欧拉公式的另一种证明途径

龚谊承 [1]，柳光明 [2]，李德宜 [1]
1. 武汉科技大学理学院， 武汉（430065）
2. 武汉科技大学计算机学院， 武汉（430065）
E-mail:gyc4298@163.com

摘 要：本文通过构建恰当的辅助函数来利用 Lagrange 微分中值定理从而给出了欧拉公式的一种新的证明方法，其中三个相关复函数的求导方法是利用类比的方式给出的。利用该方法证明，比 Tylor 公式或变上限积分以及其他现有方法更简洁也更易于理解欧拉公式。

关键词：欧拉公式；复函数；导数；类比； Lagrange 中值定理
中图分类号：O186.2

0. 引言

欧拉作为 18 世纪最杰出最多产的大数学家之一，留下了数不胜数的以其名字命名的公式。[1] 本文所关注的欧拉公式------$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，因为沟通了指数函数与三角函数的关系而最为常见[2][3]。关于该公式的证明方法，目前有如下五种：首先，欧拉本人是从数学中的两个重要极限出发，采用初等方法“推导”出这个公式的[4]；其次，较常见的证明方法是利用复指数函数和三角函数的泰勒级数展开来验证[5]；另外，也可以从对数函数的特征性质 $\frac{d\ln x}{dx}=\frac{1}{x}$ 或 $\frac{de^x}{dx}=e^x$ 出发，利用微分方程分离变量积分法来证明[6]；再者，采用变上限积分法也可以验证[4]；最后，还可以从力学观点出发，求出做匀速圆周运动质点的瞬时速度来验证之[4]。

本文的证明思路是：先构造适当的辅助函数 $f(x)=\frac{e^{ix}}{\cos x+i\sin x}$，再利用类比求导法求出 $f'(x)$，然后根据 Lagrange 微分中值定理的一个重要推论“如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数[7][8]”来证明上述欧拉公式。

由于文中的函数涉及到虚数单位 i（其中 $i^2=-1$），所以本文的研究对象是复函数而不是实函数。为此，本文首先说明函数 $f(x)$ 的合理性，接着说明复函数的类比求导法，最后证明欧拉公式。

1 函数 $f(x)$ 的合理性

因为 $|\cos x+i\sin x|=\sqrt{\cos^2 x+\sin^2 x}=1$，所以 $\cos x+i\sin x\neq 0$.

因此，函数 $f(x)=\frac{e^{ix}}{\cos x+i\sin x}$ 是有意义的.

2 类比求导法

本文将利用实函数的求导知识类比出文中相关复函数的导数。

2.1 e^{ix} 的类比求导法

对于复函数 e^{ix}，本文将类比于实函数 e^{rx}（其中 r 为任意一个实常数）来求其导数。

因为在$I=(-\infty,+\infty)$上，处处都有$\frac{de^x}{dx}=e^x$，所以由复合函数的求导法则[8][9]可知，对任意一个实常数r，有$\frac{de^{rx}}{dx}=re^x$.

于是类比之，可以得出在$I=(-\infty,+\infty)$上处处有$\frac{de^{ix}}{dx}=ie^{ix}$.

2.2 $\cos x+i\sin x$的类比求导法

根据标准的微分学知识，求导算子是一个线性运算[7][8]。因此，如果$u(x)$和$v(x)$均在某区间I上可导，r为任意一个实常数，则$u(x)+rv(x)$某区间I上必然可导，且$\frac{d[u(x)+rv(x)]}{dx}=\frac{du(x)}{dx}+r\frac{dv(x)}{dx}$.

类比该性质，可以得出$\frac{d[u(x)+iv(x)]}{dx}=\frac{du(x)}{dx}+i\frac{dv(x)}{dx}$.

又因为在$I=(-\infty,+\infty)$上处处有$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$，$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$

所以可类比得出：在$I=(-\infty,+\infty)$上处处有$\frac{d[\cos x+i\sin x]}{dx}=-\sin x+i\cos x$

2.3 $f(x)$的类比求导法

根据标准的微分学知识，如果$u(x)$和$v(x)$均在某区间I上可导，且$v(x)\neq 0$，则$\frac{u(x)}{v(x)}$在某区间I上必然可导，且$\frac{d[u(x)/v(x)]}{dx}=\frac{v(x)\frac{du(x)}{dx}-u(x)\frac{dv(x)}{dx}}{v^2(x)}$.[8][9]

所以类比之：因为在$I=(-\infty,+\infty)$上处处有e^{ix}和$\cos x+i\sin x$可导，且$\cos x+i\sin x\neq 0$，所以在区间$I=(-\infty,+\infty)$上，$f(x)$处处可导，且

$$f'(x)=\frac{ie^{ix}(\cos x+i\sin x)-e^{ix}(-\sin x+i\cos x)}{(\cos x+i\sin x)^2}$$

$$=\frac{e^{ix}(i\cos x-\sin x+\sin x-i\cos x)}{\cos 2x+i\sin 2x}=0$$

3 欧拉公式的证明

证明：

第一步：构造辅助函数$f(x)=\frac{e^{ix}}{\cos x+i\sin x}$，由1知$f(x)$有意义。

第二步：计算$f'(x)$.

由2.3知道，$f'(x)$在$I=(-\infty,+\infty)$上恒为零.

第三步：$f(x) \equiv 1$，从而欧拉公式成立.

根据 Lagrange 微分中值定理的一个重要推论"如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数[7][8]"，$f(x)$ 在区间 I 上是一个常数。即存在某个常数 c，使得 $\forall x \in I = (-\infty, +\infty)$，都有 $f(x) \equiv c$

又因为 f(0)=1，所以 $c = 1$,从而 $f(x) \equiv 1$，即 e^{ix}=cosx+isinx.

4 结论

本文通过构造适当的辅助函数和类比求导法，结合 Lagrange 微分中值定理的一个重要推论证明了欧拉公式。这种证明方法比其他现有的证明方法更简单，更易于理解。

参考文献

[1] 傅钟鹏. 数学英雄欧拉[M].天津：新蕾出版社,2001.
FU Zhongpeng. Mathematical Hero Euler[M].Tianjin：Xinlei Press,2001.
[2] 杜瑞芝. 数学史辞典[M]. 济南：山东教育出版社,2000.
DU Ruizhi. Dictionary of Mathematical History. Jinan: Shandong Education Press,2000
[3] 华罗庚. 高等数学引论（第一册）[M]. 北京：高等教育出版社,2009.
HUA Luogeng. Introduction to Advanced Mathematics (First Volume) [M].Beijing：Higher education Press,2009
[4] 李劲. 欧拉公式 eix=cosx+isinx 的几种证明及其在高等数学中的应用[J]. 河西学院学报.2008，24（5）:1-6
LI Jing. Several Proof Methods and the Applications in the Advanced Mathematics of the Eulur Formula eix=cosx+isinx [J]. Journal of Hexi University.2008，Vol.24（5）:1-6
[5] 张楚廷. 数学文化[M]. 北京：高等教育出版社，2000.
ZHANG Chuting. Mathematical Culture. [M].Beijing：Higher education Press,2000.
[6] 钟玉泉. 复变函数论（第三版）[M]. 北京：高等教育出版社，2004.
ZHONG Yuquan. Theory of Complex Functions (Third Edtion) [M].Beijing：Higher education Press,2004
[7] 华东师范大学应用数学系. 数学分析（第三版 ,上册） [M]. 北京：高等教育出版社,2004
Mathematical Department of East China Normal University. Mathematical Analysis（Third Edtion,Upper Volume）[M].Beijing：Higher education press,2004
[8] 同济大学应用数学系. 高等数学（第六版 ,上册） [M].北京：高等教育出版社,2007.
Applied Mathematical Department Tongji University . Advanced Mathematics （Sixth Edtion,Upper Volume）[M].Beijing：Higher education press,2007.

Another Way to Proof the Euler Formula

Gong Yicheng[1] , Liu Guangming[2], Li Deyi[1]
1. Science College, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan Hubei (430065)
2. Computer College, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan Hubei (430065)

Abstract
This paper puts up with a new method to proof the Euler formula based on the Lagrange mean-value theorem via constructing a suitable fuction, where the derivatives of the three involving complex functions are analogic to the real fuctions'. The proof is simpler and easier than the known proof methods, such as the Taylor Seriers method and the intgral method etc.
Keywords: Euler Formula; Complex Function;Derivative; Analogy; Lagrange Mean-value Theorem

作者简介：
龚谊承（1975—）， 讲师，主要研究方向是大学数学系统工程及博弈论。