双调和 Green 函数与 Bergman 核函数

刘慧琴，叶善力，胡清孝
（福建师范大学数学与计算机科学学院，福州 350007）

摘要：Bergman 核函数一直以来都是一个被大量讨论与研究的热门话题. 由 Bergman 核函数所展开的一系列问题的研究也取得了很多成果. 以前已经研究得到了 Green 函数与 Bergman 核函数之间的关系，并且也研究了双调和 Green 函数的许多方面，了解了它的很多性质. 但是，人们对双调和Green函数与Bergman核函数之间的关系还不知道. 本文从这个思路出发，借鉴了 Green 函数与 Bergman 核函数之间的关系的研究思想，并通过分析双调和 Green 函数自身的一些特征，研究出了这两者之间的关系，并最终得到了一个等式.

关键词：Bergman 核函数；Green 函数；双调和 Green 函数
中图分类号：O174.56

Biharmonic Green function and Bergman kernel function

LIU Huiqin, YE Shanli, HU Qingxiao
(Department of Mathematics, Fujian Normal University, FuZhou 350007)

Abstract: In this paper, we all know that we have studied the connection between Green's function and Bergman kernel function. Bergeman kernel function has been studied heavily and stay always as an active topic. Many results have been abtained. Before, people studied many sides of the biharmonic Green function. But we did not know the connection between biharmonic Green function and Bergman kernel function. It uses the idea of the connection of Green's function and Bergman kernel function. Then the characterizations of biharmonic Green function are also used in the paper. Finally, it is abtained that the connection between biharmonic Green function and Bergman kernel function.

Keywords: Bergeman kernel function; Green's function; biharmonic Green function

设 Ω 是复平面上任一光滑有界区域. $H(\Omega)$ 表示 Ω 上的所有解析函数的全体.

设 $f \in H(\Omega)$，$0<p<\infty$，令 $\|f\|_p = \{\int_\Omega |f(z)|^p\, dA(z)\}^{\frac{1}{p}}$. 如果 $\|f\|_p < +\infty$，则称 f 属于 Bergman 空间 A^p. 其中 $dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{1}{\pi} rdrd\theta$ 为规范化的 Lebesgue 面积.

参见文献[1, p48]知，由 Riesz 表示定理得:对每个 $f \in A^2(\Omega)$,都存在唯一的函数 $k_z \in A^2(\Omega)$ 使得 $f(z) = \langle f, k_z \rangle$. 这样，定义 $K(z,\xi) = \overline{k_z(\xi)}$ 叫做 Ω 上的Bergeman核函数. 我们知道，对每个 $f \in A^2(\Omega)$ 有 $f(z) = \int_\Omega f(\xi) K(z,\xi) dA(\xi)$，$z \in \Omega$.

由文献[2, p183]知，设 u 是 Ω 内的复函数，并且在 Ω 内每一点都满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 存在，则 u 的 Laplacian 定义为 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. 如果 f 在 Ω 内连续，且在 Ω 的每一点有 $\Delta u = 0$，则称 f 在 Ω 内是调和的.

由文献[3, p18]知，若函数 u 的 Laplacian Δu 是调和的，则 u 是双调和的. 即 $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = 0$.

基金项目：福建省自然科学基金（项目编号：2009J01004）
作者简介：刘慧，(1987-)，女，硕士研究生，主要研究方向：复分析. E-mail: liuhuiqin871108@163.com

Ω 上的双调和 Green 函数 $\Gamma(z,\xi)$ 的定义满足以下要求: (见文献[3, p19])

（1）对每个固定的 $\xi\in\Omega$，$\Gamma(z,\xi)$ 在 $\Omega\setminus\{\xi\}$ 上是 z 的实值双调和函数.

（2）对每个固定的 $\xi\in\Omega$，$\Gamma(z,\xi)-\dfrac{1}{8}|z-\xi|^2\log|z-\xi|$ 在 ξ 的邻域内是双调和的.

（3）$\Gamma(z,\xi)$ 是 $C^4(\bar{\Omega}\setminus\{\xi\})$ 类的.对所有 $z\in\partial\Omega$ 有 $\Gamma(z,\xi)=\dfrac{\partial\Gamma}{\partial n}(z,\xi)=0$，其中 $\dfrac{\partial}{\partial n}$ 表示外法线导数.

由于公式 $\Delta\left\{|z|^2\log|z|\right\}=4\log|z|+4$，则（2）表明 $\Delta\Gamma(z,\xi)$ 有一个对数奇点 ξ. 特殊地, 它表明: 在 ξ 的邻域内，$\Delta\Gamma(z,\xi)-\dfrac{1}{2}\log|z-\xi|$ 是调和的.

由文献[3, p16, 定理 4]我们知道了以下定理:

定理 A 令 Ω 是一个有限连通域，边界为解析的 Jordan 曲线. 令 $G(z,\xi)$ 是 Ω 的 Green 函数，则 Bergman 核函数是 $K(z,\xi)=-\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\partial^2 G}{\partial z\partial\bar{\xi}}$，$z\neq\xi$.

此定理说明 Green 函数是与 Bergman 核函数紧密联系的. 本文借鉴定理 A 的思想以及证明思路来探讨双调和 Green 函数与 Bergman 核函数之间的关系. 于是有了下面的定理.

定理 令 Ω 是一个有限连通域, 边界为解析的 Jordan 曲线. 令 $\Gamma(z,\xi)$ 是 Ω 上的双调和 Green 函数，则 Bergman 核函数 $K(z,\xi)=\dfrac{16}{\pi}\dfrac{\partial^4\Gamma(z,\xi)}{\partial z\partial\bar{z}\partial z\partial\bar{\xi}}$，$z\neq\xi$.

证明 由于在 ξ 的邻域内，$\Delta\Gamma(z,\xi)-\dfrac{1}{2}\log|z-\xi|$ 是调和的. 因此 $\Delta\Gamma(z,\xi)$ 有以下形式:

$$\Delta\Gamma(z,\xi)=\frac{1}{2}\log|z-\xi|+h(z,\xi),\text{在 }\xi\text{ 的某个邻域内.}$$

其中 $h(z,\xi)$ 是 z 的调和函数.

则

$$\frac{\partial\Delta\Gamma(z,\xi)}{\partial z}=\frac{1}{4}\frac{1}{z-\xi}+\frac{\partial h}{\partial z}(z,\xi)$$

$$\frac{\partial^2\Delta\Gamma(z,\xi)}{\partial z\partial\bar{\xi}}=\frac{\partial^2 h}{\partial z\partial\bar{\xi}}(z,\xi),\quad z\neq\xi.$$

因为已得知边界曲线是解析的，并且 $\Delta\Gamma(z,\xi)$ 是调和的,所以 $\Delta\Gamma(z,\xi)$ 可调和扩张到边界.又因为 $\dfrac{\partial\Delta\Gamma(z,\xi)}{\partial z}$ 是 z 的解析函数, 所以 $\dfrac{\partial^2\Delta\Gamma(z,\xi)}{\partial z\partial\bar{\xi}}$ 也是 z 的解析函数.

首先假定 f 在 Ω 上解析，在 $\bar{\Omega}$ 上连续. 令 $\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\left\{|z-\xi|\leq\varepsilon\right\}$，令 Γ_ε 是圆盘 $|z-\xi|\leq\varepsilon$ 的边界. 由 Cauchy-Green 定理知: $\int_{\partial\Omega}F(z)dz=2i\int_{\Omega}\dfrac{\partial F}{\partial\bar{z}}dA$，$F\in C^1(\bar{\Omega})$.

令 $F(\xi)=\dfrac{\partial\Delta\Gamma(z,\xi)}{\partial z}f(\xi)$，则

$$\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial\Delta\Gamma(z,\xi)}{\partial z}f(\xi)d\xi=-\int_{\Omega_\varepsilon}\frac{\partial^2\Delta\Gamma(z,\xi)}{\partial z\partial\overline{\xi}}f(\xi)dA(\xi)\qquad（1）$$

其中 Γ_ε 沿逆时针方向.

又由 Cauchy 公式得

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial\Delta\Gamma(z,\xi)}{\partial z}f(\xi)d\xi&=\int_{\Gamma_\varepsilon}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{z-\xi}+\frac{\partial h}{\partial z}(z,\xi)\right)f(\xi)d\xi\\&=-\frac{1}{4}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi+\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial h(z,\xi)}{\partial z}f(\xi)d\xi\\&=-\frac{1}{2}\pi i f(z)+\int_{\Gamma\varepsilon}\frac{\partial h(z,\xi)}{\partial z}f(\xi)d\xi\\&\to-\frac{1}{2}\pi i f(z)\end{aligned}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时.　(2)

综合（1）与（2）得到

$$f(z)=\frac{4}{\pi}\int_\Omega\frac{\partial^2\Delta\Gamma(z,\xi)}{\partial z\partial\overline{\xi}}f(\xi)dA(\xi)\qquad（3）$$

最后,因为 Ω 有解析的边界，所以 Ω 上的核函数可解析的延拓到边界. 令 $f(z)=K(z,\eta)$，代入（3）得

$$\frac{4}{\pi}\int_\Omega\frac{\partial^2\Delta\Gamma(z,\xi)}{\partial z\partial\overline{\xi}}K(\xi,\eta)dA(\xi)=K(z,\eta)$$

由核函数的再生特征得

$$\frac{4}{\pi}\frac{\partial^2\Delta\Gamma}{\partial z\partial\overline{\xi}}(z,\eta)=K(z,\eta)$$

$$\frac{4}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{\xi}}\cdot 4\frac{\partial^2\Gamma(z,\eta)}{\partial z\partial\overline{z}}=K(z,\eta)$$

整理得到

$$\frac{16}{\pi}\frac{\partial^4\Gamma(z,\eta)}{\partial z\partial\overline{z}\partial z\partial\overline{\xi}}=K(z,\eta)$$

这就完成了证明.

[参考文献] (References)

[1] Kehe zhu. Operator theory in function spaces. Marcel dekker inc. New York 1990.
[2] 实分析与复分析(原书第三版).(美)鲁丁(Rudin,W.)著; 戴牧民等译. 北京:机械工业出版社, 2006.1.
[3] Peter Duren, Alexander Schuster. Bergman Spaces. Mathematical Surveys and Monographs, Vol.100, American Mathematical Society: Providence, Rhode Island, 2004.
[4] Friedman,A. Partial Differential Equations. Holt, Rinehart and Winston, New York,1969.
[5] Duffin, R.J. On a question of Hadamard concerning super-biharmonic functions. J.Math. and Physics 27(1949),253-258.
[6] An elementary proof that the biharmonic Green function of an eccentric ellipse changes sign, SIAM Review

36(1994),99-101.
[7] Watanabe,H. Some properties of functions in Bergman space , Proc. Fac. Sci.Tokai Univ. 13(1977),39-54.