利用 Lagrange 乘数法来证明几个著名的不等式

顾先明，彭浩
（唐山师范学院数学与信息科学系，河北 唐山 063000）

摘要：在数学分析的教学过程我们经常要利用许多不等式的结果，其中不乏许多经典不等式（如平均值不等式、柯西不等式、詹生不等式等等），因而这些不等式的证明自然显得十分重要了，不等式的证明方法更是有很多种，文章利用解决条件极值常用的 Lagrange 乘数法来证明几个著名的不等式，使其证明方法显得更为简洁。

关键词：不等式证明；Lagrange 乘数法；著名不等式；证明方法

中图分类号：O178

Using Lagrangge Multiply Means to Prove some Famous Inequality

Gu xianming, Peng hao
(Department of Mathematics and Information Science,Tangshan Teachers College,HeBei TangShan 063000)

Abstract: In this paper,we discuss,in the teaching process of mathematical analysis, we often want to use many inequality results, including many classic inequality (such as the average inequality and Cauchy inequality, Jenson inequality, etc), and these inequalities nature is very important, proof to inequality, but there are many methods to solve using Lagrange multiplier of conditional extreme value used to prove some famous inequality proof method, make its appear more concise.

Keywords: Proof to Inequalitykey;Lagrange Multiply Means;Classic Inequality;Fashions of Proof

0 引言及预备知识

我们在利用 Lagrange 乘数法求目标函数在某些给定的约束条件下的极值问题，可以得到一些意想不到的结果，这些结果使得我们在证明不等式的过程中有了新思路.文章正是通过构造合适的目标函数和约束条件，利用 Lagrange 乘数法求解条件极值的思路来证明某些著名不等式，其证明方法比现有的相关文献所使用的方法显得要简洁明了.

我们在利用 Lagrange 乘数法解决条件极值问题时，总是需要判断极值点的嫌疑点所对应的一个特定的矩阵（即 Hesse 矩阵）是否为正（负）定矩阵，然而一些常用的判定方法都十分繁琐，不利于我们快速判定.这里将提出一个判定方法：

定义 1 行列式的某行（列）乘的数，或某行（列）乘的某数加到另一行（列）这两种初等变换对行列式具有保号性，故我们将证两种变化称为行列式的保号变换.

定义 2 在满足条件 $\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0(i=1,2,\cdots,m.m<n)$ 时，求函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值问题，可归结为对 Lagrange 函数

$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，求普通函数极值问题，其

作者简介：顾先明（1989-），男，唐山师范学院数学与信息科学系 2007 级学生，研究方向：函数论. E-mail: guxianming@yahoo.cn

中 λ_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 为常数因子，这种方法称为 Lagrange 乘数法.关于 Lagrange 乘数法的理论基础和几何机理解释详见文[1]、[2].

容易知道，对于一个给定的行列式，总可以通过行列式的保号变换将行列式三角化[3]：

引理 1[4]：设 $A\in R^{n\times n}, A^T=A$，把

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{行列式的保号变换}} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=|B|$$

则有：1、A 正定 $\Leftrightarrow b_{ii}>0(i=1,2\cdots,n)$；2、$A$ 负定 $\Leftrightarrow b_{ii}<0(i=1,2\cdots,n)$；

3、A 不定 $\Leftrightarrow b_{ii}$ 中有正有负或者某个 b_{ii} 为零.

一般的数学分析教材均为详细给出条件极值判别的充分条件，我们给出如下充分条件：

引理 2[5]：设 $\mathbf{z}_0$ 是辅助函数 $F(\mathbf{z})=f(\mathbf{z})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Phi_i(\mathbf{z}_0)$ 的驻点，其中

$\mathbf{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_{m+n})=(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$，对于

$$HF(\mathbf{z}_0)=\left(\frac{\partial^2F(\mathbf{z}_0)}{\partial x_i\partial y_j}\right)1\le i,j\le m+n;$$

（1）如果 $HF(\mathbf{z}_0)$ 严格正定，那么 f 在 $\mathbf{z}_0$ 取严格的条件极小值；

（2）如果 $HF(\mathbf{z}_0)$ 严格负定，那么 f 在 $\mathbf{z}_0$ 取严格的条件极大值；

（3）如果 $HF(\mathbf{z}_0)$ 不定时，那么 f 在 $\mathbf{z}_0$ 仍有可能取得极值.

结合上述的两个引理，我们可以对给定的 Hesse 矩阵是否为正定矩阵做出快速判定，进而对极值点的嫌疑点为极大（小）值点做出准确判断.

1 一些常用经典不等式不等式

1、Young 不等式：已知 $u\ge 0,v\ge 0,\alpha\ge 0,\beta\ge 0$，并且 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$，则 $uv\le\frac{1}{\alpha}u^{\alpha}+\frac{1}{\beta}v^{\beta}$.

证：要证上述不等式，只需考察函数 $f(u,v)=\frac{1}{\alpha}u^{\alpha}+\frac{1}{\beta}v^{\beta}$ 在约束条件 $uv=1$ 下的最小值问题，显然这个最小值是存在的，根据 Lagrange 乘数法，构造辅助函数

$F(u,v,\lambda)=f(u,v)+\lambda(uv-1)$.分别对变量 u,v,λ 求偏导并令其都为 0，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial u}=u^{\alpha-1}+\lambda v=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial v}=v^{\beta-1}+\lambda v=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=uv-1=0\end{cases}$$

.解得 $u^{\alpha}=v^{\beta}$，又 $uv=1$.所以 $u=v=1$，所以 $\frac{1}{\alpha}u^{\alpha}+\frac{1}{\beta}v^{\beta}$ 的最小值为 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$.这就是说，不等式 $\frac{1}{\alpha}u^{\alpha}+\frac{1}{\beta}v^{\beta}\ge 1$（*），把约束条件 $uv=1$ 代入不等式

（*）即可得到$uv \le \frac{1}{\alpha}u^{\alpha} + \frac{1}{\beta}v^{\beta}$，证毕.

注：由于我们可以用 Young 不等式，通过适当的变量替换可以生成许多重要的不等式，如平均值不等式、Cauchy-Schwarz 不等式、Hölder 不等式等等，鉴于它的重要作用，许多学者将其称为“母不等式”，在我国两位不等式研究专家匡继昌教授和胡克教授的专著[6]、[7]中都可以找到关于这方面研究的详细资料，这里不再赘述.

2、证明不等式（1）的推广形式：文献[8]给出了这样一个不等式.：设n为任意自然数，$x,y>0$，则有

$$\frac{x^n+y^n}{2} \ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \qquad （1）.$$

这是一个真命题.下面将上述不等式推广到更一般的形式：

命题：设$\forall x_i>0, i=1,2,\cdots,n$，则（1）当$p>1$时，有

$\frac{1}{n}\left(x_1^p+\cdots+x_n^p\right) \ge \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^p$；（2）当$0<p<1$时，有

$$\frac{1}{n}\left(x_1^p+\cdots+x_n^p\right) \le \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^p.$$

证：要证上述不等式，只需考察函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^p+\cdots+x_n^p$在约束条件下$x_1+x_2+\cdots x_n=c(c>0)$下的最值问题，于是根据 Lagrange 乘数法构造辅助函数$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\lambda(x_1+x_2+\cdots x_n-c)$，

对变量$x_i(i=1,2,\cdots,n)$及λ求偏导数并令其均为 0，则$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=px_i^{p-1}+\lambda=0, i=1,2,\cdots,n\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x_1+x_2+\cdots+x_n=c.(c>0)\end{cases}$

解上述方程组可得 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{c}{n}$.并有$x_1^p+\cdots+x_n^p=\frac{c^p}{n^{n-1}}$.

又因为$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}=\begin{cases}0(i\ne j)\\ p(p-1)(i=j)\end{cases}$，于是$HF(\mathbf{z}_0)=\frac{c^{p-2}}{n^{p-2}}\begin{pmatrix}p(p-1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(P-1)\end{pmatrix}_{n\times n}$

由于$c>0$，（i）当$0<p<1$时，$HF(\mathbf{z}_0)$严格负定，由引理可知，f在$\mathbf{z}_0$处取得严格的条件极大.由$\mathbf{z}_0$的唯一性可知，其为严格的最大值点，于是得：

$$f\left(x_{1,}x_2\ldots\ldots,x_n\right)=x_1{}^p+\cdots+x_n{}^p \le f_{\max}=f\left(\frac{c}{n},\cdots\frac{c}{n}\right)=\frac{c^p}{n^{p-1}} \qquad （2）$$

再将约束条件$x_1+x_2+\cdots x_n=c(c>0)$代入不等式（1）并整理可得到

$$\frac{1}{n}(x_1{}^p+x_2{}^p+\cdots+x_n{}^p) \le \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^p.$$

（ii）当$p>1$时，$HF(\mathbf{z}_0)$严格正定，由引理可知，f在$\mathbf{z}_0$处取得严格的条件极小值.由Z_0的唯一性可知，其为严格的最小值，于是

$$f\left(x_{1,}x_2\ldots\ldots,x_n\right)=x_1{}^p+\cdots+x_n{}^p\geq f_{\min}=f(\frac{c}{n},\cdots\frac{c}{n})=\frac{c^p}{n^{p-1}} \quad (3)$$

再将约束条件 $x_1+x_2+\cdots x_n=c(c>0)$ 代入不等式（2）并整理可得到

$$\frac{1}{n}(x_1{}^p+x_2{}^p+\cdots+x_n{}^p)\geq\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^p.$$

3、 Hölder 不等式：设 $a_i\geq 0,x_i\geq 0,i=1,2\cdots n.\ p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$ 那么有

$\sum_{i=1}^{n}x_i{}^p=1(p>1)$ 下的最大值问题.于是根据 Lagrange 乘数法，设

$F(x_1,x_2\cdots x_n,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\lambda(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^p-1)$，$\lambda$ 为参数，分别对变量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 及 λ

求偏导数并令其均为 0，则
$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x_i}=a_i+p\lambda x_i^{p-1}=0,i=1,2,\cdots n.\cdots\cdots\cdots(4)\\ \frac{\partial F}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}x_i^p-1=0\cdots\cdots\cdots(5)\end{cases}$$
将方程（4）的等号两端乘以 x_i，再对 $i=1,2,\cdots,n.$ 相加.再由方程（5）有 $\sum_{i=1}^{n}x_ia_i+p\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^p=0$ （6）

由方程（4）直接解得 $x_i=(-\frac{a_i}{p\lambda})^{\frac{1}{p-1}}$. 则 $x_i^p=(-\frac{a_i}{p\lambda})^{\frac{1}{p-1}}=(-\frac{a_i}{p\lambda})^q$.（已知 $\frac{p}{p-1}=q$ ）

然后由方程（5），有 $\sum_{i=1}^{n}x_i^p=(-\frac{1}{p\lambda})^q\sum_{i=1}^{n}a_i^q=1$ 或 $-p\lambda=(\sum_{i=1}^{n}a_i^q)^{\frac{1}{q}}$ （7）

由（6）式和（7）式，有 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=(\sum_{i=1}^{n}a_i^q)^{\frac{1}{q}}$ 或 $\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{x_i}{(\sum_{i=1}^{n}a_i^q)^{\frac{1}{q}}}=1$ ，再由方程（4），

应该有 $x_i^p=a_i\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}a_i^q)^{\frac{1}{q}}}$ 或 $x_i=(a_i\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}a_i^q)^{\frac{1}{q}}})^{\frac{1}{p-1}}\quad i=1,2,\cdots n.$ (8)

为确定起见，将（8）式中 x_i 表示为 x_i^0，即： $x_i^0=(a_i\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}a_i^q)^{\frac{1}{q}}})^{\frac{1}{p-1}}\quad i=1,2,\cdots n.$

从而，求得函数 F 的唯一一个稳定点（去掉坐标 λ ）， $\mathbf{z}_0(x_1^0,x_2^{0,}\cdots\cdots x_n^0)$.已知 n 元函数 $f(x_{1,}\cdots\cdots x_n)$ 在 n 维有界闭曲面 $V_n\left\{(x_{1,}\cdots\cdots x_n)\,|\sum_{i=1}^{n}x_i^p=1\right\}$ 连续.从而函数 $f(x_{1,}\cdots\cdots x_n)$ 在 n 维有界闭曲面 V_n 上取到最大值和最小值.显然 $\mathbf{z}_0(x_1^0,x_2^{0,}\cdots\cdots x_n^0)\in V_n$.

由 $\frac{\alpha F}{\partial x_i} = a_i + p\lambda x_i^{p-1}$ 可得 $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} p(p-1)\lambda x_i^{p-2}(i=j) \\ 0(i \neq j) \end{cases}$，从而对应的 Hesse 矩阵

$$HF(\mathbf{z}_0) = -\left[\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^q)^{\frac{1}{q}}}\right]^{\frac{p-2}{p-1}} \begin{pmatrix} (p-1)(\sum_{i=1}^n a_i^q)^{\frac{1}{q}} & & \\ & \ddots & \\ & & (p-1)(\sum_{i=1}^n a_i^q)^{\frac{1}{q}} \end{pmatrix}$$

因为 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，所以 $1 + \frac{1}{p-1} = q$.又 $q > 1 \therefore p-1 > 0$，所以 $HF(\mathbf{z}_0)$ 严格负定，由引理 2 可知， f 在 $\mathbf{z}_0$ 处取得严格极大值.

又由以上的分析可知，函数 f 在点 $\mathbf{z}_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 取得最大值，最大值是 $(\sum_{i=1}^n a_i^q)^{\frac{1}{q}}$.

即 $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in V_n$.有 $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq (\sum_{i=1}^n a_i^q)^{\frac{1}{q}}$，令 $x_i = \frac{1}{(\sum_{i=1}^n b_i^p)^{\frac{1}{p}}} \geq 0$， $(i = 1,2,\cdots,n)$，

有 $\sum_{i=1}^n x_i^p = \sum_{i=1}^n \frac{b_i^p}{\sum_{i=1}^n b_i^p} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i^p}{\sum_{i=1}^n b_i^p} = 1$，所以 $\forall x_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 满足约束条件 $\sum_{i=1}^n b_i^p = 1$ 时，有

$\sum_{i=1}^n a_i \frac{b_i}{(\sum_{i=1}^n b_i^p)^{\frac{1}{p}}} \leq (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{q}}$ 或 $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^n a_i^q)^{\frac{1}{q}} (\sum_{i=1}^n b_i^p)^{\frac{1}{p}}$ 命题得证.

我们可以从 Hölder 不等式中变形中很容易地得到 Cauchy-Schwarz 不等式的证明方法，对比上述证明过程，我们会发现这明显比文献[9]所给的方法简洁明了.

4、Jensen 不等式：设 $f''(x) > 0, t_i > 0. \sum_{i=1}^n t_i = 1$, 则有 $f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$.

证：要证上述不等式，我们可以考察函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$ 在约束条件 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n t_i f(x_i) + \lambda\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i - c\right)$，分别对变量 $x_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 代入求偏导数，并令其都为 0.则 $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = t_i f'(x_i) + \lambda t_i = 0, i = 1,2,\cdots,n \\ \frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^n t_i x_i - c = 0, \text{且} \sum_{i=1}^n t_i = 1. \end{cases}$，解上述方程且得 $x_i = c$. 又因为

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}=\begin{cases} t_i f''(x_i),(i=j) \\ 0,(i\neq j)\end{cases}$，所以 Hesse 矩阵为 $HF(\boldsymbol{z}_0)=f''(c)\begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n\end{pmatrix}$，且因为 $f''(c)>0, t_i>0$，所以 $HF(\boldsymbol{z}_0)$ 是严格正定的，即函数 f 在 z_0 点处取得条件极小值.又由于 z_0 得唯一性可知，函数 f 在 z_0 点处取得极小值.因此 $\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} t_i f(c)=f(c)$，将约束条件代入上述式子，有 $\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)$，证毕.

4、平均值不等式串：设 $x_1, x_{2,} \cdots\cdots, x_n$ 是一组任意的正实数，那么有不等式串：

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt[n]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^n}{n}}$$ 成立.

证：先证明不等式 $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots\cdots x_n}$ 成立，考察函数

$f(x_{1,}\ x_2 \cdots\cdots x_n)=x_1 x_2 \cdots\cdots x_n$，在约束条件 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{a}$（$a>0$）($x_i>0, i=1,2,\cdots\cdots,n, a>0$)之下的极值问题.于是根据 Lagrange 乘数法，构造辅助函数 $F(x_{1,}\ x_2 \cdots\cdots x_n, \lambda)=x_1 x_2 \cdots\cdots x_n + \lambda(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{a})$ 分别对变量 x_i 及 $\lambda\ (i=1,2,\cdots\cdots.n)$ 求偏导数并令其均为 0，则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_n}=\prod_{j\neq i}^{n} x_j-\dfrac{\lambda}{x_i^2}=0(i=1,2,\cdots,n) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=\sum_{i}^{n}\dfrac{1}{x_i}-\dfrac{1}{a}=0 \end{cases} \tag{11}$$

由方程组(11)的前 n 个式子,易得 $\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{x_2}=\cdots=\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{x_1 x_2 \cdots x_n}{\lambda}=\mu$.把它代入(11)的第 $n+1$ 个式子可得 $\mu=\dfrac{1}{na}$.从而函数 F 的稳定点为 $x_1=x_2=\cdots=x_n=na$. $\lambda=(na)^{n+1}$.

由 $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n-\dfrac{\lambda}{x_i^2}$，所以 $(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j})_{p=p_0}=\begin{cases} (na)^{n-2} & i\neq j \\ \dfrac{2\lambda}{x_i^3}=2(na)^{n-2} & i=j\end{cases}$，其中 $\boldsymbol{p}_o=(na,\cdots,na)$，于是函数 F 在 $p=p_0$ 点处的 Hesse 矩阵为

$$HF(p_0)=\begin{pmatrix}2(na)^{n-2} & (na)^{n-2} & \cdots & (na)^{n-2}\\ (na)^{n-2} & (na)^{n-2} & \cdots & (na)^{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (na)^{n-2} & (na)^{n-2} & \cdots & 2(na)^{n-2}\end{pmatrix}=(na)^{n-2}\begin{pmatrix}2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等变换}}$$

$(na)^{n-2}\begin{pmatrix}n+1 & n+1 & \cdots & n+1\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & & 1\end{pmatrix}$，对矩阵 $A=\begin{pmatrix}n+1 & n+1 & \cdots & n+1\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & & 1\end{pmatrix}$，来说显然它的任意阶主子式都大于 0.所以矩阵 A 严格正定.即矩阵 $HF(\boldsymbol{p}_0)$ 严格正定，由引理 1、2 可知 f 在 p_0 处取严格的条件极小.由 p_0 的唯一性可知其严格最小值.于是得

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ge f_{\min}=f(na,na,\cdots na)=(na)^n$，即 $x_1x_2\cdots x_n\ge(na)^n$ 将约束条件 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}$ 代入不等式（1）可得 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\ge na=\dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$，

于不等式 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}$.我们只要在文献[5]（见 p.174）的例 2 的结论中取 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=1$，即可得

$x_1^{\ 1}x_2^{\ 1}\cdots x_n^{\ 1}\le(\dfrac{1\cdot x_1+1\cdot x_2+\cdots+1\cdot x_n}{1+1+\cdots+1})^{1+1+\cdots+1}=(\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n})^n$，整理即可得到

$\sqrt[n]{x_1\cdots x_2}\le\dfrac{x_1+x_2\cdots x_n}{n}$ 另外对于不等式 $\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\le\sqrt[n]{\dfrac{x_1^{\ n}+x_2^n+\cdots x_n^n}{n}}$ 来说，我们只要在命题 2 中令 $p=n\ge1$(当 $n=1$ 时不等式两边将相等对 $\forall x_i\in R^+$)，

$\dfrac{1}{n}(x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n)\ge(\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n})^n$.即 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\le\sqrt[n]{\dfrac{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n}{n}}$，

综上所诉，我们就完整的证明了不等式串

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\le\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\le\sqrt[n]{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^n}{n}}.$$

2 结论

最后我们指出虽然说很多不等式证明问题都有十分巧妙的初等解法，但它们一般都具有一定的局限性，没有利用 Lagrange 乘数法所能适用的范围广，因此我们利用条件极值的相关理论来证明不等式是不错的选择.此外不等式的证明方法千变万化，但只要抓住它的精髓，还是有规律可循的.所谓的“万变不离其宗”就是这个道理，这提醒我们学生和老师在实践的教学实践中注意培养学生良好的数学素养.

3 致谢

感谢在本文写作过程中给予作者极大帮助的宋泽成老师和帮助作者电脑编辑论文的罗金南师妹。

[参考文献] (References)

[1] 华东师范大学数学系 数学分析（下册）.第三版[M] 北京：高等教育出版社 2007：164—166
[2] 陈纪修等 数学分析（下册）[M] 第二版 北京：高等教育出版社 2004:218—221
[3] 张禾瑞、郝鈵新 高等代数（第四版）[M] 北京：高等教育出版社 2007
[4] 刘锋等 基于矩阵初等变换的 n 元函数极值的快速判别法[J] 数学的实践与认识 2004，34（5），170—174
[5] 常庚哲、史济怀 数学分析教程（下册）[M] 北京：高等教育出版社 2003:173—174
[6] 匡继昌 常用不等式（第三版）[M] 济南：山东科学技术出版社 2003
[7] 胡克 解析不等式的若干问题[M] 武汉：武汉大学出版社 2003
[8] 郭大钧等 数学分析（下册）[M] 第三版. 济南：山东科学技术出版社 2004：660
[9] 刘玉琏等 数学分析讲义习题选解[M] 北京：高等教育出版社，1996：384—388