阿贝耳与狄利克雷判别法的比较学习

黄传军
赣南教育学院数学系，江西赣州（341000）
E-mail: hcj73jx@126.com

摘　要：本文首先简单的介绍了各种不同类型的阿贝耳与狄利克雷判别法，然后通过比较的方法基于变量的多少讨论了同一类型的阿贝耳判别法和狄利克雷判别法的关系，并指出二者是等价的；再从离散与连续的角度讨论了不同类型的阿贝耳判别法和狄利克雷判别法的内在关系，并指出级数类型的判别法是积分类型判别法的特例。

关键词：判别法；级数；反常积分；收敛性
中图分类号：O17

在数学分析的教科书中，关于阿贝耳判别法和狄利克雷判别法在级数、反常积分以及含参变量的反常积分中都有着十分重要和有效的应用，但学生在具体应用中却出现诸多困难，究其原因是对它们的理论基础及其它们的内在联系不太清楚，为此，下面我们通过比较的方法弄清它们。

1 不同类型的阿贝耳与狄利克雷判别法

首先，我们不加证明的列出各种类型的阿贝耳与狄利克雷判别法，其证明[1]，级数类型都是用阿贝耳引理和柯西收敛准则，而无穷限积分类型都是用类似于阿贝耳引理的积分第二中值定理和柯西收敛准则，只不过数项级数是函数项级数的特例，单变量的无穷限积分是含参变量的无穷限积分的特例。

定理1（反常积分的阿贝耳判别法） 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛。

定理2（反常积分的狄利克雷判别法） 若 $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上当 $x\to+\infty$ 时单调趋于0，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛。

定理3（数项级数的阿贝耳判别法） 若级数 $\sum a_n$ 收敛，数列 $\{b_n\}$ 单调有界，则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛。

定理4（数项级数的狄利克雷判别法） 若级数 $\sum a_n$ 的部分和有界，数列 $\{b_n\}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$，则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛。

定理5（函数项级数的阿贝耳判别法） 若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛,函数列 $\{v_n(x)\}$ 在区间 I 上一致有界且对每一个 $x\in I$，$\{v_n(x)\}$ 是单调的（对 n 而言），则级数 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

定理6（函数项级数的狄利克雷判别法） 若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 的部分和函数列在区间 I 上一致有界，$v_n(x)$ 在 I 上一致趋于0 $(n\to\infty)$ 且对每一个 $x\in I$，$\{v_n(x)\}$ 是单调的（对 n 而言），则级数 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

定理7（含参量反常积分的阿贝耳判别法） 若 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，对每一个 $x\in[a,b]$，函数 $g(x,y)$ 为 y 的单调函数，且对参量 x， $g(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上一致有界，则含参量反常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

定理8（含参量反常积分的狄利克雷判别法） 若对一切实数 $N>c$，含参量正常积分 $\int_c^N f(x,y)dy$ 对参量 x 在 $[a,b]$ 上一致有界，对每一个 $x\in[a,b]$ 函数 $g(x,y)$ 关于 y 单调递减且当 $y\to+\infty$ 时对参量 x，$g(x,y)$ 一致收敛于0，则含参量反常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

2 阿贝耳与狄利克雷判别法关系的比较

它们的关系可以从如下几个方面来看：

2.1 同一类型的阿贝耳判别法和狄利克雷判别法的关系

尽管文[2]、[3]和[5]指出它们都是充要条件从而等价，但阿贝耳判别法的条件更强，因而在实际应用中狄利克雷判别法更广，如定理4狄利克雷判别法就可推出定理3阿贝耳判别法，事实上由定理3数列 $\{b_n\}$ 单调有界可得 $\{b_n\}$ 收敛，设 $b_n\to b$，（$n\to\infty$），考虑级数 $\sum(b_n-b)a_n+b\sum a_n$，$\{b_n-b\}$ 单调趋于零，$\sum a_n$ 收敛显然部分和 A_n 有界，从而由定理4知级数 $\sum(b_n-b)a_n$ 收敛，又级数 $b\sum a_n$ 收敛，故级数 $\sum(b_n-b)a_n+b\sum a_n=\sum a_nb_n$ 收敛。

2.2 不同类型的阿贝耳判别法和狄利克雷判别法的关系

先看数项级数与函数项级数，单变量的无穷限积分与含参变量的无穷限积分的阿贝耳判别法和狄利克雷判别法的关系。显然数项级数是函数项级数判别法的特例[4]，单变量的无穷限积分是含参变量无穷限积分判别法的特例,但在具体应用中却需要特别注意“一致”性。例如若数列 $\{a_n\}$ 单调且收敛于0，考虑级数 $\sum a_n\cos nx$ 在 $[\alpha,2\pi-\alpha]$ $(0<\alpha<\pi)$ 上收敛与一致收敛性[1]。证明过程中考查级数 $\sum\cos nx$ 的部分和有界与一致有界时不等式的放缩程度是不一样的。若进行如下放缩：只证明部分和有界时最后一步就是多余的，但要证明一致有界时则是必须的，$\left|\sum_{k=1}^n\cos kx\right| = \left|\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{2}\right| \le \dfrac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}+\dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{1}{2}$

再看数项级数与单变量无穷限积分的阿贝耳与狄利克雷判别法的关系，对单变量无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$，设 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，现将区间 $[a,+\infty)$ 任意分割：$a=b_1<b_2<b_3<\cdots<b_n<\cdots$，于是由积分第二中值定理有：

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)g(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left[g(b_n)\int_{b_n}^{a_n} f(x)dx+g(b_{n+1})\int_{a_n}^{b_{n+1}} f(x)dx\right]$$

其中$b_n < a_n < b_{n+1}$由此即得：

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = g(b_1)\int_{b_1}^{a_1} f(x)dx + g(b_2)\int_{a_1}^{b_2} f(x)dx + g(b_2)\int_{b_2}^{a_2} f(x)dx + g(b_3)\int_{a_2}^{b_3} f(x)dx$$
$$+\cdots + g(b_n)\int_{b_n}^{a_n} f(x)dx + g(b_{n+1})\int_{a_n}^{b_{n+1}} f(x)dx + g(b_{n+1})\int_{b_{n+1}}^{a_{n+1}} f(x)dx + \cdots$$
$$= g(b_1)\int_{b_1}^{a_1} f(x)dx + g(b_2)\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \cdots + g(b_{n+1})\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx + \cdots$$

令$u_n = \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx$， $v_n = g(b_n)$，其中$a_0 = b_1$， $n = 1,2,\cdots$，于是

$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$，若$g(x)=1$即得$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$。

从而无论在狄利克雷判别法中还是在阿贝耳判别法中$\int_a^{+\infty} f(x)dx$同$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$应满足同等的条件；同样，由$g(b_n) = v_n$知$g(x)$同$\{v_n\}$在两个判别法中也应满足同等的条件。

最后再看函数项级数与含参变量无穷积分的阿贝耳与狄利克雷判别法的关系，对含参变量无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dy$，设$g(x,y)$对$y \in [c,+\infty)$单调，现将区间$[c,+\infty)$任意分割：$c = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_n < d_{n+1} < \cdots$于是由积分第二中值定理有：

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{d_n}^{d_{n+1}} f(x,y)g(x,y)dy$$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[g(x,d_n)\int_{d_n}^{c_n} f(x,y)dy + g(x,d_{n+1})\int_{c_n}^{d_{n+1}} f(x,y)dy \right]$其中$d_n < c_n < d_{n+1}$由此即得：

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dy = g(x,d_1)\int_{d_1}^{c_1} f(x,y)dy + g(x,d_2)\int_{c_1}^{d_2} f(x,y)dy + g(x,d_2)\int_{d_2}^{c_2} f(x,y)dy$$
$$+ g(x,d_3)\int_{c_2}^{d_3} f(x,y)dy + \cdots + g(x,d_{n-1})\int_{d_{n-1}}^{c_{n-1}} f(x,y)dy + g(x,d_n)\int_{c_{n-1}}^{d_n} f(x,y)dy + g(x,d_n)\int_{d_n}^{c_n} f(x,y)dy$$
$$+\cdots = g(x,d_1)\int_{d_1}^{c_1} f(x,y)dy + g(x,d_2)\int_{c_1}^{c_2} f(x,y)dy + \cdots + g(x,d_n)\int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x,y)dy + \cdots$$

令$u_n(x) = \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x,y)dy$, $v_n(x) = g(x,d_n)$其中$c_0 = d_1$， $n = 1,2,\cdots$，于是

$\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$，若$g(x,y)=1$即得$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$从而无论在狄利克雷判别法中还是在阿贝耳判别法中$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$同$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$应满足同等的条件。同样，由$g(x,d_n) = v_n(x)$知$g(x,y)$同$\{v_n(x)\}$在两个判别法中也应满足同等的条件。事实上含参变量无穷积分与函数项级数都是对函数求和的问题，只不过前者是离散的作和，后者是连续的作和，因此它们的判别法是平行的（我们分析的结果也正是如此）。

3 结束语

通过这种比较法的学习，不仅认识到了同一类型的阿贝耳判别法和狄利克雷判别法之间

的关系，即它们的条件和结论都是充要的。特别发现了不同类型的判别法之间的内在联系：即显然数项级数是函数项级数判别法的特例，单变量的无穷限积分是含参变量无穷限积分判别法的特例；数项级数的判别法可以看成是单变量无穷积分的判别法的推论；函数项级数的判别法是含参变量无穷积分的判别法的推论。仔细体会它们的内在联系对于今后的学习和应用都具有很大的帮助。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系。数学分析（第三版）[M]。北京：高等教育出版社，2001

[2] 裘兆泰，王承国，章仰文。数学分析学习指导[M]。北京：科学出版社，2004

[3] 李梵蓓。“Abel”判别法与“Dirichlet”判别法条件的再探讨[J]。内蒙古财经学院学报（综合版）2003 年第 1 卷第 3 期，80-81

[4] 翁东东。浅谈级数收敛性的阿贝尔判别法及狄里克雷判别法[J]。黎明职业大学学报第 1 期(总第 34 期)，2002 年 3 月，76-80

[5] 宗序平。关于 Dirichlet 和 Abel 判别法的必要性[J]。数学的实践与认识。 1990（2）.72-75

The Study of Comparison between Abel Criterion and Dirichlet Criterion

Huang Chuanjun

Department of Mathematics, Gannan Institute of Education, Ganzhou, Jiangxi (341000)

Abstract

The different types of Abel Criterion and Dirichlet Criterion are introduced first in this article;then, The internal relations between the same kind of Abel Criterion and Dirichlet Criterion were discussed by analyzing and comparing based on the number of variables,Pointed out that they are equivalent； and the internal relations between the different types of Abel Criterion and Dirichlet Criterion were discussed also based on the relationship of discrete and continuous, Pointed out that the Criterion of series type in regard to the Criterion of integral type is a special case.

Keywords: Criterion; Series; improper integral; Convergence Chinese Library Classfication

作者简介：黄传军（1973.11），男，江西修水，硕士，从事数学分析教学研究。