度量的理论

王小舟
齐齐哈尔广播电视大学　黑龙江齐齐哈尔　（161005）
E-mail：wangxiaozhou168@163.com

摘　要：本文在前人关于度量理论工作的基础上展开进一步的讨论，定义了度规的概念，证明了度量函数存在准则，定义了微分和度规积分的概念。微分和度规积分从另一个角度揭示了微积分的基本性质。度量理论为微积分奠定了坚实的基础。

关键词： 量；实数；度量；度规；四则运算；微积分

中图分类号：O172;　　　文献标识码：A

The Theory of Measurement

WANG Xiao-zhou
(Qiqihaer Broadcasting University, Qiqihaer, Heilongjiang 161005)

Abstract: This paper presents an advanced discussion on the measurement theory based on the pioneers' work, and then gives a definition of DuGui concept. Also, this paper proved the existence rule of measurement function, presents the conception of differential and the integration of DuGui,. The differential concept and the integration of DuGui open out the basic character of calculus from another point of view. Measurement theory gives a solid base for the calculus theory.

Keywords: Quantity, Real number, Measurement, DuGui, four arithmetic operation, calculus

1. 引言

很久远的从前，人们就开始了对微积分探讨。300 多年前，牛顿和莱布尼兹做了重要的工作，这就是被称作微积分基本定理的牛顿——莱布尼兹公式。

在莱布尼兹看来，微分dx是一个无穷小量，而积分则是无穷多个无穷小量f(x)dx的和。莱布尼兹使用的微积分的记号一直沿用至今。[1]

现代的数学分析教科书中，定积分的几何解释是曲边梯形的面积，导数的几何解释是切线的斜率，这个解释看不出积分和微分作为互逆运算有什么直接的联系。本文从度量的角度去定义微分和定积分，从而找到了微分和积分作为互逆运算的直观的几何解释。

本文是在前人工作基础之上展开进一步的讨论，因此，前人使用过的一些概念我们依然沿用。这些概念的意义在一些数学教科书中都有叙述，例如《算术》[2]、《数学分析》[3] [4]、《实变函数论与泛函分析》[5]。本文仅对新的概念进行定义。

在《算术》[2]中有关于度量的叙述，其中的可较量都不是负量，本文前半部分我们依然遵守这个约定。

2. 量的度量

在教科书《算术》中关于度量有下面的叙述：

1.与同类量的集合中的量的每一个 $A, B, C, \cdots$ 各有确定的数 $a, b, c, \cdots$ 相对应。

2.若 $A > B$，则 $a > b$；若 $A < B$，则 $a < b$；若 $A = B$，则 $a = b$。

3.若 $A = A_1 + A_2$，则 $a = a_1 + a_2$。

如果满足以上三条原则的数标已被引入，我们就说，同类量是可度量的。[2]p261

我们把上面的三条原则称为**度量的数标原则**。度量的数标原则我们作为公理来使用。

度量是用数字来标示可较量程度的过程，引入的数标应当遵循度量的数标原则。本文研究的可较量都是可度量的。在本文中把可较量也称为量。

定义 1：在满足度量的数标原则的前提下，把已经标示了数字的量称为已知量，把需要标示数字的量称为目标量。

量有加法和减法的运算，如果我们把成比例的量的比例关系看作除法运算，那么，量具有与数相同的四则运算以及大于、小于、等于的性质。因此，我们把数看作一种已知量。在本文中数和量统称为数量，也可以简称为量。同时，人们习惯使用的概念的名称我们也不重新命名，例如量标我们依然称为数标。

我们把度量的概念拓展为：度量是遵循度量的数标原则条件下的用已知数量来标示目标量程度的过程。

这样的实例在日常生活中经常可以见到，例如，用表针在表盘上转动的角度来度量时间，用秤砣在秤杆上移动的长度来度量重量。

如果引入的数标是且仅是正整数，我们就说这个度量是数数。

3. 度规

度量是用已知量来标示目标量程度的过程，这个过程是已知量与目标量的一个一一对应的过程，可以用一个函数来表示。

定义 2：已知量的集合记做 X，称为定义域，目标量的集合记做 Y，称为值域，$y \in Y$ 的数标是 $x \in X$，这个对应关系记做 f，就有，$y = f(x)$。当且仅当 $f(x)$ 满足了度量的数标原则时，称 $f(x)$ 为度量函数。

度量函数 $f(x)$ 具有下面三个性质。

性质 1：$f(x)$ 是单调增函数。

性质 2：$f(0) = 0$。

性质 3：$f\left(ax\right) = af\left(x\right) \quad a \geqslant 0$。

证明：分三个部分证明。

⑴由度量的数标原则 2 知，性质 1 的结论是显然的。

⑵下面证明性质 2。

由度量的数标原则 3 知，当 $f(x) = f(x_1) + f(x_2)$ 时，有 $x = x_1 + x_2$，于是

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad 。 \tag{1}$$

在公式⑴中，令 $x_1 = x_2 = 0$，就有

$$f(0) = f(0) + f(0) = 2\ f(0) \quad ,$$

就有

$$f(0) = 0 \quad 。$$

性质 2 得到证明。

⑶下面证明性质 3。

在$a=1$的时候性质 3 显然正确。在公式⑴中，令$x=x_1=x_2\neq 0$，就有

$$f(2x)=2\ f(x)\quad 。$$

设

$$f(nx)=n\ f(x)\quad （n\text{为正整数}），\qquad (2)$$

就有

$$f\left[(n+1)x\right]=f(nx+x)=f(nx)+f(x)=n\ f(x)+f(x)=(n+1)\ f(x)\quad 。$$

由数学归纳法原理知道，公式⑵为真。

根据量的无限分割原则[2]p170，在m为正整数时有

$$f(x)=f\left(\frac{m}{m}x\right)=f\left(m\frac{x}{m}\right)=m\ f\left(\frac{x}{m}\right)=m\ f\left(\frac{1}{m}x\right)\quad ,$$

就有

$$f\left(\frac{1}{m}x\right)=\frac{1}{m}\ f(x)\quad ,$$

等式两端同时乘以正整数n，就有

$$f\left(\frac{n}{m}x\right)=\frac{n}{m}f(x)\quad 。$$

于是，当a是正有理数的时候性质 3 是正确的。

下面我们用反证法来证明当a是正无理数的时候性质 3 也是正确的。

设a是一个正无理数，且有

$$f(ax)=bf(x)\quad 。$$

如果$a<b$，必然存在一个有理数c使得

$$a<c<b\quad 。$$

$f(x)$是一个单调增函数。就有

$$f(ax)<f(cx)=cf(x)<bf(x)\quad 。$$

在$a<b$的时候得到一个与假设相矛盾的结果。同理，在$a>b>0$的时候也会得到一个与假设相矛盾的结果。这就证明了当a是正无理数的时候性质 3 也是正确的。

性质 3 得到了证明。▌

根据量的无限分割原则和实数理论还可以证明：对任意的可度量的正同类量x_1和x_2，必存在正实数a使得$x_1=ax_2$ 。

根据性质 3 有下面的命题。

命题 1：如果$f(x)$是度量函数，那么对任意$x_1>0$和$x_2>0$有，

$$\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_2)}{x_2}\quad 。$$

证明：存在$a>0$使得$x_1=ax_2$ ，有

$$f\left(x_1\right)=f\left(ax_2\right)=af\left(x_2\right) \quad ,$$

就有

$$\frac{f\left(x_1\right)}{x_1}=\frac{f\left(ax_2\right)}{ax_2}=\frac{af\left(x_2\right)}{ax_2}=\frac{f\left(x_2\right)}{x_2} \quad 。\blacksquare$$

定理 1（度量的微分定理）：若 $f(x)$ 是度量函数，就存在常量 $Df(x)$，对任意 $x>0$ 有

$$\frac{f\left(x\right)}{x}=Df(x) \quad 。$$

证明：由命题 1 知，存在 $a\in X$，使得

$$Df(x)=\frac{f\left(x\right)}{x}=\frac{f\left(a\right)}{a} \quad 。\blacksquare$$

特别的，当 $1\in X$ 的时候，$Df(x)=\dfrac{f\left(1\right)}{1}$ 。

定义 3：把由度量函数 $f(x)$ 确定的常量 $Df(x)=\dfrac{f\left(x\right)}{x}$ 称为用已知量 x 度量目标量 $f(x)$ 的度规。当且仅当已知量 x 是实数时，$Df(x)$ 称为目标量 $f(x)$ 的度量单位。

定义 4：把通过已知量和目标量去求度规的运算，称为微分运算。

有下面的度量函数存在准则的定理。

定理 2（度量的积分定理）：$f(x)$ 是度量函数的充分必要条件是，存在常量 $Df(x)>0$ ，使得 $f(x)=xDf(x)$ 。

证明：先证明必要性。

如果 $f(x)$ 是度量函数，则存在常量 $Df(x)$ 使得对任意 $x>0$ 有，

$$\frac{f\left(x\right)}{x}=Df(x) \quad 。$$

就有

$$f(x)=xDf(x) \quad 。$$

$x=0$ 的时候，上面的等式也正确。

必要性得证。然后证明充分性。

如果存在常量 $Df(x)>0$，使得 $f(x)=xDf(x)$ 。$f(x)$ 就是单调增函数。对每一个 x 都有唯一确定的 $f(x)$ 与之对应，对每一个 $f(x)$ 都有唯一确定的 x 与之对应，$f(x)$ 满足了度量的数标原则 1。$f(x)$ 显然也满足了度量的数标原则 2。

设

$$f(x)=f(x_1)+f(x_2),$$

就有

$$x=\frac{f(x)}{Df(x)}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{Df(x)}=\frac{x_1Df(x)+x_2Df(x)}{Df(x)}=x_1+x_2$$ 。

$f(x)$ 满足了度量的数标原则 3。

于是， $f(x)$ 是度量函数。充分性得证。▮

定义 5：把通过已知量和度规去求目标量的运算称为积分运算。

微分运算和积分运算以后我们统称为微积分运算。按照前面的约定，我们仅对新概念进行定义。这里的"新"微积分运算的定义与现代的数学分析教科书中"老"微积分运算的定义不同，属于新的概念。随着度量理论的深入展开，将会发现两者表述的是同一事物，因此，我们不对"新"微积分运算的概念使用另外的名称。

4. 实数轴

实数轴是对直线上的线段度量的结果。

在度量过程中，首先，我们规定了**度量的度量原则**，表述如下：

度量原则 1：度量是对并且仅对目标量进行度量。

度量原则 2：在度量过程中，对目标量进行度量时不能有遗漏。

度量原则 3：在度量过程中，对目标量进行度量时不能有重复。

其次，我们选择度量的工具。这个工具应当是最原始和最基本的。我们选择"尺"和"规"。这里的尺规概念与欧几里得几何理论中的尺规概念是完全一致的。

在一条直线上定义了原点、度量方向和单位长度以后，由有限的步骤进行尺规作图可以确定实数轴上任意一个有理点的位置，由有理数的稠密性和实数理论则可以定义实数轴上任意一个无理点的位置。实数轴上的点与实数是一一对应的。

在一条直线上定义了不同的原点、度量方向和单位长度会定义出不同的实数轴。所有的实数轴组成一个集合 QR。QR 中的实数轴 y 简称为数轴 y 或 y 轴。

定义 6：把一个已知数轴上的点所对应的实数称为这个点在这个数轴上的名称。

一个实数是实数集合的一个元素也表示实数轴上的一个点。实数轴上的线段是一个点的集合——区间。我们用实数集合的区间符号表示数轴上的一个线段。类似实数集合的区间概念，把端点是否属于线段的情况称线段为闭线段、开线段、左开右闭线段、左闭右开线段。实数轴上的线段与区间是一一对应的。

定义 7： y 轴上的点的集合 $(a,b]$ 称为 y 轴上的一个左开右闭线段，记做 $(a,b]_y$ 。

上面线段的符号可以表示点的集合也可以表示代表线段长度的大小和度量方向的向量。暂时不讨论负向量。闭线段、开线段、左闭右开线段也有类似的定义与记号。

对长度的度量与对其它量的度量是等价的，人们常常用数轴来表示其它的量。这个时候，QR 也可以看作各种量的集合。

5. 微分 度规积分

实数轴是对直线上的线段度量的结果，度量的结果满足了度量的数标原则。

$\left(0,1\right]_y$ 是 y 轴（点集 y）的度规，记做 Dy 。就是 $Dy=\frac{\left(0,1\right]_y}{1}=\left(0,1\right]_y$ 。

在度量 y 轴时 Dy 不变，称 Dy 为常度规， y 轴为常度规数轴。对 y 轴的度量满足了度量函数的存在准则（度量的积分定理），可以表述为

$$\left(0,a\right]_y=aDy \text{。}$$

在 y 轴上可以推出

$$\left(a,b\right]_y=bDy-aDy=(b-a)Dy \tag{3}$$

于是有

$$Dy=\frac{\left(a,b\right]_y}{b-a} \tag{4}$$

公式（3）与公式（4）揭示了实数轴上度规与向量关系的本质。公式（3）是已知度规求向量的问题，是一个积分运算。公式（4）是已知向量求度规的问题，是一个微分运算。

数轴上一个“很小的”向量就可以求出度规，或者说知道一个点 a 与邻近点的向量就可以求出度规，这被称为度规的微分性质。用数学语言描述就是：对任意的 $\lambda>0$ 有

$$Dy=\frac{\left(a,a+\lambda\right]_y}{\lambda} \quad \text{(常度规实数轴的微分公式)。}$$

定义 8：把 $\frac{\left(a,a+\lambda\right]_y}{\lambda}$ 记做 dy ，称为 y 轴上 a 点的微分。

根据微分的定义有 $dy=\frac{\left(a,a+\lambda\right]_y}{\lambda}=Dy$ 。度规 Dy 与微分 dy 作为向量它们的大小和方向是相同的。

定义 9：有无穷个度规供我们选择，我们选定其中的一个称为单位度规，它的向量定义为 1。记做 Dx ，即 $Dx=1$。由单位度规确定的数轴我们称为单位数轴或 x 轴。

根据微分的定义有 $dx=Dx=1$。

定义 10：用符号 $(D)\int_a^b dy$ 表示 $\left(a,b\right]_y$ ，称为 y 轴（点集 y ）上 a 点到 b 点的度规定积分，于是

$$(D)\int_a^b dy=\left(a,b\right]_y=(b-a)Dy \quad \text{(常度规实数轴的积分公式)。}$$

6. 变度规实数轴

前面我们对度规为常量的情况进行了研究，但是自然界中存在度规不是常量的情况。例如，速度是用时间度量长度的度规，而自由落体的运动速度就不是一个常量。

下面我们用到的函数 $f(x)\quad x\in\left(-\infty,+\infty\right)$ 单调增加、处处可导。

定义 11：将 x 轴上 $f(x)$ 点的名称改称为 x ，就得到一个新的实数轴，称作 $f(x)$ 轴。这一类的实数轴称为变度规数轴。于是

$$\left(f(a), f(b)\right]_x = \left(a, b\right]_{f(x)} \quad 。$$

在 $f\left(x\right)$ 轴上，实数与数轴上的点是一一对应的。

定理 3：在 $f(x)$ 轴上 $\left(a,b\right]_{f(x)} = f(b) - f(a)$ 。

证明：$\left(a,b\right]_{f(x)} = \left(f(a), f(b)\right]_x = \left[f(b) - f(a)\right]Dx = f(b) - f(a)$ 。▮

在常度规数轴上引入的微分和度规定积分的概念和符号也可以延伸到变度规数轴，$f(x)$ 轴上 a 点到 b 点的度规定积分记做 $(D)\int_a^b df(x)$，于是

$$(D)\int_a^b df(x) = \left(a,b\right]_{f(x)} = f(b) - f(a) \quad 。$$

定义 12：在变度规数轴 $f(x)$ 上，x 点的微分 $df\left(x\right) = \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{\left(x, x+\lambda\right]_{f(x)}}{\lambda}$ 。

定理 4：$df\left(x\right) = f'(x)dx$ 。

证明：由 $dx = Dx = 1$ ，有

$$df\left(x\right) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\left(x, x+\lambda\right]_{f(x)}}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\left(f(x), f(x+\lambda)\right]_x}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda) - f(x)}{\lambda} dx \quad ,$$

$\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f(x+\lambda) - f(x)}{\lambda}$ 是数学分析中函数 $f(x)$ 在 x 点的右导数，$f(x)$ 处处可导，于是

$$df\left(x\right) = f'(x)dx \quad 。▮$$

于是

$$f'\left(x\right) = \frac{df\left(x\right)}{dx} \quad 。$$

如果写出 $f'(x)dx = df(x)$，$f(x)$ 应当理解作 $f'(x)$ 的任意一个原函数。

定理 5：如果 $f(x)$ 是 $f'(x)$ 的任意一个原函数, 则

$$(D)\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \quad \text{（度规积分的牛顿—莱布尼兹公式）。}$$

证明：$(D)\int_a^b f'(x)dx = (D)\int_a^b d\left[f(x) + c\right] = f(b) + c - \left[f(a) + c\right] = f(b) - f(a)$。▮

7. 微积分在变度规直角坐标系上的几何解释

直角坐标系中的实数轴至少有一个是变度规数轴时称其为变度规直角坐标系。

当横轴为 x 轴，纵轴为 $f(x)$ 轴时，满足点的坐标是 (x, x) 的曲线称为同名曲线。同名曲线上 (x, x) 点的切线斜率是 $\dfrac{df(x)}{dx} = f'(x)$，$f(x)$ 轴上 x 点的微分 $df(x) = f'(x)dx$。对于 x 轴上的向量 $\left(a,b\right]_x = b - a$ 有 $f(x)$ 轴上的向量 $\int_a^b df(x) = \left(a,b\right]_{f(x)} = f(b) - f(a)$ 与之对应。

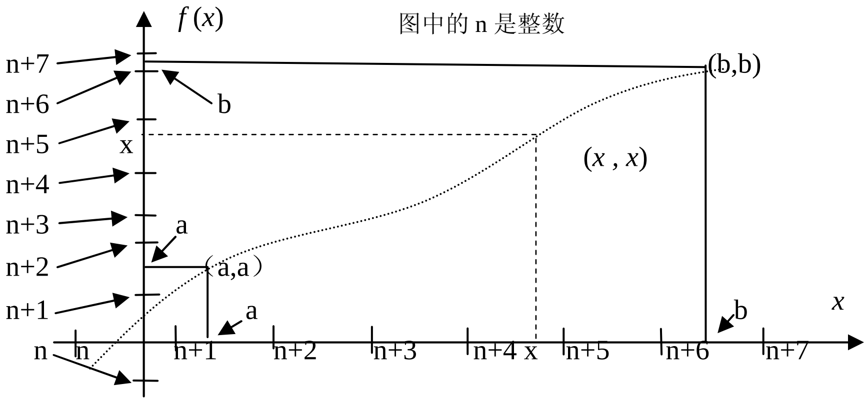

图 1 微积分在变度规直角坐标系上的几何解释

8. 负量

类似线段长度概念我们把$(b-a)Dy$称为点集$(a,b)_y$、点集$\left[a,b\right]_y$、点集$\left(a,b\right]_y$、点集$\left[a,b\right)_y$的测度。一个半开半闭的线段作为度量直线上线段的度规可以满足度量的度量原则。用$\left(0,1\right]_y$度量点集$(a,b)_y$与点集$\left(a,b\right]_y$的时候得到的十进制实数的表达形式有时并不相同，例如，$(0,1)=0.99\cdots$，$\left(0,1\right]=1$，而$0.99\cdots=1$。区间的测度与区间的端点情况无关。

在只研究正量情况下，度规积分$(D)\int_a^b df(x)$在$x\in\left(a,b\right)$且$f(x)$单调增加、处处可导时有定义，称为$f'(x)$在区间$\left(a,b\right)$、$\left[a,b\right]$、$\left(a,b\right]$、$\left[a,b\right)$可积。

以往在区间的记号中，右端点b是大于左端点a的，在闭区间情况下b可以等于a。[5]此时点集的测度是正量或等于 0 的量。下面我们对负量进行研究。

人们习惯把由左向右的方向作为水平直线的度量正方向，把度量线段的始点记做区间的左端点，把度量线段的终点记做区间的右端点，此时对于区间$\left(a,b\right]$有$a<b$。在由右向左的方向作为度量方向时候，线段的左端点依然记做区间的左端点，就是把线段度量的始点记做区间的右端点，把线段度量的终点记做区间的左端点，此时区间$\left(a,b\right]$有$a>b$，这是一个负量。对于垂直直线的度量也有类似的讨论。

在负量存在的情况下，我们把$(b-a)Dy$称为点集$(a,b)_y$、点集$\left[a,b\right]_y$、点集$\left(a,b\right]_y$、点集$\left[a,b\right)_y$的向量。度规积分$(D)\int_a^b df(x)$在$x\in\left(a,b\right)$且$f(x)$单调减小、处处可导时候有与正量类似的定义，$f'(x)$在区间$\left(a,b\right)$、$\left[a,b\right]$、$\left(a,b\right]$、$\left[a,b\right)$可积。

在$a=b$的时候，点集$(a,a)_y$、点集$\left(a,a\right]_y$、点集$\left[a,a\right)_y$是空集，点集$\left[a,a\right]_y$是一个点。此时定义$(D)\int_a^a df(x)=0$。$f'(x)$在区间$\left[a,a\right]$可积。

在 $x\in(a,b)$ 时，若 $f'(x)=0$，就定义 $(D)\int_a^b df(x)=0$。$f'(x)$ 在区间 (a,b) 可积。

可度量的量是可加的量，量有加法和减法的运算。在 $a_1<a_2<a_3$ 时，$f'(x)$ 在区间 (a_1,a_2) 和 (a_2,a_3) 可积，就有

$$(D)\int_{a_1}^{a_3} df(x)=(D)\int_{a_1}^{a_2} df(x)+(D)\int_{a_2}^{a_3} df(x) \quad 。$$

记 $W=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,a_i')$（$a_i<a_i'$，$a_i'\leqslant a_{i+1}$），$f'(x)$ 在区间 (a_i,a_i') $(i=1,2,\cdots,n)$ 可积，点集 W 上的度规积分就是

$$(D)\int_W df(x)=\sum_{i=1}^{n}(D)\int_{a_1}^{a_1'} df(x) \quad 。$$

记 $W=\bigcup_{i=1}^{+\infty}(a_i,a_i')$（$a_i<a_i'$，$a_i'\leqslant a_{i+1}$），$f'(x)$ 在区间 (a_i,a_i') $(i=1,2,\cdots)$ 可积，如果级数 $\sum_{i=1}^{+\infty}(D)\int_{a_1}^{a_1'} df(x)$ 收敛，点集 W 上的度规积分就有下面的定义

$$(D)\int_W df(x)=\sum_{i=1}^{+\infty}(D)\int_{a_1}^{a_1'} df(x) \quad 。$$

9. 后记

没有度规概念的度量理论是不完整的。度规是基于度量的概念。

度量是人类认知大自然和在大自然中生存的基本行为。把“度量”作为理论去研究很有必要。事实上，人们对于一些重要的基础的概念都是在很晚时期才开始研究并得到重视的，例如集合理论和实数理论的建立刚刚过去 100 多年。数学家 M·克莱因就说过：

数学史上最使人惊奇的事实之一，是实数系的逻辑基础竟迟至十九世纪后叶才建立起来。……鉴于代数与分析的广泛发展都用到实数，而实数的精确结构和性质却没有人考虑过，这一事实说明数学的进展是怎样地不合逻辑。[6]p41

中文中已经有概念使用“度规”这两个汉字。我和我的大学同学崔伟业教授、张玉民教授讨论过本文度规概念名称的用字问题。最后我们一致认为在中文中没有比“度规”更恰当的汉字，决定用字不变，相信读者不会混淆。

现代的数学分析教科书中微分的概念并不是必需的，而莱布尼兹的微积分的记号需要微分的概念。如果把本文中的微分称作无穷小量，那么莱布尼兹关于微积分的解释用度规意义的语言叙述就是：积分则是无穷多个无穷小量 f(x)dx 的集合。度规积分是属于莱布尼兹的。

本文第 4、5、6、7 节的内容源于《度规的意义》[7][8]。《度规的意义》第一稿是我 1981 年递交的大学毕业论文。本文是《度规的意义》第七稿。

感谢天津大学的李小宝博士将本文的题名、摘要、关键词翻译成英文。

感谢张永春教授、樊恩祥副教授、张玉民教授、崔伟业教授、陈一鸣教授、任宇光副教授、梁温媛副教授、研究生高宏阁在本文写作过程中给予的各种支持和帮助。

参考文献

[1] R·柯朗，H·罗宾. 数学是什么？[M]. 左平 张怡慈 译. 北京：科学出版社，1985:98-103 564-567。

[2] M·K·格列本卡. 算数[M]. 张禾瑞，孙永生 译. 上海：商务印书馆，1953:

[3] 江泽坚，吴智泉，周光亚. 数学分析（上册）[M]. 北京：人民教育出版社，1978:

[4] 陈傅璋，金福临，胡家赣，朱学炎，欧阳光中. 数学分析（上册）[M]. 上海：上海科学出版社，1978:

[5]夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌. 实变函数论与泛函分析（上册）[M]. 北京：高等教育出版社，1984

[6] M·克莱因. 古今数学思想（第 4 册）[M]. 北京大学数学系数学史翻译组 译 申又枨，冷生明 校. 上海：上海科学技术出版社，1981:

[7] 王小舟. 度规的意义[J]. 活力 2006，(8):文章编号 1007－6263（2006）08－0140－01

[8] 王小舟. 度规的意义[J]. 中国科技论文在线(http://www.paper.edu.cn)，2006-9-4:论文编号 200609-27-2