

大学数学典型问题的MATLAB实现方法¹

杨斌¹ 谢海云²

1.昆明理工大学应用技术学院, 云南昆明(650093)

2.昆明理工大学国土资源学院, 云南昆明(650093)

E-mail: (abin109@163.com)

摘要:论文分析了大学数学中的图形图象处理、数值计算、数据分析三类典型问题的教学特点, 并采用 MATLAB 的方法分别举例实现了以上三类典型问题的直观图像及计算结果, 为如何解决理论教学中计算繁琐问题, 增加学习直观性和趣味性及培养学生数学上的应用及创新能力提供了借鉴。

关键词: MATLAB; 图形图象处理; 数值计算; 数据分析; 数学趣味性

中图分类号: O172

1. 前言

大学数学是一门理论性强但又应用广泛的基础学科, 在大学各学科当中, 它的重要性毋庸置疑; 如何教好数学, 是教师们一直探索的问题。可是, 由于该类课程本身就具有较强的逻辑性和抽象性等特点, 在传统的教学中很难体现出学科的趣味性和直观性。所以, 部分学生掌握该类课程还是显得力不从心, 使学生学习数学仍感枯燥和抽象。教学中若能很好地使用 MATLAB 辅助教学, 不但能让枯燥的教学生动有趣, 让抽象的知识尽量直观的体现, 而且也将在很大程度上降低教与学的难度, 缩短数学理论与数学应用之间的距离, 并在培养学生数学应用及创新能力上是个有力的尝试。

2. 大学数学典型问题的MATLAB实现

2.1 图形处理方面

图形课教学(二维或三维图形) 内容抽象, 图形不容易绘出。给教学带来不便。传统教学偏重点通常在逻辑推导上, 但是, 仍然有部分学生由于缺乏空间想象能力, 无法理解空间几何图形的特点, 自然影响到对知识的掌握。若调用 MATLAB 绘图函数, 完成各类图形的绘制, 这将使抽象思维变得实在, 提高教学效果。现就数学中图形问题而论, 举例说明 MATLAB 在教学中的应用。

2.1.1 二维图形绘制

二维平面中的极坐标图形、参数方程图形、空间曲线、图形的变化及多个图形间的相互关系等都是教学的难点, 有直观的图像更有利于提高教学效果。

例1. 绘制二维图形

在平面图形问题教学中, 经常遇到一些平面图形不容易绘出。从表达方式上综合起来可分为:

(1) 由 $y = f(x)$ 形式给出的图形, 如: $y = e^{-x^2}$;

¹本课题得到昆明理工大学校青年基金资助, 项目编号: (2007-077)

通过如下计算实现：

```
clear;fplot('exp(-x^2)',[-3,3]);title(' exp(-x^2)')
```

绘出图形如图 1 所示。从图形中，我们也看出此图是标准正态分布的图形，也可以直观地看出对称性等很多的图像性质，比代数式中分析函数的性质直观许多。

(2) 由极坐标方程 $\rho = \rho(\theta)(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ 给出的图形，如 $y = a \cos(b + n\theta)$ ，并讨论参数 a, b, n 对图形的影响。通过如下计算实现：

```
clear;theta=0:0.1:2*pi;%产生极角向量
for i=1:2
a(i)=input('a=');b(i)=input('b=');n(i)=input('n=');rho(i,:)=a(i)*cos(b(i)+n(i)*theta);%极坐标方程
subplot(1,2,i),polar(theta,rho(i,:));%极坐标系绘图
end (图 2)
```

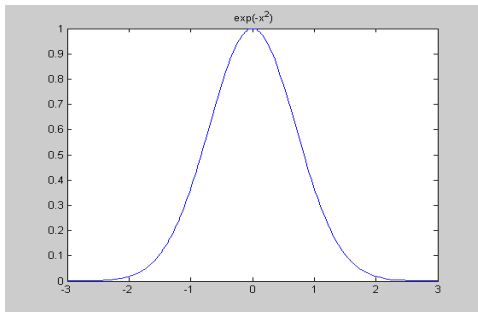


图1 标准正态分布 $y = e^{-x^2}$ 的图像

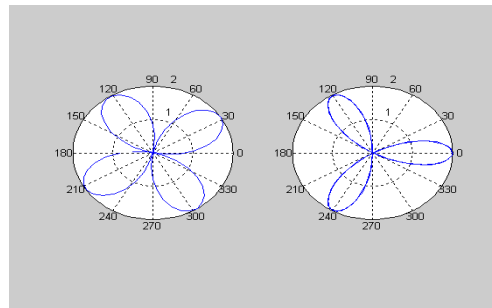


图2 三叶玫瑰线、四叶玫瑰线的图像

通过图形我们看出：随着参数 a, b, n 的改变图形也改变，当 $a=2, b=2, n=2$ 时，是四叶玫瑰线；当 $a=2, b=0, n=3$ 时，是三叶玫瑰线（图2）。

(3) 由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (a \leq t \leq b)$ 给出的图形，如 $\begin{cases} x = 2 \cos(t) - \cos(2t) \\ y = 2 \sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$ ；

通过如下计算实现：

```
clear;t=linspace(0,2*pi,100);x=2*cos(t)-cos(2*t);y=2*sin(t)-sin(2*t);plot(x,y);title('心脏线')
```

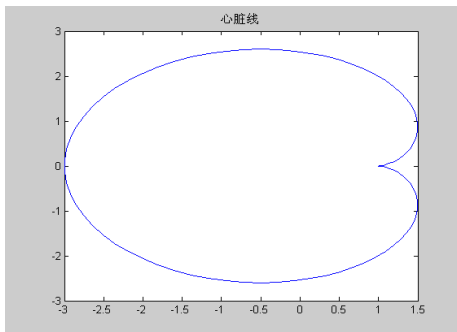


图3 函数 $\begin{cases} x = 2 \cos(t) - \cos(2t) \\ y = 2 \sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$ 图像(心脏线)

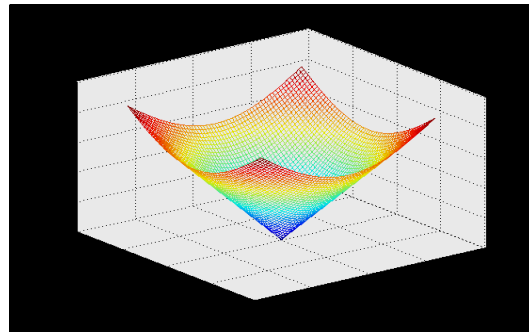


图4 函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的图像(旋转抛物面)

如图 3 所示，图形是一条心脏线，若单纯地看参数方程的代数式，很难理解函数的内涵；

但是，在有图形的直观展现下，学生一目了然，依然比单纯地分析代数式直观许多，通过数形结合的方式，更有利于教学效果的提高。

2.1.2 三维图形绘制

在空间几何图形中，三维图形绘制相当困难(如椭圆抛物面、锥面、马鞍面、双曲面等)，教师的教学通常是把空间图形投影到坐标面上进行间接分析，再通过代数的手段对空间图形的代数方程进行处理来研究它的性态。可是，由于部分学生缺乏空间想象能力，连图像都不知道是什么样的，更别说研究空间图形的性态了。这就使得空间几何更显抽象，教师难教，学生难学，老师也没有其他更加有效的手段使教学更直观。若利用MATLAB函数，能快捷地绘出这些图形，以解决部分学生空间想象能力不足的问题，也使得教学更直观有趣。

例2. (1)画出函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的图形，其中 $(x, y) \in [-3, 3] \times [-3, 3]$ ^[1]

```
clear;x=-3:0.1:3;y=-3:0.1:3;[X,Y]=meshgrid(x,y);z=sqrt(X.^2+Y.^2);mesh(x,y,z)
```

所绘图形为旋转曲面(如图4)，与理论教学中的截痕法相辅相成，数形结合，利于教学。

(2)画出空间曲线 $\begin{cases} z = x^2 - 2y^2 \\ z = 2x - 3y \end{cases}$;

```
clear;[x,y]=meshgrid(-2:0.1:2,-2:0.1:2);z1=x.^2-2*y.^2;z2=2*x-3*y;mesh(x,y,z1);hold;mesh(x,y,z2);r0=(abs(z1-z2)<=0.1);zz=r0.*z1;yy=r0.*y;xx=r0.*x;plot3(xx(r0~=0),yy(r0~=0),zz(r0~=0),'*');colormap(gray),hold off
```

如图5所示，空间曲线在大学理论教学中主要靠空间想象能力，可是，部分学生总是无法想象出曲线的样子，影响到知识的掌握；通过直观的曲线，问题迎刃而解。

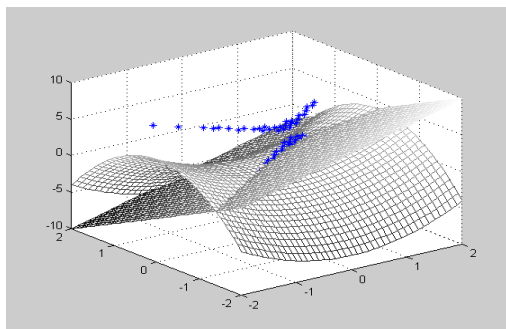


图5 函数 $\begin{cases} z = x^2 - 2y^2 \\ z = 2x - 3y \end{cases}$ 的曲线形状

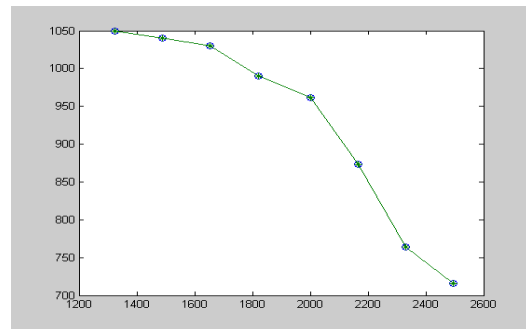


图6 例4中数据在 n=7 时拟合的曲线形状

2.2数值计算方面

数值计算在理论上算法多、公式多、计算量大、实践性强。教学中难免出现从数字到数字，从公式到公式，繁琐、枯燥，缺乏直观性。有大量的数据和计算，用人工计算枯燥、繁琐、容易出错，有时量大，要完成计算几乎是不可能的，而且从数据到数据，从公式到公式，单调乏味，十分影响学习兴趣。运用MATLAB就不同了，学生只要搞清算法设计原理和计算过程，算法实现由计算机来完成。计算轻松愉快，由于算法的结果很容易得到，所以很容易评

判算法的优劣,以便及时改进,加上计算机图形处理的应用,我们可以把算法实现的过程展示出来,使教学过程直观生动,效率更高。

2.2.1 积分计算问题

例3. (1)计算不定积分 $\int \sin ax \times \sin bx \times \sin cx dx$ ^[2]

要计算这个不定积分,理论上相当困难,可是,利用MATLAB数值计算相关命令:

```
clear;syms x y a b c
y=sin(a*x)*sin(b*x)*sin(c*x);int(y,x);pretty(ans)
```

得到结果:

$$-\frac{\cos((c+a-b)x)}{4(c+a-b)} + \frac{\cos((-c+a-b)x)}{4(-c+a-b)} + \frac{\cos((c+a+b)x)}{4(c+a+b)} - \frac{\cos((-c+a+b)x)}{4(-c+a+b)}, \text{ 显}$$

然,该结果比较复杂,要推导出来不太容易,但是,软件实现就很轻松。

(2) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$

```
clear;
syms x
limit((cos(x)-exp(-x^2/2))/(x^2*(x+log(1-x))),x,0)
```

该极限理论教学中用Taylor展开可以计算,但计算量大且较为复杂,通过程序计算出结果:ans=1/6;显然,MATLAB的数值计算对知识起到了强大计算功能和验证性作用。

2.2.2 曲线拟合问题

例4.某风机性能测试数据如下,使用最小二乘法进行曲线拟合,并绘制曲线图^[3]。

流量t	1323	1489	1654	1820	2000	2166	2331	2496
风压f	1049	1040	1030	990	961	873	764	716

仅8个数据,但用传统方法教学至少要用两节课,而且从数据计算到数据计算,枯燥、繁琐不直观。程序及结果如下:

```
clear;t=[1323,1489,1654,1820,2000,2166,2331,2496];f=[1049,1040,1030,990,961,873,764,716];n=input('n=7');[p,s]=polyfit(t,f,n);pause;
y=polyval(p,t1);plot(t,f,'o',t,y,'-*')
```

改用MATLAB以后,在计算机上十分钟就可轻松解决问题,由于能够在计算机屏幕上看到拟合效果(见图6),所以直观、生动,而且可以在比较中选择最优解。

2.2.3 矩阵代数问题

在矩阵代数部分,有的知识点需要进行大量地、机械地数值运算,如行列式的计算、矩阵的乘方、矩阵求逆、秩、特征值、特征向量、解线性方程组、以及微分方程等。这些理论知识比较抽象,推导都比较复杂,计算量都比较大,老师往往把大量的时间和精力都放在理论的分析 and 计算上,在实际运用中计算量大,不易计算出结果。但是,通过MATLAB计算,轻易得到正确的结果,便于我们对理论学习的验证。

例5. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵、秩、特征向量及 $A^{1.25}$, $|A|$ 。

通过如下计算实现:

```
A=[1,0,1;2,1,0;-3,2,-5];inv(A)%计算出矩阵的逆
```

```
ans =
```

```
-2.5000    1.0000   -0.5000
  5.0000   -1.0000    1.0000
  3.5000   -1.0000    0.5000
```

```
>> rank(A) %计算出矩阵的秩
```

```
ans =3
```

```
>> [v,d]=eig(A)
```

```
v = (计算出矩阵的特征向量)
```

```
  0.1853    0.4444    0.2767
 -0.0701   -0.6867    0.9473
 -0.9802   -0.5752    0.1617
```

```
d = (计算出矩阵的特征值)
```

```
-4.2899         0         0
         0   -0.2943         0
         0         0    1.5842
```

```
>> A^1.25 (计算出矩阵的1.25次方结果)
```

```
ans =
```

```
  1.1939 + 0.5743i   -0.0090 - 0.3312i   1.0516 + 0.9575i
  2.0491 - 0.0720i   1.1803 + 0.0775i   -0.0090 - 0.3312i
 -3.1729 - 3.5348i   2.1032 + 1.9150i   -5.1158 - 5.1707i
```

```
>> det(A) (计算出矩阵的行列式的值)
```

```
ans = 2
```

当然, MATLAB关于大学数学数值计算方面的应用还有很多, 这里不再一一介绍. 在高等数学的计算中应用MATLAB, 一是解决大家在学习高等数学时出现的繁琐计算问题, 增加数学学习的趣味性, 使学生能够学以致用, 解决学生所感到的数学基础学习与实际计算应用相脱节的问题; 二是让学生提前介入工程软件的学习, 为以后的专业学习打下一定的基础. 这时可在掌握了理论的基础上调用MATLAB中相应的函数完成数据计算, 能达到事半功倍的效果^[4]。

2.3 数据分析方面

在最优化方面, 如求线性规划、非线性规划和多目标规划等问题; 概率论与数理统计部分, 如求概率分布、方差分析、回归分析等. 这些都需对大量数据进行计算或其它处理. 调用MATLAB中的相关计算函数, 将抛开手工计算大量枯燥数据, 使学生真正体会到数学在实际应用中的奇妙作用, 提高学生学习数学的兴趣。

2.3.1 假设检验

例6. 某种元件, 要求使用寿命不得低于1000小时, 现在随机的从这批元件中抽取25件,

测的其寿命分别为：

906.7 783.4 962.5 978.8 835.4 1068.9 946.2 982.7 967.5 931.3 102.3 891.2 1168.3
936.4 961.4 1056.7 955.9 940.4 866.8 979.4 816.4 1021.4 1112.4 880.8;

已知这种元件的寿命服从标准差 $\sigma = 100$ 的正态分布，试在 $\alpha = 0.05$ 的显著水平下确定这批元件是否合格。

程序及结果如下：

```
clear; X=[906.7 783.4 962.5 978.8 835.4 1068.9 946.2 982.7 967.5 931.3 102.3
891.2 1168.3 936.4 961.4 1056.7 955.9 940.4 866.8 979.4 816.4 1021.4 1112.4
880.8];
sigma=100;M=1000;alpha=0.05;tail=-1;[h,p,ci,zval]=ztest(X,M,sigma,alpha,tail)
h =1
p =3.5354e-005
ci =-Inf 952.4588
zval =-3.9739
```

通过计算可以看出（计算源程序见附录），这里备择假设为“这批元件寿命的均值小于1000”，那么假设就是“这批元件寿命的均值大于1000”，根据计算的结果这个假设是不能接受的，所以，这批元件在显著水平 $\alpha = 0.05$ 的情况下是不合格的。这样，我们通过备择假设实现了单边的假设检验。同时，运用该结果可以去验证理论课程上推导的假设检验结果，可以发现，MATLAB计算的确具有快捷准确的优点。

2.3.2 双因素方差分析

例7：火箭使用四种燃料,三种推进器作射程试验。每种燃料与每种推进器的组合各发射火箭两次,得射程如下(表1,以海里计)^[5]:

表1 火箭的射程数据

推进器 (B)	B1	B2	B3
A1	58.2	52.6	65.3
	56.2	41.2	60.8
A2	49.1	54.1	51.6
	42.8	50.5	48.4
A3	60.1	70.9	39.2
	58.3	73.2	40.7
A4	75.8	58.2	48.7
	71.5	51.0	41.4

表2 双因素方差分析表数据

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	261.68	3	87.225	4.42	0.026
Rows	370.98	2	185.49	9.39	0.0035
Interaction	1768.69	6	294.782	14.93	0.0001
Error	236.95	12	19.745		
Total	2638.3	23			

这里试验指标是射程。推进器和燃料是因素,它们分别有3个、4个水平。这是一个双因素的试验,试验的目的在于考察在各种因素的各个水平下射程有无显著的差异,即考查推进器和燃料这两个因素对射程是否有显著影响。将数据存为L3data.txt,然后在命令窗口运行load调入后,再运行如下命令:

```
[p,tb1,stats]=anova2
(L3data,2)
```

MATLAB计算出方差分析表2;得到的三个p值分别为0.026,0.0035,0.0001。前两者说明燃料、推进器这两个因素的各水平的差异均很显著(高度显著);0.0001说明交互效应的差异

也很显著(高度显著)。由此可知, MATLAB在数据分析方面优势明显。

3. 结语

大学数学课程理论性较强,倘若单纯地推导理论逻辑,容易让学生觉得枯燥、抽象,使用MATLAB与教学相结合可改变传统教学方法,将课程分为理论课和实验课。理论课上培养学生较强的逻辑思维能力、严谨的推理演算能力,在理论上理解和掌握每个知识点;实验课是理论课的延伸,使用MATLAB软件完成比理论课中更多或更复杂的数值求解、数据分析或图形图像的处理等问题。由于MATLAB是数学应用软件,虽然它不能替代数学理论学习,但是在教学中若能恰当结合理论教学使用MATLAB的强大功能,将使数学教学变得更轻松自如,更能体现数学的直观性和趣味性,让学生对数学的学习产生更加浓厚的兴趣,也逐步训练学生用数学知识解决实际问题的能力,也是学生提高应用技能的有力尝试。

参考文献:

- [1]王向东,戎海武,文翰.数学实验[M].北京:高等教育出版社.2004:57-58
- [2]石博强,腾贵法,李海鹏,郭立芳.MATLAB数学计算范例教程[M].北京:中国铁道出版社.2004:46-47.
- [3]冯崇岭,刘升,陈国龙,胡国亮,韩玲. MATLAB在《数值分析》课程教学与实验中的应用[J].淮北煤炭师范学院学报(自然科学版),2008,29(1):88-89.
- [4]汪裕才,冯山.第二类Abel's积分方程算法及计算机实现[J].四川师范大学学报(自然科学版),2000,23(2):145-148.
- [5]盛骤,谢式千,潘承毅.概率论与数理统计[M].北京:高等教育出版社.2007:272-273

The Method of MATLAB on Mathematics Typical Question

Yang bin¹ Xie hai-yun²

(1.Faculty of Applied Technology^[1], 2. Faculty of Land Resource Engineering ^[2],Kunming

University of Science and Technology, KunmingYunnan,650093,P.R.China)

Abstract:This paper analyzes the three typical problems of teaching characteristics: graphics image processing, numerical calculation, data analysis in college mathematics, and uses the way of MATLAB to individually illustrate the three typical problems and brings them about the visual images and the calculation results. How to figure out the theoretical calculation of teaching complicated issue, how to increase the learning of intuitive and fun and how to develop the application and the ability of mathematics and innovative, this thesis provides a good reference.

Keywords: MATLAB, graphic and image processing, numerical calculation, data analysis, mathematics fun

作者简介: 杨斌,男,1979年8月生,工作单位:昆明理工大学应用技术学院理学教研室,硕士,讲师。