^2\\+19x+23\end{matrix}\end{pmatrix},$$

于是，

$$c(x)=\frac{1}{85}(7x^6-28x^5+13x^4+26x^3-26x^2+19x+23),$$

利用 $D^4=I_4$ 得 $C=c(P)$，即：

$$C=\frac{1}{85}\begin{pmatrix}36&-19&-9&26\\-19&36&26&-9\\26&-9&36&-19\\-9&26&-19&36\end{pmatrix},$$

因此， $X=A^{-1}b=(36,-19,26,-9)^T$.

例 2 解线性方程组 $AX=b$，其中矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}-3&2&-2&3\\3&-3&2&-2\\-2&3&-3&2\\2&-2&3&-3\end{pmatrix},$$

$b=(1,0,-1,0)^T$.

解 由于矩阵 A 可以表示成 $A=-3I_4+3P-2P^2+2P^3$，其中，

$$P=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

且 $P^4=I_4$. 所以矩阵 A 是置换因子循环矩阵. 且 $h_A(x)=-3+3x-2x^2+2x^3, g(x)=x^4-1, b(x)=-x^2+1, d(x)=x-1, g_1(x)=1+x+x^2+x^3$. 于是 $h_A(x)d(x)=2x^4-4x^3+5x^2-6x+3, d(x)b(x)=-x^3+x^2+x-1,$ $h_A(x)d(x)b(x)=-2x^6+4x^5-3x^4+2x^3+2x^2-6x+3.$

构造多项式矩阵为：

$$\begin{pmatrix}h_A(x)d(x)&d(x)b(x)&d(x)h_A(x)&d(x)h_A(x)b(x)\\g_1(x)&0&0&0\end{pmatrix},$$

对该矩阵进行行初等变换：

$$\begin{pmatrix}2x^4-4x^3+5x^2-6x+3&-x^3+x^2+x-1&2x^4-4x^3+5x^2-6x+3&h_A(x)d(x)b(x)\\1+x+x^2+x^3&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}-360&\begin{matrix}99x^5+81x^4-180x^3-\\180x^2+81x+99\end{matrix}&y&z\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix},$$

其中，$y=-198x^6+36x^5+27x^4+90x^3+288x^2+54x-297, z=198x^8-36x^7-225x^6-54x^5-261x^4+36x^3+585x^2+54x-297$，所以 $r(x)=-(198x^8-36x^7-225\cdot x^6-54x^5-261x^4+36x^3+585x^2+54x-297)/360$.

于是，

$$R=r(p)=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}.$$

可见，置换因子循环矩阵 R 的第 1 列就是列向量 b. 故所给的置换因子循环线性系统 $AX=b$ 有解. 因为：

$$c(x)=\frac{-1(99x^5+81x^4-180x^3-180x^2+81x+99)}{360},$$

$$f(x)=-(-198x^6+36x^5+27x^4+90x^3+288x^2+54x-297)/360,$$

所以，

$$C=c(P)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$F=f(P)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故置换因子循环矩阵C的第 1 列就是线性系统的唯一特解并设其为 X_1，并且，

$$X_2=X_1+(I_n-F)Z,$$

是线性系统的通解，其中 Z 是任意的 n 维列向量 $Z=(k_1,k_2,k_3,k_4)^T,\forall k_1,k_2,k_3,k_4\in C$.

参考文献：

[1] Stuar J L, Weaver J R. Matrices that commute with a permutation matrix[J]. Linear Algebra Appl, 1991, 150:255-265.

[2] 高殿伟. 广义循环矩阵[J]. 辽宁师范大学学报, 1988(2): 7-11.

[3] Scroggs J E, Odell P L. An alternate definition of a Pseudo-inverse of a matrix[J]. J Soc Ind & Apple Math, 1996, 14:796-810.

[4] 何旭初，孙文瑜. 广义逆矩阵引论[M]. 南京：江苏科技出版社, 1990.

[5] 张小红，蔡秉衡. 高等代数专题研究选编[M]. 西安：陕西科技技术出版社, 1992.

[6] 何承源. *r*-循环线性系统求解的快速算法[J]. 系统科学与数学学报, 2001, 21(2):182-189.

[7] 江兆林. 求置换因子循环矩阵的逆阵及广义逆阵的快速算法[J]. 高等学校计算数学学报，2003，25(3):227-234.

[8] 何承源，罗新建，胡明. 鳞状因子循环矩阵方程解的条件与求解的快速算法[J]. 工程数学学报，2007，24(3): 519-526.

Fast Algorithms for Solving Equation of Permutation Factor Circulant Matrix

CUI Yan, ZHU Ling, KONG Xiang

(Faculty of Science, Ningbo University of Technology, Ningbo 315016, China)

Abstract: A fast Algorithm is presented seeking the solution of the permutation factor circulant matrix equation $AX=b$. It is proved that, when permutation factor circulant matrices are nonsingular, the single solution can be obtained for the permutation factor circulant matrix equation, otherwise the special and the general solution can thus be sought.

Key words: permutation factor circulant matrix; permutation factor circulant matrix equation; fast algorithm

CLC number: O151　　　　**Document code:** A

（责任编辑　章践立）