# 三角形 n 等分边线的一个定理

杨仁虎
（成都理工大学信息工程学院 成都 610059）

摘要：本文在三角形中线的基础上，提出了三角形 n 等分边线的概念，并给出了三角形 n 等分边线的一个定理。此定理可以很方便地用来证明关于三角形的其他一些定理。

关键词：三角形，中线，n 等分边线，定理

# A theorem of n-bisectrix in triangle

**Renhu YANG**
(College of Information Engineering, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, Sichuan)

**Abstract:** On the basis of concept of midline in triangle, the author puts forward the concept of n-bisectrix in triangle in this paper and gets a theorem of n-bisectrix in triangle. The theorem can be used to prove some other theorems in triangle easily.

**Keywords:** triangle, midline, n-bisectrix, theorem

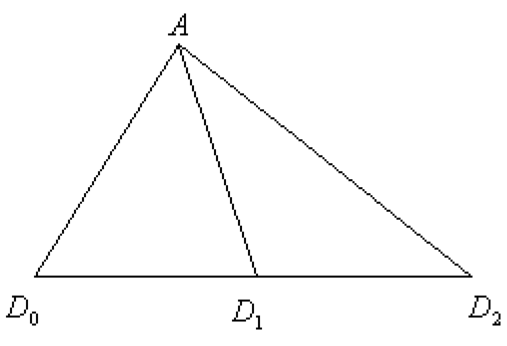
## 1、前言

关于三角形中线的定理和性质有很多，并为一般人都晓知。但是如何将中线的概念推广到更广的情形呢？本文就是在这样一个背景下，基于三角形中线的性质和定理，提出了三角形 n 等分边线的概念，并给出了它的一个定理。

## 2、正文

在引出本文定理前，先看如下引理

引理：如图（1），在$\Delta AD_0D_2$中，$D_1$点在线段$D_0D_2$上并平分线段$D_0D_2$，即$AD_1$是三角形$D_0D_2$边上的中线，我们在此处也称为二等分边线。假设三角形三边长分别为：$AD_0=a$，$AD_2=b$，$D_0D_2=c$，并记$D_0D_1=D_1D_2=x=\dfrac{c}{2}$，则有：$AD_0^2+AD_2^2=2AD_1^2+2x^2$成立。




图（1）

证明：我们运用三角形余弦定理，

在$\Delta AD_0D_1$中，有：$AD_0^2 = AD_1^2 + D_0D_1^2 - 2AD_1D_0D_1\cos\angle AD_1D_0$ （1）

在$\Delta AD_1D_2$中，有：$AD_2^2 = AD_1^2 + D_1D_2^2 - 2AD_1D_1D_2\cos\angle AD_1D_2$ （2）

将（1）和（2）相加得：

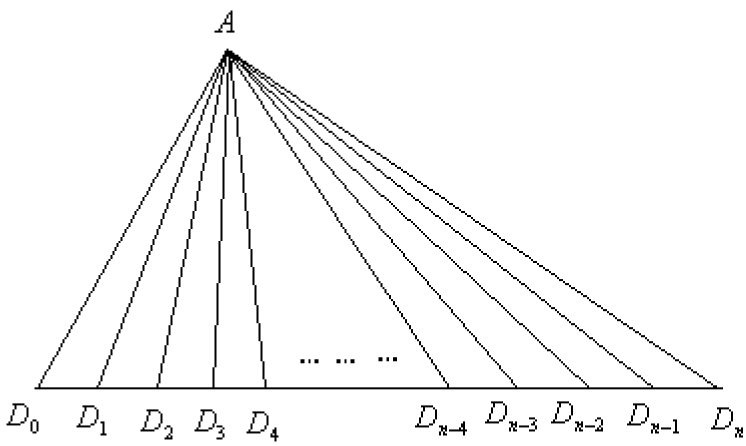
$$AD_0^2 + AD_2^2 = 2AD_1^2 + D_0D_1^2 + D_1D_2^2 - 2AD_1D_0D_1\cos\angle AD_1D_0 - 2AD_1D_1D_2\cos\angle AD_1D_2$$

而由已知$D_0D_1 = D_1D_2 = x$，且$\cos\angle AD_1D_2 = \cos(\pi - \angle AD_1D_0) = -\cos\angle AD_1D_0$，则上式变为：$AD_0^2 + AD_2^2 = 2AD_1^2 + 2x^2$。得证。

下面给出定理

**定理：** 如图（2），在$\Delta AD_0D_n$中，$AD_0 = a$，$AD_n = b$，$D_0D_n = c$，$D_0D_1 = D_1D_2 = \cdots = D_{n-2}D_{n-1} = D_{n-1}D_n = \dfrac{c}{n}$，类似中线，我们称$AD_i$为$\Delta AD_0D_n$中$D_0D_n$边上的n等分边线（$i = 1,2,\cdots,n-1$），记$x = \dfrac{c}{n}$，$u_i = AD_{i-1}^2 - AD_i^2$，（$i = 1,2,\cdots,n$），则有：

$u_i - u_{i+1} = 2x^2$（$i = 1,2,\cdots,n-1$），即$u_i$是一个公差为$-2x^2$的等差数列。




图（2）

证明：此处应用引理，

在$\Delta AD_0D_2$中，有：$AD_0^2 + AD_2^2 = 2AD_1^2 + 2x^2$

在$\Delta AD_1D_3$中，有：$AD_1^2 + AD_3^2 = 2AD_2^2 + 2x^2$

在$\Delta AD_2D_4$中，有：$AD_2^2 + AD_4^2 = 2AD_3^2 + 2x^2$

… … …

在$\Delta AD_{n-4}D_{n-2}$中，有： $AD_{n-4}^2+AD_{n-2}^2=2AD_{n-3}^2+2x^2$

在$\Delta AD_{n-3}D_{n-1}$中，有： $AD_{n-3}^2+AD_{n-1}^2=2AD_{n-2}^2+2x^2$

在$\Delta AD_{n-2}D_{n}$中，有： $AD_{n-2}^2+AD_{n}^2=2AD_{n-1}^2+2x^2$

将上面的式子变换形式如下：

$(AD_0^2-AD_1^2)-(AD_1^2-AD_2^2)=2x^2$

$(AD_1^2-AD_2^2)-(AD_2^2-AD_3^2)=2x^2$

$(AD_2^2-AD_3^2)-(AD_3^2-AD_4^2)=2x^2$

… … …

$(AD_{n-4}^2-AD_{n-3}^2)-(AD_{n-3}^2-AD_{n-2}^2)=2x^2$

$(AD_{n-3}^2-AD_{n-2}^2)-(AD_{n-2}^2-AD_{n-1}^2)=2x^2$

$(AD_{n-2}^2-AD_{n-1}^2)-(AD_{n-1}^2-AD_{n}^2)=2x^2$

若记$u_i=(AD_{i-1}^2-AD_i^2)$，（$i=1,2,\cdots,n$）则上面式子变为

$u_1-u_2=2x^2$

$u_2-u_3=2x^2$

$u_3-u_4=2x^2$

… … …

$u_{n-3}-u_{n-2}=2x^2$

$u_{n-2}-u_{n-1}=2x^2$

$u_{n-1}-u_{n}=2x^2$

从以上式子可以看出：$u_i$是一个等差数列，公差为$-2x^2$，即

$u_i-u_{i+1}=2x^2$（$i=1,2,\cdots,n-1$）。因此定理得证。

3、讨论

本文只考虑了传统的欧氏空间中平面三角形的情形，给出了 n 等分边线的概念和它的一个定理，对于其他空间和非平面三角形，我们也应该可以类似给出这个概念，并给出一些定理和

性质，这当然需要进一步研究和探索。由于作者水平有限，还望批评指正！

杨仁虎（1979～），男，成都理工大学信息工程学院在读硕士。联系地址：610059 成都理工大学研究生公寓 6 单元 5－2 杨仁虎（收） Email: yangrenhu@sina.com yangrenhu2@163.com